ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 23ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1968

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur la représentation des surfaces les unes sur les autres avec parallélisme des plans tangents,** *par Othon Pylarinos.* *

L'étude systématique de la représentation des deux surfaces d'un espace euclidien à trois dimensions l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents, c. à. d. de la correspondance entre les deux surfaces dans laquelle leurs plans tangents aux points homologues sont parallèles a été entamée par K. M. PETERSON (**8**).

D'après un théorème établi par ce géomètre (**8**, p. 24), dans une représentation de cette espèce des deux surfaces réelles l'une sur l'autre il y a toujours en chaque point de l'une deux tangentes à cette surface, auxquelles correspondent deux tangentes à l'autre en son point homologue, respectivement parallèles aux premières et ces couples de tangentes aux points homologues des deux surfaces sont deux couples de tangentes conjuguées sur elles.

Les droites de chacun de ces couples peuvent être ou bien réelles — distinctes ou coïncidantes — ou bien imaginaires et cette dernière possibilité n'a, peut-être, pas été aperçue par M. P. DRÅGILÅ ; aussi conteste-il dans quatre de ces travaux (**2**, **3**, **4**, **5**) l'exactitude du théorème de PETERSON et des résultats relatifs à ce théorème, auxquels sont par-

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ τῆς ἀπεικονίσεως μιᾶς ἐπιφανείας ἐπὶ ἄλλης μετὰ παραλληλίας τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων.**

venu les autres géomètres qui ont continué les recherches de PETERSON sur la représentation de l'espèce indiquée.

Dans ce qui suit je présente d'abord une démonstration du théorème qui vient d'être cité, différente de celle due à PETERSON et plus simple que la démonstration de ce théorème donnée par M. G. MARGULIES (7); en outre je parviens à une condition géometrique nécessaire et suffisante, afin que, dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces non développables, l'une sur l'autre, aux tangentes asymptotiques en chaque point de l'une correspondent deux tangentes conjuguées sur l'autre. Ensuite j'établis certains théorèmes concernant la correspondance de l'espèce indiquée entre deux surfaces d'une part dans le cas où toutes les deux sont des surfaces reglées et d'autre part dans le cas où une d'elles ou toutes les deux sont des surfaces minimales.

1. Considérons deux portions de surfaces réelles S_1, S d'un espace euclidien à trois dimensions, dépourvues de points singuliers et supposons qu'elles soient représentées l'une sur l'autre de manière que leurs points homologues correspondent au même système de valeurs des deux variables u, v appartenant à deux intervalles déterminés respectivement.

Soient

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u, v), \qquad \bar{r} = \bar{r}(u, v) \tag{1, 1}$$

les équations vectorielles par rapport au système de référence choisi dans l'espace des deux surfaces rapportées aux paramètres u, v, où $\bar{r}_1(u, v)$, $\bar{r}(u, v)$ sont des fonctions des u, v qui — par hypothèse — admettent des derivées du premier et du second ordre par rapport à u, v finies et continues pour tous les systèmes de valeurs des u, v appartenant aux intervalles considérés. Ces dérivées sont représentées, dans ce qui suit, par les notations abrégés $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$, $\bar{r}_{1u^2}$, $\bar{r}_{1uv}$, $\bar{r}_{1v^2}$; $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_{u^2}$, $\bar{r}_{uv}$, $\bar{r}_{v^2}$.

Les produits vectoriels $\bar{r}_{1u} \wedge \bar{r}_{1v}$, $\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v$ pour chaque système de valeurs des u, v correspondant à un couple des points homologues des S_1, S sont $\neq 0$ —ces deux portions de surfaces étant, par hypothèse, dépourvues de points singuliers— et ils déterminent les directions positives des normales aux surfaces en ces points. Or, si l'on désigne par $\bar{n}_1$, $\bar{n}$ les vecteurs unitaires qui correspondent à ces directions et par E_1, F_1, G_1; E, F, G les coefficients des premières formes fondementales des S_1, S rapportées aux paramètres u, v, pour chaque système de valeurs des u, v correspondant à deux points homologues de ces surfaces, on aura

$$(1,2)\quad E_1 = \bar{r}_{1u}^2,\ F_1 = \bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v},\ G_1 = \bar{r}_{1v}^2;\ E = \bar{r}_u^2,\ F = \bar{r}_u \times \bar{r}_v,\ G = \bar{r}_v^2,$$

où $\bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v}$, $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ sont les produits scalaires des vecteurs qui figurent dans ces expressions et

$$(1,3)\qquad \bar{n}_1 = \frac{\bar{r}_{1u} \wedge \bar{r}_{1v}}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}},\quad \bar{n} = \frac{\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Si, de plus, dans la correspondance considérée entre les surfaces S_1, S leurs plans tangents aux points homologues sont parallèles, on aura

$$(1,4)\qquad \bar{r}_{1u} = \alpha_1\bar{r}_u + \beta_1\bar{r}_u,\quad \bar{r}_{1v} = \alpha_2\bar{r}_u + \beta_2\bar{r}_v,$$

les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui figurent dans ces formules étant des fonctions des u, v qui — d'après l'hypothèse faite pour les fonctions $\bar{r}_1(u, v)$, $\bar{r}(u, v)$ — admettent des dérivées du premier ordre par rapport à u, v finies et continues pour tous les systèmes de valeurs des u, v correspondant aux couples de points homologues des S_1, S.

Par conséquent le déterminant $\delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ est une fonction des u, v continue pour tous ces systèmes de valeurs des u, v ; en outre il est nécessairement $\neq 0$:

$$(1,5)\qquad \delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0,$$

car S_1, S sont — par hypothèse — dépourvues de points singuliers et ce déterminant, étant une fonction des u, v continue et $\neq 0$ ne change pas le signe aux points homologues des S_1, S.

Des deux formules (1, 4) on déduit que les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui y figurent sont liés avec E_1, F_1, G_1 ; E, F, G par les relations

$$(1,6)\qquad \begin{cases} E_1 = E\alpha_1^2 + 2F\alpha_1\beta_1 + G\beta_1^2, \quad F_1 = E\alpha_1\alpha_2 + F(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + G\beta_1\beta_2, \\ G_1 = E\alpha_2^2 + 2F\alpha_2\beta_2 + G\beta_2^2, \end{cases}$$

$$(1,7)\qquad E_1G_1 - F_1^2 = \delta^2\{EG - F^2\}$$

et grâce à (1, 7), la première formule (1, 3), si l'on y substitue $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$ par leurs valeurs (1, 4), devient

(1, 8) $$\bar{n}_1 = \varepsilon \bar{n},$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que δ est $>$ ou < 0.

Par ailleurs la différentiation des (1, 4) par rapport à u et à v conduit aux relations

(1, 9) $$\begin{cases} \bar{r}_{1u^2} = \alpha_{1u}\bar{r}_u + \beta_{1u}\bar{r}_v + \alpha_1 \bar{r}_{u^2} + \beta_1 \bar{r}_{uv}, \\ \bar{r}_{1v^2} = \alpha_{2v}\bar{r}_u + \beta_{2v}\bar{r}_v + \alpha_2 \bar{r}_{uv} + \beta_2 \bar{r}_{v^2}, \\ \bar{r}_{1uv} = \alpha_{1v}\bar{r}_u + \beta_{1v}\bar{r}_v + \alpha_1 \bar{r}_{uv} + \beta_1 \bar{r}_{v^2} = \\ \qquad = \alpha_{2u}\bar{r}_u + \beta_{2u}\bar{r}_v + \alpha_2 \bar{r}_{u^2} + \beta_2 \bar{r}_{uv} = \bar{r}_{1vu} \end{cases}$$

dont la dernière est la condition des compatibilité des équations (1, 4).

