κωμῳδίας τοῦ Ἀριστοφάνους, τὰ ἐρωτικὰ μυθιστορήματα τοῦ Ἡλιοδώρου, τοῦ Ἀχιλλέως Τατίου, τοῦ Ξενοφῶντος τοῦ Ἐφεσίου, τοῦ Χαρίτωνος τοῦ Ἀφροδισιέως, τὰ Εἰδύλλια τοῦ Βίωνος καὶ τοῦ Μόσχου, τὰ Ποιμενικὰ τοῦ Λόγγου.

Τὰ στενὰ ὅρια μιᾶς ἀνακοινώσεως δὲν ἐπιτρέπουν τὴν παράθεσιν τοῦ καταλόγου τῶν 140 περίπου συγγραφέων, οἱ ὁποῖοι παρελαύνουν εἰς τοὺς πέντε σωθέντας τόμους τοῦ Κοιναρίου. Ὡς εἶναι φυσικόν, ἡ Θεολογία καταλαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν ἔκτασιν, ἀντιπροσωπευομένη ὑπὸ 65 περίπου συγγραφέων, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀρκετοὶ διὰ πολυτόμων ἔργων, ὅπως ὁ Ἰωάννης ὁ Χρυσόστομος διὰ 13 τόμων, ὁ Κύριλλος Ἀλεξανδρείας διὰ 6 τόμων, κλπ. Ἡ Νομικὴ ἐκπροσωπεῖται διὰ τῶν Ἰνστιτούτων Θεοφίλου τοῦ Ἀντικήνσορος, διὰ τοῦ Νομικοῦ Ποιήματος τοῦ Μιχαὴλ Ψελλοῦ, διὰ τοῦ Συντάγματος κατὰ Στοιχεῖον τοῦ Ματθαίου Βλαστάρεως, διὰ τῆς Ἑξαβίβλου τοῦ Ἁρμενοπούλου, κατὰ μετάφρασιν Σπανοῦ, δι' ἑνὸς ἐκτεταμένου λατινικοῦ λεξικοῦ νομικῶν ὅρων. Ἡ Ἱστορία, διὰ τῆς Παλαιᾶς Ἱστορίας τοῦ Ρολλίνου (εἰς 16 τόμους), διὰ τῶν Ἰουδαϊκῶν τοῦ Ἀλεξάνδρου Μαυροκορδάτου, διὰ τῆς Ἐπιτομῆς Δίωνος ὑπὸ Ἰωάννου τοῦ Ξιφιλίνου, διὰ τῆς Ρωμαϊκῆς Ἱστορίας τοῦ Νικηφόρου Γρηγορᾶ, κλπ. Ἡ Ἰατρική, διὰ τῶν ἔργων τοῦ Ἱπποκράτους, τοῦ Διοκλέους τοῦ Καρυστίου, τοῦ ἐκ Βελεσδονίου τῶν Ἀγράφων ἰατροῦ Νικολάου κλπ. Ἡ Φυσική, διὰ τῶν Ἀποριῶν φυσικῶν τοῦ Θεοφυλάκτου Σιμοκάτου, διὰ τοῦ περὶ παλιρροιῶν σχεδιάσματος τοῦ Εὐγενίου, κλπ. Ἡ Φιλοσοφία, διὰ τοῦ Ἐπικτήτου, τοῦ Ἱεροκλέους, τοῦ Μάρκου Ἀντωνίου, τοῦ Εὐναπίου κλπ. Ἡ Γεωγραφία, διὰ τοῦ Ἰωσήπου Μοισιόδακος, τοῦ Γεωργίου Φατσέα, κλπ. Ἡ Ρητορική, δι' ἔργων τοῦ Δημητρίου Φαληρέως, τοῦ Τιβηρίου, τοῦ Βικεντίου Δαμωδοῦ, τοῦ Λογγίνου, τοῦ Ἀμμωνίου, τοῦ Λεσβώνακτος, τοῦ Ἑρμογένους, τοῦ Ἰωάσαφ Κορνηλίου, κλπ. Ἡ Φιλολογία, διὰ τοῦ Πλουτάρχου, τοῦ Ξενοφῶντος, τῶν ἀττικῶν ρητόρων, τοῦ Συνεσίου, τοῦ Ἀρισταινέτου, τοῦ Εὐσταθίου Θεσσαλονίκης, κλπ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Ἐπὶ τοῦ Χ βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη**** . Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου[1].