En égalant maintenant les produits scalaires des deux membres de chaque relation (1, 9) par $\bar{n}_1 = \varepsilon\bar{n}$ et en tenant compte qu'on a

(1, 10) $$\begin{cases} \bar{r}_{1u} \times \bar{n}_1 = \bar{r}_{1v} \times \bar{n}_1 = 0, & \bar{r}_u \times \bar{n} = \bar{r}_v \times \bar{n} = 0, \\ L_1 = \bar{r}_{1u^2} \times \bar{n}_1, \quad M_1 = \bar{r}_{1uv} \times \bar{n}_1, & N_1 = \bar{r}_{1v^2} \times \bar{n}_1; \\ L = \bar{r}_{u^2} \times \bar{n}, \quad M = \bar{r}_{uv} \times \bar{n}, & N = \bar{r}_{v^2} \times \bar{n} \end{cases}$$

où L_1, M_1, N_1 ; L, M, N sont les coefficients des deux formes fondamentales du second ordre des S_1, S raportées aux paramètres u, v, il vient

(1, 11) $$\begin{cases} L_1 = \varepsilon\{\alpha_1 L + \beta_1 M\}, \quad M_1 = \varepsilon\{\alpha_1 M + \beta_1 N\} = \varepsilon\{\alpha_2 L + \beta_2 M\}, \\ \qquad N_1 = \varepsilon\{\alpha_2 M + \beta_2 N\}. \end{cases}$$

De ces relations on tire

(1, 12) $$L_1 N_1 - M_1^2 = \delta\{LN - M^2\}$$

et, grâce aux (1, 7) et (1, 12), on a aux points homologues des deux surfaces (**7**, p. 582).

(1, 13) $$K_1\delta = K,$$

où K_1, K sont les courbures totales de ces surfaces. La relation (1, 13) montre que, *lorsque une des surfaces* S_1, S, *représentées l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents, est développable, il en est de même nécessairement de l'autre.*

Mais dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces développables S_1, S l'une sur l'autre, les plans des deux familles, dont les enveloppes sont ces deux surfaces, sont deux à deux parallèles et, par conséquent, il en est de même des droites caractéristiques des plans de ces familles, c. à. d. des génératrices des deux surfaces. Par ailleurs, aux points de S_1 situés sur la même génératrice g_1 de cette surface, correspondent nécessairement des points de S situés sur sa génératrice g parallèle à g_1, car deux points homologues des S_1, S appartiennent nécessairement à deux plans parallèles des familles dont les enveloppes sont les surfaces. On a donc le

Théorème A. *Dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces développables l'une sur l'autre, aux génératrices de la première correspondent les génératrices de la seconde et les génératrices homologues des deux surfaces sont nécessairement parallèles.*

Il est à noter que dans le cas particulier où les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui figurent dans les formules (1, 4), sont des fonctions des u, v vérifiant les relations

$$(1,14) \qquad \alpha_1 = \beta_2, \qquad \alpha_2 = \beta_1 = 0,$$

la troisième relation (1, 9) devient

$$\alpha_{1v}\,\bar{r}_u = \alpha_{1u}\,\bar{r}_v .$$

Il s'ensuit, compte tenu que le produit vectoriel $\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v$ est $\neq 0$, que l'on doit avoir $\alpha_{1u} = \alpha_{1v} = 0$ pour tous les systèmes de valeurs des u, v correspondant aux points homologues des S_1, S. Par conséquent les fonctions $\bar{r}_1(u, v)$, $\bar{r}(u, v)$ seront liées par une relation de la forme

$$(1,15) \qquad \bar{r}_1(u, v) = c\,\bar{r}(u, v) + \bar{c}',$$

où c est une constante $\neq 0$ et $\bar{c}'$ est un vecteur constant; ce qui exprime que, dans ce cas, la représentation de S_1 sur S est une homothétie à un déplacement parallèle près et, par conséquent, une similitude. *Si donc la représentation par plans tangents parallèles considérée n'est pas une similitude, les coefficients* α_1, β_1, α_2, β_2 *qui figurent dans les formules (1, 4) sont des fonctions des* u, v *qui ne vérifient pas les relations (1, 14) identiquement.*

Par ailleurs, si l'on tient compte que, pour que la représentation de S_1 sur S, dans laquelle les points homologues de ces surfaces correspondent au même système de valeurs des u, v, soit une représentation par plans tangents parallèles, qui en même temps conserve les aires, il faut et il suffit, d'après (1, 7), que l'on ait $\delta^2 = \{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\}^2 = 1$, on déduit de la relation (1, 13) que, *pour que la représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces non développables l'une sur l'autre conserve les aires, il faut et il suffit que les courbures totales des deux surfaces aux points homologues soient en valeur absolue égales.*

2. Dans la représentation considérée des surfaces S_1, S l'une sur l'autre aux tangents à S_1 en un point P_1 de cette surface correspondent les tangentes à S en son point P homologue de P_1, de manière que deux tangentes homologues correspondent à la même valeur de $\dfrac{dv}{du}$.

Or, si t_1, t sont les tangentes aux surfaces S_1, S en leurs points homologues P_1, P, qui correspondent à une valeur μ de $\dfrac{dv}{du}$, ces tangentes sont respectivement parallèles aux vecteurs

$$\bar{t}_1 = \bar{r}_{1u} + \mu\bar{r}_{1v}, \qquad \bar{t} = \bar{r}_u + \mu\bar{r}_v. \tag{2, 1}$$

La première de ces formules, si l'on y substitue $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$ par leurs valeurs (1, 4), prend la forme

$$\bar{t}_1 = \bar{r}_u\{\alpha_1 + \mu\alpha_2\} + \bar{r}_v\{\beta_1 + \mu\beta_2\} \tag{2, 2}$$

et, sous cette forme, elle exprime que la tangente t_1 à S_1 en son point P_1 est parallèle à la tangente à S en son point P, qui correspond à la valeur μ' de $\dfrac{dv}{du}$, qui est liée avec μ par la relation

$$\mu'\{\alpha_1 + \mu\alpha_2\} - \{\beta_1 + \mu\beta_2\} = 0. \tag{2, 3}$$

Il en résulte que la correspondance entre les tangentes à la surface S en son point P, dans laquelle la tangente t′ qui correspond à une tangente t, est la parallèle menée du point P à la tangente t_1 au point P_1 de la surface S_1, à laquelle correspond la tangente t dans la représentation considérée de S_1 sur S, est une *projectivité* qui ne se réduit à l'identité que dans le cas où les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui figurent dans les formules (1, 4) vérifient les relations (1, 14). Dans ce cas particulier deux tangentes aux surfaces S_1, S en leurs points P_1, P, qui correspondent à la même valeur μ de $\frac{dv}{du}$ sont évidemment parallèles, tandis que, si les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 ne vérifient pas les relations (1, 14) pour les valeurs des u, v, qui correspondent aux points homologues P_1, P des S_1, S, dans la projectivité définie par la relation (2, 3) il n'y a que deux élements unis; par conséquent au point P_1 de S_1 il n'y a que deux tangentes à cette surface, auxquelles correspondent deux tangentes à S en son point P, parallèles aux premières et les tangentes de chacun de ces couples sont réelles et distinctes ou réelles et coïncidantes ou imaginaires suivant que la projectivité définie par la relation (2, 3) est hyperbolique, parabolique ou elliptique respectivement.

Les valeurs μ_1, μ_2 de $\frac{dv}{du}$, qui correspondent aux tangentes de chacun de ces couples, d'après (2, 3), sont les racines du polynôme

$$\alpha_2\mu^2 + (\alpha_1 - \beta_2)\mu - \beta_1$$

et, par conséquent, elles sont liées avec les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 par les relations

$$(2,5) \qquad \alpha_2(\mu_1 + \mu_2) - (\beta_2 - \alpha_1) = 0, \qquad \alpha_2\mu_1\mu_2 + \beta_1 = 0.$$

Par ailleurs, en égalant les produits scalaires des deux membres de la troisième relation (1, 9) par $\bar{n}$ et en tenant compte des (1, 10), on trouve

$$(2,6) \qquad L\alpha_2 - M(\alpha_1 - \beta_2) - N\beta_1 = 0$$

et en éliminant α_1, β_1, α_2, β_2 entre les relations (2, 5) et (2, 6) on parvient à la relation

$$(2,7) \qquad L + M(\mu_1 + \mu_2) + N\mu_1\mu_2 = 0.$$

D'autre part, on a, grâce aux (1, 11),

$$L_1\alpha_2 - M_1(\alpha_1 - \beta_2) - N_1\beta_1 = \varepsilon\{\alpha_1 + \beta_2\}\{L\alpha_2 - M(\alpha_1 - \beta_2) - N\beta_1\}.$$

On aura donc de même, en vertu des (2, 6) et (2, 5),

$$(2,8) \qquad L_1 + M_1(\mu_1 + \mu_2) + N_1\mu_1\mu_2 = 0.$$

La relation (2, 7) exprime que les tangentes à S en son point P qui correspondent aux valeurs μ_1, μ_2 de $\frac{dv}{du}$, qui sont les racines du polynôme (2, 3), sont conjuguées sur cette surface et, d'après (2, 8), il en est de même des tangentes à S en son point P_1 qui correspondent à ces mêmes valeurs de $\frac{dv}{du}$. Si donc $\mu_1 = \mu_2$, les tangentes à S_1 au point P_1, qui correspondent à ces valeurs de $\frac{dv}{du}$, doivent coïncider avec une des tangentes asymptotiques de S_1 en ce point et cette tangente est nécessairement parallèle à une des tangentes asymptotiques de S au point P.

Les considérations précédentes permettent de formuler le théorème suivant établi en premier lieu par PETERSON.

Théorème B. *Dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces réelles* S_1, S, *l'une sur l'autre, en chaque point de* S_1 *il y a au moins deux tangentes à cette surface, auxquelles correspondent deux tangentes à* S *en son point homologue, respectivement parallèles aux premières. Si la représentation de* S_1 *sur* S *n'est pas une similitude, en chaque point de* S_1 *il n'y a, en général, qu'un seul couple de tangentes à cette surface, qui jouissent de cette proprieté et ces deux tangentes, qui peuvent être ou bien réelles — distinctes ou coïncidantes — ou imaginaires, ainsi que les tangentes correspodantes au point homologue de* S *forment deux couples de tangentes conjuguées sur ces surfaces.*

Pour compléter cette proposition remarquons que, lorsque les surfaces S_1, S sont développables, à chaque couple de tangentes conjuguées en un point quelconque de S_1 correspond — d'après le théorème A — un couple de tangentes conjuguées au point homologue de S, car la génératrice d'une surface développable, qui passe par un point de cette surface, et toute autre tangente à cette surface en ce même point forment un couple de tangentes conjuguées sur elle.

Si, au contraire, les surfaces S_1, S ne sont pas développables, on a

$$(2, 9) \qquad L_1N_1 - M_1^2 \neq 0, \qquad LN - M^2 \neq 0$$

et, pour qu'il y ait au point courant P_1 de S_1 en dehors du couple de tangentes conjuguées correspondant aux valeurs μ_1, μ_2 de $\frac{dv}{du}$, qui sont les racines du polynôme (2, 3), d'autres couples de tangentes conjuguées auxquels correspondent, dans la représentation considérée de S_1 sur S, des couples de tangentes conjuguées aussi au point homologue P de S, il faut que le tableau des deux équations linéaires en $\mu+\mu'$, $\mu\mu'$:

$$L+M(\mu+\mu')+N\mu\mu'=0, \qquad L_1+M_1(\mu+\mu')+N_1\mu\mu'=0 \tag{2, 10}$$

soit de l'ordre 1; mais la seconde équation (2, 10), si l'on y porte les valeurs (1, 11) des L_1, M_1, N_1 et que l'on tienne compte de la première, devient

$$M_1\beta_1+N_1\beta_1(\mu+\mu')+\{M\alpha_2-N(\alpha_1-\beta_2)\}\mu\mu'=0 \tag{2, 11}$$

et pour que le tableau

$$\left\| \begin{matrix} L & M & N \\ M\beta_1 & N\beta_1 & M\alpha_2-N(\alpha_1-\beta_2) \end{matrix} \right\| \tag{2, 12}$$

des coefficients de l'équation (2, 11) et de la première équation (2, 10) soit de l'ordre 1, il faut, eu égard aux (2, 9), que l'on ait

$$\beta_1=0 \tag{2, 13}$$

et

$$L\{M\alpha_2-N(\alpha_1-\beta_2)\}=0, \qquad M\{M\alpha_2-N(\alpha_1-\beta_2)\}=0. \tag{2, 14}$$

On peut maintenant distinguer deux cas suivant que M est $=$ ou $\neq 0$.

Si $M=0$, L, N d'après (2, 9), sont nécessairement $\neq 0$ et la première condition (2, 14) devient

$$\alpha_1=\beta_2; \tag{2, 15}$$

en outre, de la relation (2, 6) qui est vérifiée aussi par les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2, en tenant compte des (2, 13) et (2, 15), on tire $\alpha_2=0$.

Si $M\neq 0$, de la seconde condition (2, 14) on déduit que l'on doit avoir

$$M\alpha_2-N(\alpha_1-\beta_2)=0, \tag{2, 16}$$

tandis que la relation (2, 6), en vertu de (2, 13), devient

$$L\alpha_2-M(\alpha_1-\beta_2)=0 \tag{2, 17}$$

et les deux conditions (2, 16) et (2, 17) montrent, eu égard aux (2. 9), que l'on doit avoir $\alpha_2=0$, $\alpha_1=\beta_2$.

Donc le tableau des coefficients des équations (2, 10) est, en général, de l'ordre 2; il n'est de l'ordre 1 pour tous les systèmes de valeurs des u, v, qui correspondent aux points homologues des surfaces S_1, S, que dans le cas où les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui figurent dans les formules (1, 4), sont des fonctions des u, v vérifiant les relations (1, 14), ou — ce qui revient au même, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe précédent — dans le cas où la représentation des surfaces S_1, S l'une sur l'autre est une homothétie à un déplacement parallèle près. Dans ce cas particulier les relations (1, 11) qui, grâce aux (1, 14), deviennent $L_1 = \varepsilon\alpha_1 L$, $M_1 = \varepsilon\alpha_1 M$, $N_1 = \varepsilon\alpha_1 N$, montrent qu'à chaque couple de tangentes à S_1 conjuguées en un point quelconque de cette surface, correspond un couple de tangentes à S conjuguées aussi en son point homologue du premier. On a donc le

Théorème C. *Dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces non développables S_1, S, l'une sur l'autre, qui n'est pas une similitude, le couple unique de tangentes à S_1 en chaque point de cette surface, auxquelles correspondent deux tangentes à S en son point homologue, respectivement parallèles aux premières, est le seul couple de tangentes conjuguées en ce point de S_1, auquel correspond un couple de tangentes conjuguées aussi sur la surface S.*