Α΄ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α. 1. Τὸ Χ ($10^{ον}$) βιβλίον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἐθεωρεῖτο καὶ εἶναι τὸ δυσκολώτερον βιβλίον τῶν Στοιχείων. Ὁ Ὁλλανδὸς μαθηματικὸς Simon Stevin (1548-1620) τὸ ὠνόμασεν «ὁ σταυρὸς τοῦ μαρτυρίου τῶν μαθηματικῶν», ἐνῷ ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Jean Montucla (1725-1799) ἀμφιβάλλει, ἐὰν κατὰ τὴν ἐποχήν του θὰ ὑπῆρχε γεωμέτρης, ὅστις θὰ ἐτόλμα νὰ παρακολουθήσῃ τὸν Εὐκλείδην εἰς

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über das X. Buch der Elemente Euklids.**

1 Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν Συνεδρίαν τῆς 17 Ἰανουαρίου 1957.

τὸν σκοτεινὸν δαίδαλον τοῦ X βιβλίου[1]. Οἱ περισσότεροι ἐκ τῶν νεωτέρων ἑρμηνευτῶν τοῦ X βιβλίου καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι σκοπὸς τούτου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου διτετραγώνων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων[2]. Ὁ Cl. Taer, φρονεῖ, ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ πλήρης ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ἥτις παρέχει στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων[3].

Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἐκ τῶν δώδεκα ἀλόγων εὐθειῶν τοῦ X βιβλίου (τῶν θεωρημάτων 36 - 41 καὶ 73 - 78) εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἰσαρίθμων διτετραγώνων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἕξ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν θετικῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων. Ἐπίσης εἶναι ἀληθὲς ὅτι αἱ ἄλογοι εὐθεῖαι τῶν θεωρημάτων 48 - 53 καὶ 85 - 90 εἶναι αἱ μὲν ἓξ πρῶται ἀθροίσματα τῶν θετικῶν ριζῶν ἓξ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, αἱ δὲ ἓξ δεύτεραι εἶναι διαφοραὶ τῶν ριζῶν τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων. Ἡ παρατήρησις ὅμως αὕτη δὲν ὑποχρεοῖ εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος, καθ' ὃ σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένου τύπου ἐξισώσεων. Διότι εἰς τὸ VI βιβλίον τῶν Στοιχείων ἐπιτελεῖται ἡ ἐπίλυσις τῶν δυσκολωτέρου τύπου δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, τῶν ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων, (VI, 28). Ἡ λύσις τῶν ἐν τῷ X βιβλίῳ ἁπαντωσῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων στηρίζεται κυρίως εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἁπλουστάτου τύπου.

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸ XIII βιβλίον τῶν Στοιχείων (θεωρ. 6, 11, 16, 17) ἀποδεικνύεται: 1) Ἐὰν εὐθεῖα ρητὴ τμηθῇ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ἕκαστον τῶν τμημάτων τῆς εὐθείας εἶναι ἀποτομὴ (X, 73). 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος κύκλου εἶναι ρητή, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 3) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου εἶναι ἐλάσσων (X, 76). 4) Ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἀποτομή (X, 73). Ταῦτα ὅμως ἐπίσης δὲν ὑποχρεοῦσιν εἰς τὴν συναγωγὴν τοῦ συμπεράσματος ὅτι σκοπὸς τοῦ X βιβλίου εἶναι ἡ ἔρευνα τῶν ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς παρέχουσα στερεὸν ἔδαφος εἰς τὴν θεωρίαν τῶν κανονικῶν πολυέδρων, διότι ἐκ τῶν συναφῶν θεωρημάτων τὰ ὑπ' ἀριθμὸν 6 καὶ 11 εἶναι προπαρασκευαστικὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17. Ἐὰν δὲ ἔλειπε τὸ δεύτερον μέρος τῶν θεωρημάτων 16 καὶ 17 δὲν θὰ ἐπηρεάζετο ἡ θεωρία τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

A. 2. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην σκοπὸς τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι ἡ κατάδειξις τῆς συμμετρίας, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν χρησιμοποιῶνται πρὸς τοῦτο αἱ ἁπλούσταται ἄλογοι

[1] Paul - Henri Michel, De Pythagore à Euclide, σ. 444 κ. ἑ. éd. *Les Belles Lettres*, Paris, 1950.

[2] Thomas Heath, A history of Greek Mathematics I, σ. 402, Oxford, 1921.

[3] Clemens Thaer, Ostwald's Klassiker, Nr. 241, σ. 103, Leipzig 1936.

εὐθεῖαι. Ἐκ τῆς ἑρμηνείας, ἣν παρέχομεν κατωτέρω τῶν κυριωτέρων θεωρημάτων τοῦ X βιβλίου, φρονοῦμεν, εἶναι καταφανὴς ἡ ὀρθότης τῆς ὑποστηριζομένης ἀπόψεως.