3. Les valeurs μ', μ'' de $\frac{dv}{du}$, auxquelles correspondent les tangentes asymptotiques t′, t″ de S en un point P de cette surface, étant les racines du polynôme $L + 2M\mu \; N\mu^2$, sont liées avec les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale de S par les relations

$$(3, 1) \qquad N(\mu' + \mu'') + 2M = 0, \qquad N\mu'\mu'' - L = 0$$

et, pour que les tangentes t_1', t_1'' à la surface S_1 en son point P_1 homologue de P, auxquelles correspondent les tangentes t′, t″ dans la représentation considérée de S_1 sur S, forment un couple de tangentes conjuguées sur cette surface, il faut et il suffit que l'on ait

$$L_1 + M_1(\mu' + \mu'') + N_1\mu'\mu'' = 0.$$

Cette condition, si l'on y substitue L_1, M_1, N_1 par leur valeurs (1, 11) et que l'on tienne compte des (3, 11), prend la forme

$$(3, 2) \qquad \{\alpha_1 + \beta_2\}\{LN - M^2\} = 0$$

Donc, si $LN - M^2 \neq 0$, ce qui, d'après (1, 12) entraîne $L_1N_1 - M_1^2 \neq 0$ pour les valeurs des u, v qui correspondent aux points P_1, P des surfaces S_1, S, c. à. d. si les points homologues P_1, P de ces surfaces ne sont pas paraboliques, pour que les tangentes t_1', t'' à S_1 en son point P_1, qui correspondent aux tangentes asymptotiques t', t'' au point P de S, jouissent de la propriété indiquée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0 \tag{3, 3}$$

et, en outre, en vertu de (1, 5),

$$\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2 = 0. \tag{3, 4}$$

Mais ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la projectivité entre les tangentes à S au point P, définie par la relation (2, 3), soit involutive. Par ailleurs, si cette correspondance entre les tangentes à S au point P est une involution, il en est de même — comme on le reconnaît facilement — de la correspondance entre les tangentes à la surface S_1 en son point P_1 homologue de P, dans laquelle la tangente t_1' qui correspond à une tangente t est la parallèle menée du point P_1 à la tangente au point P de S correspondant dans la représentation considérée de S_1 sur S à la tangente t_1.

On peut donc énoncer le

Théorème D. *Pour que, dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces non développables l'une sur l'autre, au couple de tangentes asymptotiques en chaque point de chacune d'elles correspond un couple de tangentes conjuguées sur l'autre, il faut et il suffit que la correspondance entre les tangentes en chaque point d'une de ces surfaces, dans laquelle la tangente* t′ *qui correspond à une tangente* t *est la parallèle menée de ce point à la tangente à l'autre surface, correspondant, dans la représentation des deux surfaces l'une sur l'autre, à la tangente* t, *soit une involution.*

Par ailleurs, la valeur μ de $\dfrac{dv}{du}$, qui correspond à une tangente asymptotique au point P_1 de la surface S_1 vérifie la relation $L_1 + 2M_1\mu + N_1\mu^2 = 0$. Cette relation, si l'on y substitue L_1, M_1, N_1 par leurs valeurs (1, 11), devient

$$L\{\alpha_1 + \mu\alpha_2\} + M\{\mu(\alpha_1 + \mu\alpha_2) + (\beta_1 + \mu\beta_2)\} + N\mu\{\beta_1 + \mu\beta_2\} = 0$$

et, sous cette forme, elle exprime, d'après (2, 3), que *la tangente à la surface* S *en son point* P *homologue de* P_1, *qui correspond à la tangente asymptotique considérée de la surface* S_1 *et la parallèle à cette tangente asymptotique ménée du point* P *forment un couple de tangentes conjuguées sur la surface* S.

Cette proposition entraîne comme conséquence le théorème suivant (**1**, p. 287).

Pour que, dans une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces l'une sur l'autre, à un des systèmes de lignes asymptotiques de la première corresponde un des systèmes de lignes asymptotiques de la seconde, il faut et il suffit que aux points homologues des deux surfaces les tangentes aux courbes de ces systèmes issues de ces points soient parallèles.

Si l'on suppose maintenant que sur les surfaces (non développables) S_1, S les courbes $v = Cte$ soient des lignes asymptotiques, on aura

$$(3,5)\qquad L_1 = \bar{r}_{1u^2} \times \bar{n}_1 = 0, \quad M_1 = \bar{r}_{1uv} \times \bar{n}_1 \neq 0, \quad L = \bar{r}_{u^2} \times \bar{n} = 0, \quad M = \bar{r}_{uv} \times \bar{n} \neq 0$$

et des deux premières relations (1, 11) on déduit, grâce aux (3, 5), que l'on doit avoir

$$(3,6)\qquad \beta_1 = 0, \qquad \alpha_1 = \beta_2 .$$

Donc, dans ce cas, les formules (1, 4) sont nécessairement de la forme

$$(3,7)\qquad \bar{r}_{1u} = \alpha_1 \bar{r}_u , \qquad \bar{r}_{1v} = \alpha_2 \bar{r}_u + \alpha_1 \bar{r}_v .$$

Si, de plus, S est une surface reglée définie par l'équation

$$(3,8)\qquad \bar{r} = \bar{\varrho}(v) + u\bar{a}(v),$$

où $\bar{a}(v)$ est le vecteur unitaire qui détermine la direction positive sur ses génératrices rectilignes $v = Cte$, on aura

$$(3,9)\qquad \bar{r}_u = \bar{a}(v), \ \bar{r}_v = \frac{d\bar{\varrho}}{dv} + u\frac{d\bar{a}}{dv}, \quad \bar{a}^2 = 1, \quad \bar{a} \times \frac{d\bar{a}}{dv} = 0$$

et les formules (3, 7), si l'on y porte les valeurs (3, 9) des $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, prennent la forme

$$(3,10)\qquad \bar{r}_{1u} = \alpha_1 \bar{a}(v) = \alpha_1 \bar{r}_u , \qquad \bar{r}_{1v} = \alpha_2 \bar{a}(v) + \alpha_1 \left\{ \frac{d\bar{\varrho}}{dv} + u\frac{d\bar{a}}{dv} \right\}.$$

De la première relation (3, 10) on déduit aussitôt que la surface S_1

doit être aussi une surface reglée dont les génératrices $v = Cte$ correspondent aux génératrices de la surface S, les génératrices homologues des deux surfaces étant parallèles.

Par aileurs de la condition de compatibilité

$$\alpha_{1v}\,\bar{a}(v) = \alpha_{2u}\,\bar{a}(v) + \alpha_{1u}\left\{\frac{d\bar{\varrho}}{dv} + u\,\frac{d\bar{a}}{dv}\right\} \tag{3, 11}$$

des deux équations (3, 10), en égalant les produits scalaires de ses deux membres par $\frac{d\bar{a}}{dv}$ et en tenant compte de la quatrième rélation (3, 9), on tire $\alpha_{1u} = 0$.

Il en résulte que la condition (3, 11) n'est vérifiée que si l'on a

$$\alpha_1 = \alpha_1(v)\,, \quad \alpha_2 = u\,\frac{d\alpha_1}{dv} + \alpha_2'(v)\,, \tag{3, 12}$$

où $\alpha_1(v)$, $\alpha_2'(v)$ sont des fonctions arbitraires de la seule variable v.

Cela étant, la première relation (3, 10) montre que l'équation de la surface S_1 doit avoir la forme

$$\bar{r}_1 = \alpha_1(v)\left\{\bar{\varrho}(v) + u\bar{a}(v)\right\} + \bar{\varrho}_1(v) \tag{3, 13}$$

On aura donc

$$\left\{\begin{aligned} \bar{r}_{1u} &= \alpha_1(v)\,\bar{a}(v) = \alpha_1\,\bar{r}_v \\ \bar{r}_{1v} &= u\,\frac{d\alpha_1}{dv}\,\bar{a} + \alpha_1\left\{\frac{d\bar{\varrho}}{dv} + u\,\frac{d\bar{a}}{dv}\right\} + \bar{\varrho}\,\frac{d\alpha_1}{dv} + \frac{d\bar{\varrho}_1}{dv} = \end{aligned}\right. \tag{3, 14}$$

$$= u\,\frac{d\alpha_1}{dv}\,\bar{r}_u + \alpha_1\,\bar{r}_v + \bar{\varrho}\,\frac{d\alpha_1}{dv} + \frac{d\bar{\varrho}_1}{dv}$$

et, pour que les plans tangents aux surfaces S_1, S en leurs points homologues, c. à. d. aux points qui correspondent au même système de valeurs des u, v, soient parallèles, il faut et il suffit, d'après (3, 12) et (3, 7), que le vecteur $\bar{\varrho}_1(v)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\bar{\varrho}_1}{dv} + \bar{\varrho}\,\frac{d\alpha_1}{dv} - \lambda(v)\,\bar{a}(v) = 0\,, \tag{3, 15}$$

où $\lambda(v)$ est une fonction arbitraire de la seule variable v.

Donc, *étant donnée une surface reglée* S *définie par une équation de la* *forme (3, 8), à chaque système de fonctions* $\alpha_1(\mathrm{v})$, $\lambda(\mathrm{v})$ *on peut faire correspondre une autre surface reglée* S_1 *: la surface définie par l'équation (3, 13), dans laquelle* $\bar{\varrho}_1$ *est une fonction vectorielle de la seule variable* v *satisfaisant à l'équation différentielle (3, 15). Les surfaces* S_1, S *sont représentées l'une sur l'autre de manière que leurs points homologues correspondent au même système de valeurs des* u, v *et dans cette représentation les plans tangents à ces surfaces aux points homologues ainsi que leurs génératrices issues de ces points sont parallèles.*

Il est à remarquer que, lorsque les coefficients α_1, β_1, α_2, β_2 qui figurent dans les formules (1, 4) vérifient les relations (3, 6), on a $\delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_1^2$.

Donc, dans ce cas, *pour que la correspondance considérée entre les surfaces* S_1, S *conserve les aires, il faut et il suffit,* d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1, que l'on ait $\delta = \alpha_1^2 = 1$, ou — ce qui, d'après (1, 13), revient au même — *que les courbures totales des deux surfaces aux points homologues soient égales.*

Cette remarque, jointe à la proposition précédente, permet d'énoncer le

Théorème E. *Etant donnée une surface reglée* S *rapportée à deux paramètres* u, v *tels que son équation soit de la forme (3, 8), à chaque fonction* $\lambda(\mathrm{v})$ *on peut faire correspondre une autre surface reglée* S_1 *: la surface définie par l'équation*

$$\bar{r}_1 = \bar{\varrho}(\mathrm{v}) + \int \lambda(\mathrm{v})\, \bar{a}(\mathrm{v})\, d\mathrm{v} + u\bar{a}(\mathrm{v}). \tag{3, 16}$$

Les surfaces S_1, S *sont représentées l'une sur l'autre de manière que aux points homologues, c. à. d. aux points correspondant au même système de valeurs des* u, v, *leurs plans tangents ainsi que leurs génératrices issues de ces points soient parallèles. Dans cette représentation qui, de plus, conserve les aires, les courbures totales de deux surfaces aux points homologues sont égales.*

On a ainsi, étant donnée l'équation vectorielle sous la forme (3, 8) d'une surface reglée quelconque, l'équation vectorielle de la famille (dépendant d'une fonction d'un seul argument) des surfaces reglées qui correspondent à la surface donnée par plans tangents parallèles, par génératrices parallèles et par égalité des courbures totales, dont l'existence a mis en évidence par une méthode géométrique très élégante M. P. VINCENSINI (**9**, p. 65).

Il est à noter que — comme on le reconnaît facilement — *les paramètres de distribution d'une surface quelconque de la famille définie par l'équation (3, 16) et de la surface donnée* S *sur deux génératrices homologues de ces surfaces sont égaux.*

4. Supposons maintenant que sur la surface (non développable) S_1 les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ soient les lignes de courbure, ou — ce qui revient au même — que l'on ait

$$(4,1)\qquad F_1 = \bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v} = 0,\quad M_1 = \bar{r}_{1uv} \times \bar{n}_1 = 0,\quad L_1 \neq 0,\quad N_1 \neq 0.$$

Dans ce cas, on déduit de la seconde relation (1,11) que l'on doit avoir

$$(4,2)\qquad \alpha_1 M + \beta_1 N = 0,\qquad \alpha_2 L + \beta_2 M = 0$$

et ces conditions montrent que, lorsque tous les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale de la surface S sont $\neq 0$, il en est nécessairement de même des coefficients α_1, β_1, α_2, β_2.

On peut donc écrire, dans ce cas, les formules (1, 4) sous la forme

$$(4,3)\qquad \bar{r}_{1u} = \alpha_1 \left\{ \bar{r}_u - \frac{M}{N}\bar{r}_v \right\},\qquad \bar{r}_{1v} = \alpha_2 \left\{ \bar{r}_u - \frac{L}{M}\bar{r}_v \right\}.$$

La première condition (4, 1), si l'on y remplace $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$ par leurs valeurs (4, 3) et que l'on tienne compte du fait que les coefficients α_1, α_2 sont $\neq 0$, prend la forme

$$(4,4)\qquad E - F\left\{ \frac{L}{M} + \frac{M}{N} \right\} + G\,\frac{L}{N} = 0$$

et, si $F = 0$, c. à. d. si le réseau (u, v) est orthogonal même sur la surface S, elle devient

$$(4,5)\qquad EN + GL = 0,$$

ce qui exprime que *la surface* S *doit être une surface minimale,* puisque, dans ce cas, la courbure moyenne H de cette surface est $H = \dfrac{EN + GL}{2EG}$.

D'autre part, si la surface S définie par la seconde équation (1, 1) est une surface minimale référée à un réseau paramétrique orthogonal (u, v) qui ne coïncide ni avec le réseau de ces lignes de courbure ni avec celui de ses lignes asymptotiques, on aura

$$(4,6)\quad F = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0, \quad L \neq 0, \quad M \neq 0, \quad N \neq 0, \quad EN + GL = 0$$

et on peut choisir les coefficients $\alpha_1(u, v)$, $\alpha_2(u, v)$ qui figurent dans les équations (4, 3) de manière que ces équations soient compatibles.

En effet, le produit scalaire du premier membre de la condition de compatibilité:

$$(4,7)\quad \alpha_{1v}\left\{\bar{r}_u - \frac{M}{N}\bar{r}_v\right\} + \alpha_1\left\{\bar{r}_{uv} - \frac{M}{N}\bar{r}_{v^2} - \left(\frac{M}{N}\right)_v \bar{r}_v\right\} -$$
$$- \alpha_{2u}\left\{\bar{r}_u - \frac{L}{M}\bar{r}_v\right\} - \alpha_2\left\{\bar{r}_{u^2} - \frac{L}{M}\bar{r}_{uv} - \left(\frac{L}{M}\right)_v \bar{r}_v\right\} = 0$$

des équations (4, 3) par $\bar{n}$ — comme on le voit facilement — s'annule identiquement, tandis qu'en annulant les produits scalaires du premier membre de cette condition par $\bar{r}_u$ et $\bar{r}_v$ et en tenant compte que, d'après la première condition (4, 6), on a

$$\bar{r}_{u^2} \times \bar{r}_v = - \bar{r}_u \times \bar{r}_{uv} = - \frac{E_v}{2}, \qquad \bar{r}_u \times \bar{r}_{v^2} = - \bar{r}_{uv} \times \bar{r}_v = - \frac{G_u}{2},$$

il vient

$$(4,8)\quad \begin{cases} \alpha_{1v}E + \dfrac{\alpha_1}{2}\left(E_v + \dfrac{M}{N}G_u\right) - \alpha_{2u}E - \dfrac{\alpha_2}{2}\left(E_u - \dfrac{L}{M}E_v\right) = 0, \\ \alpha_{1v}G\dfrac{M}{N} + \alpha_1 G\left(\dfrac{M}{N}\right)_v - \dfrac{\alpha_1}{2}\left(G_u - \dfrac{M}{N}G_v\right) - \alpha_{2u}G\dfrac{L}{M} - \\ \qquad - \alpha_2 G\left(\dfrac{L}{M}\right)_u - \dfrac{\alpha_2}{2}\left(E_v + \dfrac{L}{M}G_u\right) = 0 \end{cases}$$

et pour chaque système de fonctions $\alpha_1(u, v)$, $\alpha_2(u, v)$ satisfaisant aux deux équations aux derivées partielles (4, 8), la condition (4, 7) est vérifiée, car les produits scalaires de son premier membre par les trois vecteurs linéairement indépendants $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{n}$ s'annulent identiquement.