B′

Β. 1. Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τὰ ἔχοντα κοινὸν μέτρον· ἀσύμμετρα δὲ τὰ μὴ ἔχοντα κοινὸν μέτρον.

2. Τὰ σύμμετρα μεγέθη ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη δὲν ἔχουσι λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν (X, θ. 6 καὶ 7).

3. Τυχοῦσα εὐθεῖα λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

4. Μήκει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν αὗται θεωρῶνται γραμμικῶς.

5. Δυνάμει σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι νοοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ὅταν τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι σύμμετρα ἢ ἀσύμμετρα.

6. Πᾶσα εὐθεῖα μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν λέγεται ρητή. Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, μὴ τετράγωνοι καὶ ρητή τις εὐθεῖα ϱ. Ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$ εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ρητὴν ϱ καὶ συνεπῶς εἶναι ρητή.

7. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho(\beta/\alpha)$, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετρος καὶ πρὸς τὴν ϱ καὶ πρὸς τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὰ τετράγωνα ὅμως ϱ^2 καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ ἢ $\varrho^2(\beta^2/\alpha^2)$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι πρὸς ἄλληλα σύμμετρα. Αἱ εὐθεῖαι ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγονται ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

8. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ϱ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ λέγεται μέση [ἢ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\varrho(\beta/\alpha)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$]. Μέση ἄρα λέγεται μονώνυμον περιέχον τὴν τετάρτην ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

9. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τῆς μορφῆς $\varrho^2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ἢ $\varrho^2(\beta/\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ λέγεται μέσον. Μέσον ἄρα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μονώνυμον, περιέχον τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ. Ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ θεωρούμενον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τετραγώνου εἶναι μέση, τὸ τετράγωνον δὲ τοῦτο εἶναι ἐπίσης μέσον.

10. Εὐθεῖά τις λέγεται ἄλογος, ὅταν τὸ τετράγωνον αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὸ τετράγωνον εὐθείας ληφθείσης ὡς ρητῆς.

Τὰ κατωτέρω δέκα θεωρήματα ὑπ' ἀριθ. 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 εἶναι προπαρασκευαστικὰ τῆς ὅλης θεωρίας τοῦ X βιβλίου.

10.

Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται εὐθεῖά τις ρητή, ἔστω ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ἀκεραίων μὴ τετραγώνων ἀριθμῶν α, β καὶ τῆς ϱ, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Ἡ ϱ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ εἶναι εὐθεῖαι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (καὶ μήκει ἀσύμμετροι).

Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται πάλιν ἡ ϱ. Ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης λαμβάνεται τὸ ὕψος τοῦ προηγουμένου τριγώνου, ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι μέση. Εἶναι δὲ ἡ ϱ καὶ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ ὄχι μόνον μήκει ἀσύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἤτοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἀσύμμετρα.

27.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ρητόν. Ἡ πρώτη μέση λαμβάνεται κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τοῦ θ. 10 καὶ εἶναι ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας μέσης κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὴν $\varrho(\beta/\alpha)$, καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10, τὴν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων τούτων, ἡ $\varrho(\beta/\alpha)^{3/4}$ εἶναι ἡ ζητουμένη δευτέρα μέση. Τὰ τετράγωνα τῶν μέσων, τὰ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{1/2}$ καὶ $\varrho^2(\beta/\alpha)^{3/2}$ εἶναι σύμμετρα. Τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ $\varrho^2(\beta/\alpha)$ εἶναι ρητόν.

28.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι μέσον. Προκαταρκτικῶς εὑρίσκονται τρεῖς ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λαμβάνονται οἱ μὴ τετράγωνοι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ α, β, γ, δ καὶ εὐθεῖά τις ρητή, ἔστω ϱ. Κατασκευὴ πρώτου ὀρθογωνίου τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, ϱ ἡ $\varrho(\beta/\alpha)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Κατασκευὴ δευτέρου ὀρθ. τριγώνου: ὡς ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους λαμβάνεται ἡ ϱ καὶ ὡς δεύτερον τμῆμα λαμβάνεται ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, δ, ϱ ἡ $\varrho(\delta/\gamma)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ϱ, $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης πρώτης μέσης.

Κατασκευάζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὡς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους τὰ $\varrho(=A)$ καὶ $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $(=B)$. Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ $\Delta=\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εἶναι ἡ πρώτη μέση.

Εὕρεσις τῆς ζητουμένης δευτέρας μέσης.

Τῶν $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, $\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ καὶ τῆς $\varrho(\beta/\alpha)^{1/4}$ εὑρίσκει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν $E=\varrho(\delta/\gamma)^{1/2}:(\beta/\alpha)^{1/4}$. Αὕτη εἶναι ἡ δευτέρα μέση.

Λῆμμα $1^{\text{ον}}$.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2 \text{ ἢ } \varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2, \tag{1}$$

ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοὶ καὶ $\varkappa$, ξ, σ, τ ἀκέραιοι. Ὁ $\mu\nu$ εἶναι τετράγωνος (IX, 1). Ἐὰν ὅμως δὲν εἶναι $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$ ὁ $\mu\nu$ δὲν εἶναι τετράγωνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνομεν $\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right)^2=\mu\nu$ μὴ τετράγωνος ἢ $\left(\frac{\varkappa\xi+\sigma\tau}{2}\right)^2-\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}\right)^2=\varkappa\xi\sigma\tau$ μὴ τετράγωνος. Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\varphi^2-\omega^2=\vartheta$ μὴ τετράγωνος. Οἱ τύποι (1) παρέχουσιν ἁπάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=z^2$.

Λῆμμα $2^{\text{ον}}$.

Νὰ εὑρεθῶσι δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$\mu\nu+\left(\frac{\mu-\nu}{2}-1\right)^2=\lambda$ ἢ $\varkappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\varkappa\xi-\sigma\tau}{2}-1\right)^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος, ἔνθα $\mu=\varkappa\xi$, $\nu=\sigma\tau$, $\varkappa:\xi=\sigma:\tau$, μ, ν ἄρτιοι ἢ περιττοί· Πρὸς ἁπλούστευσιν λαμβάνομεν κατωτέρω $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ μὴ τετράγωνος.

29.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $AB(=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $ZB=\sqrt{AB^2-AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$, $ZB = \frac{\varrho\omega}{\varphi}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

30.

Δίδεται ὡς ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ρητὴ εὐθεῖα $AB (=\varrho)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ AZ νὰ εἶναι ρητή, ἀλλὰ μόνον AB^2, AZ^2 σύμμετρα (συνεπῶς AB, AZ μήκει ἀσύμμετροι) καὶ ἡ ὑποτείνουσα AB καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ $BZ = \sqrt{AB^2 - AZ^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $AZ = \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $ZB = \frac{\varrho\beta}{\sqrt{\lambda}}$, $[\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ Δ νὰ εἶναι μέσαι, μόνον Γ^2, Δ^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Γ, Δ μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Gamma \times \Delta$ νὰ εἶναι ρητὸν καὶ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Gamma = \frac{\varrho\vartheta^{1/4}}{\varphi^{1/2}}$, $\Delta = \frac{\varrho\vartheta^{3/4}}{\varphi^{3/2}}$, $[\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$ μὴ τετράγωνος$]$.

31.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ ὑποτείνουσα Γ καὶ ἡ $\sqrt{\Gamma^2 - \Delta^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι.

32.1.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα Δ καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ E νὰ εἶναι μέσαι, ἀλλὰ μόνον Δ^2, E^2 σύμμετρα (καὶ συνεπῶς Δ, E μήκει ἀσύμμετροι), τὸ γινόμενον $\Delta \times E$ νὰ εἶναι μέσον καὶ ἡ Δ καὶ ἡ ἄλλη κάθετος, ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει σύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}, \quad [\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta, \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

32.2.

Ὡς τὸ προηγούμενον, ἀλλὰ ἡ Δ καὶ ἡ $\sqrt{\Delta^2 - E^2}$ νὰ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$\Delta = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}, \quad E = \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \quad [\alpha^2 + \beta^2 = \lambda, \gamma, \delta \text{ μὴ τετράγωνοι}].$$

33.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς AZ, ZB, ὥστε AZ^2, ZB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $AZ^2 + ZB^2$ ρητὸν καὶ $AZ \times ZB$ μέσον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$AZ = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad ZB = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\ [\alpha^2+\beta^2=\lambda \text{ μὴ τετράγωνος}].$$

34.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, ΔB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον καὶ $A\Delta\times\Delta B$ ρητόν.

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda$, μὴ τετράγωνος$]$.

35.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευράς, ἔστω τὰς ΑΔ, ΔΒ, ὥστε $A\Delta^2$, ΔB^2 νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, $A\Delta^2+\Delta B^2$ μέσον, $A\Delta\times\Delta B$ μέσον καὶ ἀσύμμετρον πρὸς τὸ $A\Delta^2+\Delta B^2$. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},\quad \Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}},$$

$[\alpha^2+\beta^2=\lambda$, γ, δ μὴ τετράγωνοι$]$.