Donc les équations (4, 3), dans le cas envisagé, sont compatibles, lorsque les coefficients α_1, α_2, qui y figurent, sont des fonctions des u, v vérifiant les deux équations aux derivées partielles (4, 8) et elles déterminent une surface S_1 à un déplacement parallèle près. La surface minimale S est représentée sur la surface S_1 de manière que les points homologues de ces surfaces correspondent au même système de valeurs des u, v, leurs plans tangents aux points homologues étant parallèles. Dans cette représentation — comme on le constate aisément — les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ de la surface S correspondent aux lignes de courbure de la surface S_1.

5. Le déterminant δ des coefficients des $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ dans les équations (4, 3) est $\neq 0$, la surface S étant — par hypothèse — non développable.

On peut donc écrire ces équations sous la forme

$$\bar{r}_u = \alpha_1' \, \bar{r}_{1u} + \beta_1' \, \bar{r}_{1v}, \qquad \bar{r}_v = \alpha_2' \, \bar{r}_{1u} + \beta_2' \, \bar{r}_{1v}, \tag{5, 1}$$

où α_1', β_1', α_2', β_2', lorsque S est une surface minimale référée à un réseau paramétrique orthogonal (u, v) différant des réseaux de ses lignes de courbure et de ses lignes asymptotiques, sont des fonctions des u, v, dont aucune ne s'annule identiquement.

Si, de plus, les coefficients α_1, α_2 qui figurent dans les équations (4, 3) sont des fonctions des u, v vérifiant les équations (4, 8), ses équations sont compatibles — d'après ce qui est exposé dans le paragraphe précédant — et elles déterminent une surface S_1 sur laquelle les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ sont les lignes de courbure ; par conséquent le réseau (u, v) est orthogonal même sur la surface S_1. On aura donc $F = 0$, $F_1 = 0$ et, à l'aide des (5, 1), on parvient à la relation

$$F = \bar{r}_u \times \bar{r}_v = \alpha_1' \alpha_2' E_1 + \beta_1' \beta_2' G_1 = 0 . \tag{5, 2}$$

Par ailleurs en égalant les produits scalaires des deux membres de la condition de compatibilité :

$$\alpha_{1v}' \, \bar{r}_{1u} + \beta_{1v}' \, \bar{r}_{1v} + \alpha_1' \, \bar{r}_{1uv} + \beta_1' \, \bar{r}_{1v^2} = \alpha_{2u}' \, \bar{r}_{1u} + \beta_{2u}' \, \bar{r}_{1v} + \alpha_2' \, \bar{r}_{1u^2} + \beta_2' \, \bar{r}_{1uv}$$

des équations (5, 1) par $\bar{n}_1$ et en tenant compte du fait que, dans le cas envisagé, les conditions (4, 1) sont vérifiées, on trouve

$$\alpha_2' L_1 - \beta_1' N_1 = 0 \tag{5, 3}$$

et l'élimination des α_2', β_1' entre les relatives (5, 2) et (5, 3) donne

$$\alpha_1' E_1 N_1 + \beta_2' G_1 L_1 = 0 . \tag{5, 4}$$

Cette relation, compte tenu que les coefficients L_1, N_1, d'après (4, 1), sont $\neq 0$, montre que, pour que la surface S_1 soit aussi une surface minimale, il faut que l'on ait

$$\alpha_1' = \beta_2'. \tag{5, 5}$$

Mais les surfaces minimales sont — comme l'on sait (**6**, p. 274) — des surfaces isothermiques. Or, si S_1 est une surface minimale et qu'on la rapporte aux paramètres isométriques u, v correspondant au réseau (isotherme) de ses lignes de courbure, on aura

$$E_1 = G_1 \equiv \lambda_1^2(u, v), \qquad F_1 \equiv 0, \qquad L_1 + N_1 = 0, \qquad M_1 \equiv 0. \tag{5, 6}$$

Dans ce cas les équations (5, 1), en vertu des (5, 3), (5, 5) et (5, 6), affectent la forme

$$\bar{r}_u = \alpha_1' \bar{r}_{1u} + \beta_1' \bar{r}_{1v}, \qquad \bar{r}_v = - \beta_1' \bar{r}_{1u} + \alpha_1' \bar{r}_{1v} \tag{5, 7}$$

et en égalant les produits scalaires des deux membres de la condition de compatibilité:

$$\alpha_{1v}' \bar{r}_{1u} + \beta_{1v}' \bar{r}_{1v} + \beta_1' \bar{r}_{1v^2} = - \beta_{1u}' \bar{r}_{1u} + \alpha_{1u}' \bar{r}_{1v} - \beta_1' \bar{r}_{1u^2} \tag{5, 8}$$

de ces équations par $\bar{r}_{1u}$ et $\bar{r}_{1v}$, on parvient, à l'aide des (5, 6), aux conditions

$$\alpha_{1v}' = - \beta_{1u}', \qquad \alpha_{1u}' = \beta_{1v}' \tag{5, 9}$$

qui expriment que les coefficients α_1', β_1' doivent être des fonctions harmoniques conjuguées des u, v.

Les conditions (5, 9) sont, en outre, suffisantes pour que les équations (5, 7) soient, dans le cas envisagé, compatibles.

En effet, grâce aux (5, 9), la condition de compatibilité (5, 8) des équations (5, 7) devient

$$\bar{r}_{1u^2} + \bar{r}_{1v^2} = 0 \tag{5, 10}$$

et les produits scalaires du premier membre de cette condition par les trois vecteurs linéairement indépendants $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$, $\bar{n}_1$ — comme on le constate facilement à l'aide des (5, 6) — s'annulent identiquement.

Par conséquent, les équations (5, 7), lorsque les coefficients α_1', β_1' qui y figurent sont des fonctions des u, v vérifiant les équations (5, 9), déterminent une surface S à un déplacement parallèle près, qui est représentée par plans tangents parallèles sur la surface S_1.

En faisant usage des deux équations (5, 7) et en tenant compte en même temps des formules (5, 6), on trouve pour les coefficients de la première forme fondamentale de la surface les expressions

$$(5,11)\qquad E = \left\{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2\right\}\lambda_1^2 = \left\{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2\right\}E_1\,,\qquad F = 0\,,$$
$$G = \left\{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2\right\}\lambda_1^2 = \left\{\alpha_1'^2 + \beta_1'^2\right\}G_1\,,$$

ce qui montre que même sur la surface S les paramètres u, v sont isométriques et en outre que la représentation des surfaces S_1, S l'une sur l'autre, dans laquelle les points homologues correspondent au même système de valeurs des u, v, est conforme.

Par ailleurs en différentiant la première équation (5, 7) par rapport à u et la seconde par rapport à v et en égalant les produits scalaires des deux membres de chacune des deux équations ainsi obtenues par $\varepsilon\bar{n} = \bar{n}_1$, il vient

$$\varepsilon L = \alpha_1' L_1\,,\qquad \varepsilon N = \alpha_1' N_1\,,$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1.

On aura donc, en vertu des (5, 6), $L + N = 0$, ce qui prouve, compte tenu que les paramètres u, v sont isométriques sur la surface S, que cette surface est aussi une surface minimale.