Β. 2. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προηγουμένως ἀποδειχθέντων κατασκευάζονται 12 ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἑκάστη τῶν ἓξ πρώτων εὐθειῶν εἶναι ἄθροισμα δύο μονωνύμων (θεωρ. 36 - 41). Ἑκάστη τῶν ἓξ ἑπομένων εὐθειῶν εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν μονωνύμων (ἀποτομαί, θεμ. 73 - 78). Αἱ εὐθεῖαι αὗται χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατασκευὴν δώδεκα ὀρθογωνίων τριγώνων. *Ἁπλούστεραι ἄλογοι εὐθεῖαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσιν.* Αὗται εἶναι:

1. Ἐκ δύο ὀνομάτων (δυώνυμος) 36 / Ἀποτομὴ (διαφορὰ) 73
$$\varrho \pm \varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Τὰ μονώνυμα λαμβάνονται ἐκ τῆς πρώτης περιπτώσεως τοῦ θ. 10 [Δύναται νὰ εἶναι $\varrho\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \pm \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$].

2. Ἐκ δύο μέσων πρώτη 37 / Πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74
$$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/4}$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 27.

3. Ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38 / Δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75
$$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} \pm \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}.$$

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 28.

4. Μείζων / Ἐλάσσων $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 39 / 76

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 33.

5. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη / Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 40 / 77

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 34.

6. Δύο μέσα δυναμένη / Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα $\quad \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} \pm \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ 41 / 78

Τὰ μονώνυμα ἐκ θ. 35.

Ὁρισμοὶ δεύτεροι καὶ τρίτοι. (Οἱ δεύτεροι ἀφορῶσιν εἰς τὰ ἀθροίσματα, ἐνῷ οἱ τρίτοι εἰς τὰς διαφοράς).

Θεωρεῖται εὐθεῖά τις ῥητὴ ϱ καὶ ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα· ἔστω Α καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἔστω Β. Αἱ εὐθεῖαι Α, Β νὰ εἶναι ῥηταί, ἀλλὰ μόνον $Α^2$, $Β^2$ σύμμετρα (δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ συνεπῶς μήκει ἀσύμμετροι). Ἔστω ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἡ Γ.

1) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει σύμμετροι διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος Α + Β καὶ τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α — Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὔ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητὴν ϱ.

Ι. Α καὶ $\sqrt{Α^2 - Β^2}$ μήκει σύμμετροι (Α, Β μήκει ἀσύμμετροι).

1. Ἐὰν Α, ϱ μήκει σύμμετροι (Β, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),

ἡ δυώνυμος Δ = Α + Β ἂς καλῆται πρώτη δυώνυμος

ἡ διαφορὰ Δ = Α − Β ἂς καλῆται πρώτη ἀποτομή.

2. Ἐὰν Β, ϱ μήκει σύμμετροι (Α, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),

ἡ δυώνυμος Δ = Α + Β ἂς καλῆται δευτέρα δυώνυμος

ἡ διαφορὰ Δ = Α − Β ἂς καλῆται δευτέρα ἀποτομή.

3. Ἐὰν οὔτε Α οὔτε Β εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,

ἡ δυώνυμος Δ = Α + Β ἂς καλῆται τρίτη δυώνυμος

ἡ διαφορὰ Δ = Α − Β ἂς καλῆται τρίτη ἀποτομή.

2) Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α, Γ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι διακρίνονται ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τοῦ ἀθροίσματος Α + Β καὶ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς (ἀποτομῆς) Α — Β, χαρακτηριζόμεναι ἐκ τῆς σχέσεως συμμετρίας ἢ οὔ τῆς Α καὶ Β πρὸς τὴν ληφθεῖσαν ῥητήν.

II. A καὶ $\sqrt{A^2 - B^2}$ μήκει ἀσύμμετροι (A, B μήκει ἀσύμμετροι).

4. Ἐὰν A, ϱ μήκει σύμμετροι (B, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),

ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται τετάρτη δυώνυμος,

ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται τετάρτη ἀποτομή.

5. Ἐὰν B, ϱ μήκει σύμμετροι (A, ϱ μήκει ἀσύμμετροι),

ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται πέμπτη δυώνυμος,

ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται πέμπτη ἀποτομή.

6. Ἐὰν οὔτε A οὔτε B εἶναι μήκει σύμμετρος πρὸς ϱ,

ἡ δυώνυμος $\Delta = A + B$ ἂς καλῆται ἕκτη δυώνυμος

ἡ διαφορὰ $\Delta = A - B$ ἂς καλῆται ἕκτη ἀποτομή.

Κατασκευὴ τῶν ἓξ δυωνύμων καὶ ἓξ ἀποτομῶν (ἄλλαι 12 ἄλογοι εὐθεῖαι).