Enfin on reconnaît facilement, à l'aide des équations (5, 7) que les valeurs de $\frac{dv}{du}$, qui déterminent en chaque point de S_1 les tangentes à S, en son point homologue, respectivement parallèles aux premières, sont les racines du polynôme $\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1$. On en déduit, eu égard au fait que les paramètres u, v sont isométriques sur les deux surfaces, que ces tangentes aux points homologues des S_1, S sont les tangentes aux lignes de longueur nulle des deux surfaces issues de ces points.

On peut donc énoncer le

Théorème F. *Etant donnée la surface minimale* S *qui, rapportée aux paramètres isométriques* u, v *correspondant au réseau (isotherme) de ses lignes* *de courbure, est définie par l'équation* $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, *à chaque fonction* $f(u+iv) = \alpha_1(u, v) + i\beta(u, v)$ *de la variable complexe* $u + iv$, *analytique pour toutes les valeurs de cette variable, qui correspondent aux points de* S, *on peut faire correspondre une autre surface minimale* S_1: *la surface définie à un déplacement parallèle près par les équations compatibles*

$$(5, 12) \qquad \bar{r}_{1u} = \alpha\bar{r}_u + \beta\bar{r}_v , \qquad \bar{r}_{1v} = -\beta\bar{r}_u + \bar{\alpha}\bar{r}_v .$$

Les surfaces S_1, S *sont représentées l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents, leurs points homologues correspondant au même système de valeurs des* u, v *et dans cette représentation, qui, de plus, est conforme, les couples de tangentes correspondantes aux points homologues de ces surfaces, respectivement parallèles, sont les couples de tangentes aux lignes de longueur nulle de deux surfaces issues de ces points.*

6. Supposons enfin que sur la surface S_1 les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ soient les lignes de courbure, tandis que sur la surface S les courbes $v = Cte$ ou $u = Cte$, par exemple les courbes $u = Cte$, sont des lignes asymptotiques.

Dans ce cas on aura

$$(6, 1) \qquad M_1 = \bar{r}_{1uv} \times \bar{n}_1 = 0 , \qquad F_1 = \bar{r}_{1u} \times \bar{r}_{1v} = 0 ; \qquad N = \bar{r}_{v^2} \times \bar{n} = 0$$

et

$$(6, 2) \qquad L_1 \neq 0 , \qquad N_1 \neq 0 ; \qquad M \neq 0 ,$$

les deux surfaces étant — par hypothèse — non développables.

Cela posé, on déduit de la seconde relation (1, 11) que l'on doit avoir

$$(6, 3) \qquad \alpha_1 = 0 ,$$

Par ailleurs la seconde condition (6, 1), si l'on y porte les valeurs (1, 4) des $\bar{r}_{1u}$, $\bar{r}_{1v}$ et que l'on tienne compte de (6, 3), devient

$$(6, 4) \qquad \alpha_2 F + \beta_2 G = 0 .$$

Il s'ensuit que, *pour que le réseau paramétrique* (u, v) *soit orthogonal même sur la surface* S, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$(6, 5) \qquad \beta_2 = 0 ,$$

car le coefficient α_2, d'après (6, 3) et (1, 5), est nécessairement $\neq 0$.

Donc, dans ce cas, les formules (1, 4), grâce aux (6, 3) et (6, 5), seront de la forme

$$(6, 6) \qquad \bar{r}_{1u} = \beta_1 \bar{r}_v , \qquad \bar{r}_{1v} = \alpha_2 \bar{r}_u$$

En outre, de la seconde relation (1,11), si l'on y remplace M_1, β_2 par leurs valeurs (6, 1) et (6, 5), on tire

$$(6, 7) \qquad L = \bar{r}_{u^2} \times n = 0 ,$$

ce qui exprime que sur la surface S les courbes $v =$ Cte sont aussi des lignes asymptotiques ; par conséquent S est nécessairement une surface minimale, puisque le réseau (u, v) de ses lignes asymptotiques est orthogonal.

Mais le réseau des lignes asymptotiques d'une surface minimale est isotherme, car les tangentes asymptotiques en chaque point d'une telle surface sont les bissectrices des angles formés par les tangentes aux lignes de courbure de la surface issues de ce point, dont le réseau est isotherme.

Or, si l'on suppose que les variables u, v soient les paramètres isométriques correspondant au réseau des lignes asymptotiques de la surface minimale S, on aura

$$(6, 8) \qquad E = G \equiv \lambda^2 (u, v), \qquad F = 0, \qquad L = N = 0, \qquad M \neq 0$$

et, en outre

$$(6, 9) \qquad M = c ,$$

où c est une constante $\neq 0$, comme il résulte des deux équations de CODAZZI auxquelles doivent satisfaire les coefficients λ, M.

Par ailleurs, d'après (6, 6) et (6, 8), on a

$$(6, 10) \qquad E_1 = \bar{r}_{1u}^2 = \beta_1^2 \lambda^2, \qquad F_1 = 0 , \qquad G_1 = \bar{r}_{1v}^2 = \alpha_2^2 \lambda^2$$

et les relations (1, 11), si l'on y substitue M_1, α_1, β_2 par leurs valeurs (6, 9), (6, 3) et (6, 5), deviennent

$$(6, 11) \qquad L_1 = \varepsilon\beta_1 c , \qquad M_1 = 0 , \qquad N_1 = \varepsilon\alpha_2 c .$$

On aura donc, grâce aux (6, 10) et (6, 11), pour les courbures : totale K_1 et moyenne H_1 de la surface S_1 les expressions

$$(6, 12) \qquad K_1 = \frac{L_1 N_1}{E_1 G_1} = \frac{c^2}{\alpha_2 \beta_1 \lambda^4} , \quad H_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{L_1}{E_1} + \frac{N_1}{G_1} \right\} = \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\alpha_2 \beta_1} \frac{\varepsilon c}{\lambda^2}$$

et de ces deux formules on déduit aussitôt que, lorsque α_2, β_1 sont liés avec λ par la relation

$$(6,\ 13) \qquad \alpha_2 + \beta_1 = \frac{c'}{\lambda^2}$$

où c' est une constante, K_1, H_1 sont liées par la relation

$$(6,\ 14) \qquad 2cH_1 - \varepsilon c' K_1 = 0$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1.

Dans ce cas les équations (6, 6), si l'on porte dans la seconde la valeur de α_2 tirée de la relation (6, 13), prennent la forme

$$(6,\ 15) \qquad \bar{r}_{1u} = \beta_1 \bar{r}_v\,, \qquad \bar{r}_{1v} = \left\{\frac{c'}{\lambda^2} - \beta_1\right\} \bar{r}_u$$

et, si l'on annule les produits scalaires du premier membre de la condition de compatibilité:

$$\beta_{1v}\,\bar{r}_v + \beta_1\,\bar{r}_{v^2} + \left\{\frac{2c'}{\lambda^3}\lambda_u + \beta_u\right\}\bar{r}_u - \left\{\frac{c'}{\lambda^2} - \beta_1\right\}\bar{r}_{u^2} = 0$$

de ces équations par $\bar{r}_u$ et $\bar{r}_v$ en tenant compte en même temps du fait que, d'après (6, 8), on a

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_{v^2} = -\,\bar{r}_{uv} \times \bar{r}_v = -\,\lambda\lambda_u\,, \qquad \bar{r}_{u^2} \times \bar{r}_v = -\,\bar{r}_u \times \bar{r}_{uv} = -\,\lambda\lambda_v\,,$$

on parvient aux équations

$$\beta_{1u} = -\,\frac{c'}{\lambda^3}\lambda_u\,, \qquad \beta_{1v} = -\,\frac{c'}{\lambda^3}\lambda_v\,.$$

Il en résulte que β_1 doit être une fonction de λ de la forme

$$(6,\ 16) \qquad \beta_1 = \frac{c'}{2\lambda^2} + c_1\,,$$

où c', c_1 sont des constantes dont au moins une est nécessairement $\neq 0$.