			θεώρημα
1.	Πρώτη δυώνυμος Πρώτη ἀποτομὴ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}.$	48 85
2.	Δευτέρα δυώνυμος Δευτέρα ἀποτομὴ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} \pm \varrho \frac{\delta}{\gamma}.$	49 86
3.	Τρίτη δυώνυμος Τρίτη ἀποτομὴ	$\varrho \frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} \pm \varrho \frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}.$	50 87

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\varphi^2 - \omega^2 = \vartheta$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

4.	Τετάρτη δυώνυμος Τετάρτη ἀποτομὴ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \pm \varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$	51 88
5.	Πέμπτη δυώνυμος Πέμπτη ἀποτομὴ	$\varrho \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} \pm \varrho \frac{\delta}{\gamma}.$	52 89
6.	Ἕκτη δυώνυμος Ἕκτη ἀποτομὴ	$\varrho \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \pm \varrho \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}.$	53 90

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$, γ, δ, ε μὴ τετράγωνοι.

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν 24 ἀλόγων εὐθειῶν κατασκευάζονται 24 ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ κατασκευὴ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι τὸ κύριον μέρος τοῦ περιεχομένου τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου. Κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ συμμετρία καὶ ἡ ἁρμονία ἥτις ὑπάρχει, ὅταν χρησιμοποιῶνται αἱ κατὰ τὸ δυνατὸν ἁπλούσταται ἄλογοι εὐθεῖαι. Ἐνταῦθα δύναται νὰ γίνῃ ἡ παρατήρησις, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 24 εἶναι τὸ γινόμενον 4×6 ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὴν τετρακτὺν τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ 6, ὅστις εἶναι ὁ πρῶτος τέλειος ἀριθμός. Παρέχομεν τὴν κατασκευὴν τῶν 24 ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς τοὺ ἑπομένους τέσσαρας πίνακας.

ΠΙΝΑΞ Ι.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ			ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ
Θεώρημα	Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους α' τμῆμα ρητὴ	β' τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
54	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη δυώνυμος θ. 48.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων (δυωνύμου) τοῦ θεωρήματος 36.
55	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα δυώνυμος 49.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης 37.
56	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη δυώνυμος 50.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας 38.
57	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη δυώνυμος 51·	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς μείζονος 39.
58	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη δυώνυμος 52.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}+1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)}+\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης 40.
59	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}+\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη δυώνυμος 53.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}+\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς δύο μέσα δυναμένης 41.

[Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐξ ἀθροίσματος].

ΠΙΝΑΞ II

Θεώρημα	ΔΙΔΟΝΤΑΙ Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἄλογος	Ἐν τμῆμα τῆς ὑποτειν. κατὰ ὑπὸ τοῦ ὕψους ῥητή	ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
60	$\varrho + \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ δυώνυμος τοῦ θεωρήματος 36.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$. τῆς πρώτης δυωνύμου τοῦ θ. 48.
61	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}+\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ ἐκ δύο μέσων πρώτη 37.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right)+2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας δυωνύμου 49.
62	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}+\frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ ἐκ δύο μέσων δευτέρα 38.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}+\frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right]+2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης δυωνύμου 50.
63	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μείζων 39.	ϱ	$\varrho+\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης δυωνύμου 53.
64	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη 40.	ϱ	$\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\varrho\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης δυωνύμου 52.
65	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}+\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ δύο μέσα δυναμένη 41.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}+\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης δυωνύμου 53

ΠΙΝΑΞ ΙΙΙ.

	Δ Ι Δ Ο Ν Τ Α Ι			Α Π Ο Δ Ε Ι Κ Ν Υ Ε Τ Α Ι	
	Τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογ. τριγώνου τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους				
Θεώρημα	α' τμῆμα ῥητὴ	β' τμῆμα ἄλογος	ἑπομένως τὸ ὕψος	Ὅτι τὸ ὕψος εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
91	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}$ πρώτη ἀποτομὴ θ. 85.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\sqrt{\vartheta}}{\varphi}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\omega}{\varphi}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\omega}{\varphi}\right)}$, δηλ. τῆς ἀποτομῆς τοῦ θεωρήματος	73.
92	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ δευτέρα ἀποτομὴ 86.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\vartheta}}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi+\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\varphi-\omega}{\sqrt{\vartheta}}\right)}$, τῆς πρώτης ἀποτομῆς μέσης	74.
93	ϱ	$\varrho\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\varrho\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}$ τρίτη ἀπστομὴ 87.	$\varrho\sqrt{\frac{\varphi-\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\varphi+\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\varphi-\omega}{2\sqrt{\varepsilon}}}$, τῆς δευτέρας ἀποτομῆς μέσης	75.
94	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τετάρτη ἀποτομὴ 88.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}\right)}$, τῆς ἐλάσσονος	76.
95	ϱ	$\varrho\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - \varrho\frac{\delta}{\gamma}$ πέμπτη ἀποτομὴ 89.	$\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}-1\right)}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{\alpha}\right)} - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{2\gamma}\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{\alpha}\right)}$, τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης	77.
96	ϱ	$\varrho\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} - \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$ ἕκτη ἀποτομὴ 90.	$\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}}$	$=\varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}+\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}} - \varrho\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}-\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}}$ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης.	78.

['Ενταῦθα παρατηροῦμεν ἓξ μετασχηματισμοὺς διπλῶν ῥιζικῶν ἐκ διαφορᾶς].

ΠΙΝΑΞ IV

Θεώρημα	Δ Ι Δ Ο Ν Τ Α Ι: Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας — ἄλογος	Ἓν τμῆμα τῆς ὑποτειν. τεμν. ὑπὸ τοῦ ὕψους — ρητή	Α Π Ο Δ Ε Ι Κ Ν Υ Ε Τ Α Ι: Ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	
97	$\varrho - \varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ ἀποτομὴ τοῦ θεωρήματος 73.	ϱ	$\varrho\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ τῆς πρώτης ἀποτομῆς τοῦ θ.	85.
98	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{3/4}$ πρώτη ἀποτομὴ μέσης 74.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\delta}{\gamma}\right) - 2\varrho\frac{\delta}{\gamma}$ τῆς δευτέρας ἀποτομῆς	86.
99	$\varrho\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/4}}$ δευτέρα ἀποτομὴ μέσης 75.	ϱ	$\varrho\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{\frac{\delta}{\gamma}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}}\right] - 2\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}$ τῆς τρίτης ἀποτομῆς	87.
100	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ ἐλάσσων 76.	ϱ	$\varrho - \frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς τετάρτης ἀποτομῆς	88.
101	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{1/2}}{\lambda^{1/4}}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 77.	ϱ	$\frac{\varrho\alpha}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\varrho\alpha^2}{\lambda}$ τῆς πέμπτης ἀποτομῆς	89.
102	$\frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1+\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}} - \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/4}\sqrt{1-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda}}}$ μετα μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα 78.	ϱ	$\varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ τῆς ἕκτης ἀποτομῆς	90.

Β. 3. Τὰ θεωρήματα, τὸ 112 καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου 113, θεωροῦμεν γνήσια· ταῦτα ἀποτελοῦσι συνέχειαν ἄμεσον καὶ συνεπῶς ἀναπόσπαστον τμῆμα τοῦ κυρίου μέρους τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων. Παρέχομεν εἰκόνα τούτων εἰς τοὺς ἑπομένους δύο πίνακας. Εἰς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τούτων κατασκευάζονται ἓξ ὀρθογώνια τρίγωνα. Γνήσια θεωροῦμεν καὶ τὰ θεωρήματα 114, 115.

	ΔΙΔΟΝΤΑΙ		ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ
	Τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας	Τὸ ἓν τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης τεμνομένης ὑπὸ τοῦ ὕψους εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς	ὅτι τὸ ἄλλο τμῆμα τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄλογος τῆς μορφῆς
Θ. 112	ρητὴ	τῆς πρώτης δυωνύμου θ. 48	τῆς πρώτης ἀποτομῆς θ. 85
	»	» δευτέρας δυωνύμου 49	» δευτέρας ἀποτομῆς 86
	»	» τρίτης δυωνύμου 50	» τρίτης ἀποτομῆς 87
	»	» τετάρτης δυωνύμου 51	» τετάρτης ἀποτομῆς 88
	»	» πέμπτης δυωνύμου 52	» πέμπτης ἀποτομῆς 89
	»	» ἕκτης δυωνύμου 53	» ἕκτης ἀποτομῆς 90
Θ. 113	»	τῆς πρώτης ἀποτομῆς 85	τῆς πρώτης δυωνύμου 48
	»	» δευτέρας ἀποτομῆς 86	» δευτέρας δυωνύμου 49
	»	» τρίτης ἀποτομῆς 87	» τρίτης δυωνύμου 50
	»	» τετάρτης ἀποτομῆς 88	» τετάρτης δυωνύμου 51
	»	» πέμπτης ἀποτομῆς 89	» πέμπτης δυωνύμου 52
	»	» ἕκτης ἀποτομῆς 90	» ἕκτης δυωνύμου 53

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser vertritt mit seiner Interpretation des X. Buches der Elemente Euklids die Meinung, der Zweck des X. Buches sei es, die Symmetrie und Harmonie aufzuzeigen die sich ergibt, wenn man bei der konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks die einfachsten irrationalen Grössen verwendet. Nach einigen Vorbemerkungen stellt der Verfasser fest, dass die Sätze 10 und 27-35, den Aufbau der ganzen Theorie des X. Buches der Elemente vorbereiten. In diesen zehn Sätzen werden die einfachsten möglichen Irrationale Grössen konstruiert, während in den folgenden Sätzen 36-41 sechs irrationale Summen von diesen Grössen gebildet werden. Diese sind: 1) Binomiale 2) Erste Bimediale 3) Zweite Bimediale 4) Major 5) Quadriert Rationales plus Medialem Ergebende 6) Quadriert die Summe zweier Medialer Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (zweite Definitions-gruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationalen Summen bildet. Diese sind: 1) Erste Binomiale

2) Zweite Binomiale 3) Dritte Binomiale 4) Vierte Binomiale 5) Fünfte Binomiale 6) Sechste Binomiale (48 - 53). Nun wird der erste entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er ist durch die Tafeln I und II wiedergegeben.

Übersetzung der Titel der Tafeln.

TAFEL I, (und III).

<table>
<tr><th colspan="3">ES IST GEGEBEN :</th><th>ES WIRD BEWIESEN :</th></tr>
<tr><td colspan="2">Von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die von der Höhe geschnitten wird,</td><td rowspan="2">folglich
die Höhe</td><td rowspan="2">Die Höhe des Dreiecks ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
<tr><td>der 1. Teil
die Rationale</td><td>der 2. Teil
die Irrationale</td></tr>
</table>

TAFEL II, (und IV).

<table>
<tr><th colspan="2">ES IST GEGEBEN :</th><th>ES WIRD BEWIESEN :</th></tr>
<tr><td>Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus
die Irrationale</td><td>Der eine Hypotenusenabschnitt
die Rationale</td><td>Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form</td></tr>
</table>

Anstatt der sechs Summen von irrationalen Grössen (Sätze 36 - 41) bildet nun Euklid sechs Differenzen von denselben irrationalen Grössen (Sätze 73 - 78). Diese sind: 1) Apotome 2) Erste Medialapotome 3) Zweite Medialapotome 4) Minor 5) Mit Rationalem mediale Summenfläche Ergebende 6) Mit Medialem mediale Summenfläche Ergebende. Dann betrachtet Euklid ein rechtwinkliges Hilfsdreieck (dasselbe wie in der 2. Definitionsgruppe, nun 3. Definitionsgruppe), indem er sechs mögliche Fälle unterscheidet und sechs neue irrationale Differenzen bildet. Diese sind: 1) Erste Apotome 2) Zweite Apotome 3) Dritte Apotome 4) Vierte Apotome 5) Fünfte Apotome 6) Sechste Apotome (Sätze 85 - 90). Nun wird der zweite entscheidende Punkt der Theorie vorgeführt. Er wird durch die Tafeln III und IV wiedergegeben. Die Titel der Tafeln III und IV, sind dieselben wie die der Tafeln I bzw. II.

Satz 112 und seine Umkehrung (S. 113) geben die Konstruktion von 12 rechtwinkligen Dreiecken; die Sätze sind eng mit der ganzen Theorie des X. Buches verbunden.

	ES SIND GEGEBEN:			ES WIRD BEWIESEN:	
	Die Höhe des Dreiecks von der Ecke des rechten Winkels aus	Der eine Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer		Der andere Hypotenusenabschnitt ist eine Irrationale von der Form einer	
112	eine Rationale	Ersten Binomiale	S. 48	Ersten Apotome	S. 85
	»	Zweiten Binomiale	49	Zweiten Apotome	86
	»	Dritten Binomiale	50	Dritten Apotome	87
	»	Vierten Binomiale	51	Vierten Apotome	88
	»	Fünften Binomiale	52	Fünften Apotome	89
	»	Sechsten Binomiale	53	Sechsten Apotome	90
113	»	Ersten Apotome	85	Ersten Binomiale	48
	»	Zweiten Apotome	86	Zweiten Binomiale	49
	»	Dritten Apotome	87	Dritten Binomiale	50
	»	Vierten Apotome	88	Vierten Binomiale	51
	»	Fünften Apotome	89	Fünften Binomiale	52
	»	Sechsten Apotome	90	Sechsten Binomiale	53

Auch die Sätze 114 und 115 sind eng mit der Theorie des X. Buches verbunden. Infolgedessen darf man sie als echte Sätze betrachten. Die zwölf Irrationallen Linien der Sätze 36-41 und 73-78, sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs biquadratischen Gleichungen. Die zwölf Irrationalen Linien der Sätze 48-53 und 85-90 sind die Summen bzw. die Differenzen der positiven Wurzeln von sechs quadratischen Gleichungen. Es wird aber bemerkt, dass Satz VI 28 schwierigere Probleme löst.