Les équations (6, 15), si l'on y remplace β_1 par sa valeur (6, 16), deviennent

$$(6,\ 17) \qquad \bar{r}_{1u} = \left\{\frac{c'}{2\lambda^2} + c_1\right\}\bar{r}_v\,, \qquad \bar{r}_{1v} = \left\{\frac{c'}{2\lambda^2} - c_1\right\}\bar{r}_u$$

et, lorsque S est une surface minimale rapportée aux paramètres isométriques (u, v) correspondant au réseau de ses lignes asymptotiques, elles sont compatibles, car la condition de compatibilité :

$$-\frac{c'}{\lambda^3}\lambda_v \bar{r}_v + \left\{\frac{c'}{2\lambda^2} + c_1\right\}\bar{r}_{v^2} + \frac{c'}{\lambda^3}\lambda_u \bar{r}_u - \left\{\frac{c'}{2\lambda^2} - c_1\right\}\bar{r}_{u^2}$$

de ces équations est identiquement vérifiée.

En effet, les produits scalaires du premier membre de cette condition par les vecteurs linéairement indépendants $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{n}$ — comme on le constate aisément en tenant compte que, dans ce cas, les coefficients des deux formes fondamentales de S sont de la forme (6, 8) — s'annulent identiquement.

Donc les équations (6, 17), dans ce cas, déterminent une surface S_1 à un déplacement parallèle près, sur laquelle, d'après (6, 10) et (6, 11), les courbes $v = $ Cte, $u = $ Cte sont les lignes de courbure, et dont les courbures : totale K_1 et moyenne H_1 sont liées par la relation linéaire et homogène à coefficients constants (6, 14).

Les surfaces S_1, S sont représentées l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents et dans cette représentation les lignes asymptotiques de S correspondent aux lignes de courbure de S_1.

En outre les formules (6, 10), si l'on y porte les valeurs des α_2, β_1, qui figurent dans les équations (6, 17), montrent que cette représentation de S_1 sur S n'est conforme que dans le cas où une des constantes c', c_1 s'annule et, si $c' = 0$, $c_1 \neq 0$, S_1 — comme il résulte de la relation (6, 14) — est une surface minimale, tandis que, si $c' \neq 0$, $c_1 = 0$, S_1 est une surface sphérique, car, dans ce cas, les courbures K_1, H_1 de cette surface — comme on le constate en remplaçant dans les formules (6, 12) α_2, β_1 par les valeurs de ces coefficients qui figurent dans les équations (6, 17) — sont toutes les deux constantes.

Les considérations précédentes permettent de formuler le

Théorème G. *Les deux équations*

$$(6,18) \qquad \bar{r}_{1u} = \left\{\frac{c'}{2\bar{r}_v^2} + c_1\right\}\bar{r}_v, \qquad \bar{r}_{1v} = \left\{\frac{c'}{2\bar{r}_u^2} - c_1\right\}\bar{r}_u,$$

lorsque la fonction $\bar{r}$ (u, v) *dont les dérivées* $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ *y figurent, est le second membre de l'équation vectorielle d'une surface minimale* S *rapportée aux para-*

mètres isométriques u, v *correspondant au réseau (isotherme) de ces lignes asymptotiques et* c', c_1 *sont des constantes, sont compatibles et elles déterminent une surface* S *à un déplacement parallèle près, dont les courbures, totale et moyenne, sont liées par une relation linéaire et homogène à coefficients constants.*

Les surfaces S_1, S *sont représentées l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents (leurs points homologues correspondant au même système de valeurs des* u, v*) et dans cette représentation, qui n'est conforme que dans le cas où une des constantes* c', c_1 *s'annule, les lignes asymptotiques de la surface* S *correspondent aux lignes de courbure de la surface* S_1.

BIBLIOGRAPHIE

1. CREANGA, J.: La correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces reglées avec correspondance des génératrices. C. R. de l'Acad. des Sciences Roumaine (1937) p.p. 287 - 290.
2. DRAGILA, P.: Sur la correspondance par parallélisme des deux surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), p.p. 189 - 200.
3. DRAGILA, P.: Correspondance entre deux surfaces par quatre couples de tangentes parallèles, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), p.p. 855 - 859.
4. DRAGILA, P.: Transformations singulières des surfaces. Bull. Sci. Math. 82 (1958) p.p. 41 - 48.
5. DRAGILA, P.: Sur les familles de surfaces se correspondant par plans tangents parallèles et égalité des courbures, J. Math. pures et appl. (1960), p.p. 91-96.
6. FORSYTH, A. R.: Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Cambridge (1920).
7. MARGULIES, G.: Peterson's theoreme on surfaces corresponding by parallelism, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), p.p. 577 - 587.
8. PETERSON, K. M.: Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1905), p.p. 5 - 43.
9. VINCENSINI, P.: Propagations des aires invariables, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1933), p.p. 41 - 68.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ ἀπεικόνισις δύο ἐπιφανειῶν τοῦ τριδιαστάτου Εὐκλειδείου χώρου, τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, μὲ παραλληλίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων των, καθ' ἣν δηλονότι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῶν εἰς τὰ ὁμόλογα σημεῖα των εἶναι παράλληλα, ἐμελετήθη συστηματικῶς τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ K. M. PETERSON. Συμφώνως δὲ πρὸς ἓν ὑπ' αὐτοῦ δειχθέν, βασικὸν διὰ τὴν τοιούτου εἴδους ἀπεικόνισιν, θεώρημα κατὰ μίαν τοιαύτην ἀπεικόνισιν δύο πραγματικῶν ἐπιφανειῶν, τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς μιᾶς ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, εἴτε πραγματικαὶ — διακεκριμέναι ἢ συμπίπτουσαι εἰς μίαν — εἴτε φανταστικαί, παράλληλοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους των κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ἐφαπτομένας τῆς ἄλλης εἰς τὸ ὁμόλογον σημεῖον της, τὰ δύο δὲ ταῦτα ζεύγη ἀντιστοίχων ἐφαπτομένων τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἰς ἕκαστον ζεῦγος ὁμολόγων σημείων των εἶναι ζεύγη συζυγῶν ἐφαπτομένων τῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα.

Εἰς τὴν ἀνακοινωθεῖσαν ἐργασίαν δίδεται ἐν ἀρχῇ μία ἀπόδειξις τοῦ προαναφερομένου θεωρήματος, τῇ βοηθείᾳ μεθόδου διαφόρου τῆς ὑπὸ τοῦ PETERSON πρὸς ἀπόδειξιν αὐτοῦ ἀκολουθηθείσης, σημαντικῶς ἁπλουστέρα τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τούτου τῆς δοθείσης ὑπὸ τοῦ κ. G. MARGULIES, ἀποδεικνύεται δὲ καὶ ἓν θεώρημα ἐκφράζον συνθήκην γεωμετρικὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν ἵνα κατὰ μίαν ἀπεικόνισιν δύο μὴ ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, μὲ παραλληλίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων των εἰς τὰς ἀσυμπτωτικὰς ἐφαπτομένας ἑκατέρας τούτων εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον της ἀντιστοιχοῦν δύο συζυγεῖς ἐφαπτόμεναι τῆς ἄλλης εἰς τὸ ὁμόλογον σημεῖον αὐτῆς. Ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύονται θεωρήματά τινα ἀφορῶντα εἰς τὴν ἀπεικόνισιν μὲ παραλληλίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς ἐπιφανείας ἐπὶ ἄλλης, ἀφ' ἑνὸς εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἀμφότεραι εἶναι ἐπιφάνειαι εὐθειογενεῖς καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μία τούτων ἢ ἀμφότεραι εἶναι ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως.