ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. - Πραγματικὰ Εὐκλείδεια ἀριθμοσώματα δευτέρου βαθμοῦ, *ὑπὸ* ***Π. Βαρναβίδου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Π. Ζερβοῦ.

1. Τὸ Ἀριθμόσωμα $A(\sqrt{D})$, ὅπου D ἀκέραιος μὴ διαιρετὸς δι' ἄλλου τελείου τετραγώνου, εἶναι Εὐκλείδειον, ἐάν, δοθέντων δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων αὐτοῦ α καὶ β διαφόρων τοῦ μηδενὸς εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ξ τοῦ $A(\sqrt{D})$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|N(\alpha-\xi\beta)| < |N(\beta)| \tag{1}$$

ὅπου διὰ $N(\alpha)$ παριστῶμεν τὸ μέτρον τοῦ α, δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν συζυγῆ αὐτοῦ $\bar{\alpha}$.

Ἐκ τῶν πραγματικῶν ἀριθμοσωμάτων $A(\sqrt{D})$, $D>0$, γνωρίζομεν κατόπιν ἐντατικῶν ἐρευνῶν σειρᾶς ἐπιστημόνων (1927 - 1948) ὅτι εἶναι Εὐκλείδεια ἀριθμοσώματα ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖα

$$D=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 21,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 57,\ 73,\ 97. \tag{2}$$

Διάφοροι συγγραφεῖς ἔδωκαν θεωρήματα διὰ τῶν ὁποίων ἠδυνήθησαν νὰ ἀποδείξουν τὴν ὕπαρξιν Ε. Α. εἰς πολλὰ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμοσωμάτων. Θεωρήματα δίδοντα πλέον ἐκτεταμένα ἀποτελέσματα σχετικῶς μὲ τὰ Εὐκλείδεια ἀριθμοσώματα ἐδόθησαν ὑπὸ τῶν J. Heinhold [6], H. Davenport [7], Π. Βαρναβίδου [8] καὶ J. Cassels [9].

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἀποδεικνύομεν δι' ἁπλουστάτου καὶ λίαν συντόμου τρόπου τὴν ὕπαρξιν Ε. Α. εἰς σχεδὸν ὅλα τὰ ἀριθμοσώματα τὰ διδόμενα ὑπὸ τῆς (2), πλὴν τῶν $A(\sqrt{19})$ καὶ $A(\sqrt{97})$.

2. Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ D εἶναι θετικὸς ἀκέραιος μὴ διαιρούμενος διὰ τελείου τετραγώνου μεγαλυτέρου τῆς 1 καὶ θέτομεν

$$\left.\begin{array}{lll} \omega=\sqrt{D}\,, & \bar{\omega}=-\sqrt{D}\,, & \text{ἐὰν } D\equiv 2 \text{ ἢ } 3 \ (\text{μετ. } 4)^{**}, \\ \omega=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{D}), & \bar{\omega}=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{D}), & \text{ἐὰν } D\equiv 1 \ (\text{μετ. } 4). \end{array}\right| \tag{3}$$

Οὕτως οἱ ἀκέραιοι τοῦ $A(\sqrt{D})$ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $x+\omega y$, ὅπου x καὶ y εἶναι ρητοὶ ἀκέραιοι.

Ἔστω $$f(x,y)=(x+\omega y)\ (x+\bar{\omega} y)$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} x^2-Dy^2\,, & \text{ἐὰν } D\equiv 2 \text{ ἢ } 3 \ (\text{μετ. } 4) \\ x^2+xy-\tfrac{1}{4}(D-1)y^2, & \text{ἐὰν } D\equiv 1 \ (\text{μετ. } 4). \end{array}\right. \tag{4}$$

* P. VARNAVIDES, Euclid's algorithm in real quadratic fields.

** Δηλοῦμεν διὰ τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως ὅτι ὁ 4 διαιρεῖ τὰς διαφορὰς $D-2$ ἢ $D-3$.

Εἶναι πρόδηλον ὅτι δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν x καὶ y ἡ συνάρτησις f(x, y) εἶναι τὸ μέτρον $N(x+\omega y)$ τοῦ ἀκεραίου $x+\omega y$ τοῦ $A(\sqrt{D})$.

Ἔχομεν διὰ $\beta \neq 0$ ὅτι

$$\frac{N(\alpha-\xi\beta)}{N(\beta)} = N\left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

καὶ ἐπομένως συνάγεται ἐκ τῆς (1) ὅτι τὸ ἀριθμόσωμα $A(\sqrt{D})$ εἶναι τότε καὶ μόνον Εὐκλείδειον, ἐὰν διὰ πάντα ἀριθμὸν $\xi_0 \left(= -\frac{\alpha}{\beta}\right)$ αὐτοῦ, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ξ τοῦ $A(\sqrt{D})$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|N(\xi+\xi_0)| < 1,$$

ἢ καὶ ἄλλως τὸ ἀριθμόσωμα $A(\sqrt{D})$ εἶναι Εὐκλείδειον, ἐὰν διὰ πᾶν ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x_0, y_0 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ρητοὺς ἀκεραίους x καὶ y τοιούτους, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|f(x+x_0,\ y+y_0)| < 1. \tag{5}$$

3. Ἔστω φ(f) τὸ κατώτερον ὅριον τῶν ἀριθμῶν M, διὰ τοὺς ὁποίους ἔχομεν

$$|f(x+x_0,\ y+y_0)| < M, \tag{6}$$

ὅπου x_0, y_0 εἶναι οἱοιδήποτε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ x, y ρητοὶ ἀκέραιοι.

Ἀπέδειξα εἰς προηγουμένην μου ἐργασίαν [8] τὸ ἀκόλουθον θεώρημα:

Θεώρημα. — *Ἔστω ὁ τύπος* $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ *μὲ διακρίνουσαν* $d=b^2-$ $-4ac>0$ *καὶ* f_1 *οἱαδήποτε τιμὴ τοῦ* $|f(x,y)|$ *ἀντιστοιχοῦσα εἰς ρητὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν* x *καὶ* y, *προσέτι δὲ* $(x,y)=1$* *καὶ* $0<f_1<\sqrt{d}$.

Ὑποτεθείσθω ὅτι

$$\alpha^2 = \frac{d}{16f_1^2} \tag{7}$$

καὶ n *οἱοσδήποτε θετικὸς ἀκέραιος τοῦ* A (1).

Τότε

$$\varphi(f) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{4} f_1, & \text{ἐὰν} \quad \alpha^2 \leqslant \frac{1}{4}, \\ \alpha^2 f_1, & \text{ἐὰν} \quad \frac{1}{4} \leqslant \alpha^2 \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} n f_1, & \text{ἐὰν} \quad \frac{1}{4}(n^2+1) \leqslant \alpha^2 \leqslant \frac{1}{4}(n^2+2n), \\ \left(\alpha^2 - \frac{1}{4} n^2\right) f_1, & \text{ἐὰν} \quad \frac{1}{4}(n^2+2n) \leqslant \alpha^2 \leqslant \frac{1}{4}\left\{(n+1)^2+1\right\}. \end{cases} \tag{8}$$

Χρησιμοποιοῦντες τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι

* Διὰ τῆς παραστάσεως $(x, y) = \alpha$, δηλοῦμεν ὅτι ὁ α εἶναι μ.κ.δ. τῶν x καὶ y.

$$\mathrm{d} = 4\mathrm{D}, \quad \text{ἐὰν} \quad \mathrm{D} \equiv 2 \text{ ἢ } 3 \ (\text{μετ. } 4),$$
$$\mathrm{d} = \mathrm{D}, \quad \text{ἐὰν} \quad \mathrm{D} \equiv 1 \ (\text{μετ. } 4),$$

λαμβάνομεν τὰ κάτωθι ἀποτελέσματα:

D	$f_1 = \lvert f(x, y) \rvert$	$\alpha^2 = \frac{d}{16 f_1^2}$	$\varphi(f)$
2	$f_1 = \lvert f(0,1) \rvert = 2$	$^1/_8$	$\leqslant {}^1/_2$
3	$f_1 = \lvert f(1,1) \rvert = 2$	$^3/_{16}$	$\leqslant {}^1/_2$
5	$f_1 = \lvert f(1,1) \rvert = 1$	$^5/_{16}$	$\leqslant {}^5/_{16}$
6	$f_1 = f(3,1) = 3$	$^1/_6$	$\leqslant {}^3/_4$
7	$f_1 = \lvert f(2,1) \rvert = 3$	$^7/_{36}$	$\leqslant {}^3/_4$
11	$f_1 = \lvert f(3,1) \rvert = 2$	$^{11}/_{16}$	$\leqslant 1$
13	$f_1 = f(2,1) = 3$	$^{13}/_{144}$	$\leqslant {}^3/_4$
17	$f_1 = f(2,1) = 2$	$^{17}/_{64}$	$\leqslant {}^{17}/_{32}$
21	$f_1 = \lvert f(1,1) \rvert = 3$	$^7/_{48}$	$\leqslant {}^3/_4$
29	$f_1 = \lvert f(2,1) \rvert = 1$	$^{29}/_{16}$	$\leqslant 1$
33	$f_1 = f(5,2) = 3$	$^{33}/_{144}$	$\leqslant {}^3/_4$
37	$f_1 = \lvert f(2,1) \rvert = 3$	$^{37}/_{144}$	$\leqslant {}^{37}/_{48}$
41	$f_1 = \lvert f(2,1) \rvert = 4$	$^{41}/_{256}$	$\leqslant 1$
57	$f_1 = f(10,3) = 4$	$^{57}/_{256}$	$\leqslant 1$
73	$f_1 = f(34,9) = 4$	$^{73}/_{256}$	$\leqslant {}^{73}/_{64}$

Διὰ $\qquad \mathrm{D} = 2, 3, 5, 6, 7, 13, 17, 21, 33, 37$

ἔχομεν $\varphi(f) < 1$ καὶ ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι τὰ ἀριθμοσώματα $A(\sqrt{D})$, διὰ τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τοῦ D, εἶναι Εὐκλείδεια. Διὰ τὰ ἀριθμοσώματα $A(\sqrt{D})$, ὅπου $D = 11$, 29, 41, 57 καὶ 73, χρειάζεται περαιτέρω ἐξέτασις.

4. *Λῆμμα· Ὑποτεθείσθω ὅτι ὁ* β *εἶναι οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ* m *ῥητὸς ἀκέραιος* $\geqslant 0$, *προσέτι δὲ*

$$\beta^2 \leqslant \frac{1}{4}(m^2 + 1). \tag{9}$$

Ἔστω

$$B_m(\beta) = \text{μέγιστον} \left\{ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}(m-1), \ \beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2 \right\}. \tag{10}$$

Τότε δι' οἱονδήποτε πραγματικὸν ἀριθμὸν X_0 *ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς* X *ἐπαληθεύων τὰς σχέσεις* $X \equiv X_0$ *(μετ. 1) καὶ*

$$\lvert X^2 - \beta^2 \rvert \leqslant B_m(\beta). \tag{11}$$

Περαιτέρω εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλέξωμεν τὸν X, *ὥστε* $X \equiv X_0$ *(μετ. 1) καὶ*

$$\lvert X^2 - \beta^2 \rvert < B_m(\beta), \tag{12}$$

ἐκτὸς ἐὰν

(I) $m=0, \quad \beta=0$ *καὶ* $X_o \equiv \frac{1}{2}$ *(μετ. 1), ἤ*

(II) $m=0, \quad \beta^2=\frac{1}{4}$ *καὶ* $X_o \equiv 0$ *(μετ. 1), ἤ*

(III) $m \geqslant 2, \quad \beta^2=\frac{1}{4}\{(m-1)^2+1\}$ *καὶ* $X_o \equiv \frac{1}{2}$ *(μετ. 1), ἤ*

(IV) $m \geqslant 1, \quad \beta^2 \geqslant \frac{1}{4}(m^2-1)$ *καὶ* $X_o \equiv \frac{1}{2}(m-1)$ *(μετ. 1).*

Ἀπόδειξις. Ἔστω πρῶτον $\beta^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Ἐκλέγομεν $X \equiv X_o$ (μετ. 1), ὥστε νὰ ἔχωμεν $0 \leqslant |X| \leqslant \frac{1}{2}$, ὅπου τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος πρὸς τ' ἀριστερὰ ἰσχύει, μόνον ὅταν $X_o \equiv 0$ (μετ. 1), τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἰσότητος πρὸς τὰ δεξιὰ ἰσχύει μόνον, ὅταν $X_o \equiv \frac{1}{2}$ (μετ. 1). Ἔχομεν τότε

$$|X^2-\beta^2| \leqslant \frac{1}{4},$$

ὅπου τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος ἰσχύει μόνον, ὅταν $\beta=0$ καὶ $X_o \equiv \frac{1}{2}$ (μετ. 1), ἢ ὅταν $\beta^2=\frac{1}{4}$, καὶ $X_o \equiv 0$ (μετ. 1). Ἀπεδείχθη οὕτω τὸ λῆμμα διὰ $\beta^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

Ὑποτεθείσθω τώρα ὅτι $\beta^2 > \frac{1}{4}$ καὶ ἔστω l θετικὸς ἀκέραιος τοιοῦτος, ὥστε

$$\beta^2 < \frac{1}{4}(l^2+1) < \frac{1}{4}(m^2+1)\cdot$$

Ἔχομεν τότε

$$\beta^2 - \frac{1}{4}(l-1)^2 < \frac{1}{4}(l^2+1) - \frac{1}{4}(l-1)^2 = \frac{1}{2}\, l \leqslant \frac{1}{2}(m-1)\cdot$$

καὶ

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}(m-1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{2}(l-1) < \frac{1}{2}(m-1).$$

Ὅθεν διὰ τῆς (10)

$$B_l(\beta) < B_m(\beta).$$

Ἐπομένως, ὅταν $\beta^2 > \frac{1}{4}$, ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν τὸ λῆμμα διὰ τοιαύτας τιμὰς τοῦ m, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{4}\{(m-1)^2+1\} \leqslant \beta^2 \leqslant \frac{1}{4}(m^2+1). \tag{13}$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἐξελέξαμεν τὸν m ὥστε νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν (13) καὶ λαμβάνομεν $X \equiv X_o$ (μετ. 1), οὕτως ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}(m-1) \leqslant |X| \leqslant \frac{1}{2}m\cdot \tag{14}$$

τοῦτο εἶναι δυνατόν, καθότι τὰ διαστήματα $\left[\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}m\right]$ καὶ $\left[-\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}(m-1)\right]$ ἐγκλείουν πάσας τὰς τιμὰς X (μετ. 1). Περαιτέρω τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς (14) ἰσχύει μόνον, ἐὰν

$$X_o \equiv \frac{1}{2}(m-1) \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1),$$

τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἰσότητος πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς (14) ἰσχύει μόνον, ἐὰν

$$X_o \equiv \frac{1}{2} m \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1).$$

Ἔχομεν δυνάμει τῆς (14)

$$\beta^2 - \frac{1}{4} m^2 \leqslant \beta^2 - X^2 \leqslant \beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2,$$

χρησιμοποιοῦντες δὲ τὴν (13) λαμβάνομεν

$$-\frac{1}{2}(m-1) = \frac{1}{4}\{(m-1)^2+1\} - \frac{1}{4} m^2 \leqslant \beta^2 - X^2 \leqslant \beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2 \quad (15)$$

μὲ αὐστηρῶς ἀνισότητα πρὸς τ' ἀριστερά, ἐκτὸς ἐὰν

$$\beta^2 = \frac{1}{4}\{(m-1)^2+1\} \quad \text{καὶ} \quad X_o \equiv \frac{1}{2} m \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1),$$

καὶ μὲ αὐστηρῶς ἀνισότητα πρὸς τὰ δεξιά, ἐκτὸς ἐὰν

$$X_o \equiv \frac{1}{2}(m-1) \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1).$$

Ἔχομεν

$$\beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2 > \frac{1}{4}, \quad \text{ἐὰν} \quad m = 1,$$

καὶ

$$\frac{1}{2}(m-1) > \frac{1}{4}, \quad \text{ἐὰν} \quad m > 1.$$

Ὅθεν ἕπεται δυνάμει τῆς (10) ὅτι

$$\mu\varepsilon\gamma. \left\{ \frac{1}{2}(m-1),\ \beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2 \right\} = B_m(\beta),$$

καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς (15)

$$|X^2 - \beta^2| \leqslant B_m(\beta).$$

Περαιτέρω ἔχομεν

$$|X^2 - \beta^2| < B_m(\beta),$$

ἐκτὸς ἐὰν

$$\beta^2 = \frac{1}{4}\{(m-1)^2+1\} \quad \text{καὶ} \ X_o \equiv \frac{1}{2} m \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1),$$

ὅτε

$$m \geqslant 2, \quad \text{καθότι} \quad \beta^2 > \frac{1}{4} \quad \text{ἤ}$$

$$\beta^2 - \frac{1}{4}(m-1)^2 \geqslant \frac{1}{2}(m-1) \quad \text{καὶ} \quad X_o \equiv \frac{1}{2}(m-1) \ (\mu\varepsilon\tau.\ 1),$$

ὅτε

$$\beta^2 \geqslant \frac{1}{4}(m^2-1),$$

καὶ τοῦτο πληροῖ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ λήμματος.

5. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν πέντε εἰδικῶν περιπτώσεων μετασχη-

ματίζομεν τὸν τύπον $f(x, y)$ εἰς ἄλλον, χρησιμοποιοῦντες ἀκεραίους μετασχηματισμοὺς μὲ ορίζουσαν ± 1. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τύπος $f(x, y)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\pm f_1$ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν x καὶ y, $(x, y)=1$, ὑπάρχει ἀκέραιος μετασχηματισμὸς μὲ ὁρίζουσαν ± 1, ὅστις μετασχηματίζει τὸν $f(x, y)$ εἰς τὸν τύπον

$$\pm f_1 \left\{ (X+kY)^2 - \frac{d}{4f_1^2} Y^2 \right\},$$

ὅπου k πραγματικὸς ἀριθμός. Μένει λοιπὸν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι δι' οἱουσδήποτε πραγματικοὺς ἀριθμοὺς X_1, Y_1 ὑπάρχουν ῥητοὶ ἀκέραιοι u, v τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$\left| (u+kv+X_0)^2 - \frac{d}{4f_1^2} (v+Y_0)^2 \right| < \frac{1}{|f_1|}, \tag{16}$$

ὅπου

$$X_0 = X_1 + kY_1 \qquad Y_0 = Y_2.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι

$$0 \leqslant X_0 \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad |Y_0| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Περαιτέρω χρησιμοποιοῦντες ἐν ἀνάγκῃ τοὺς μετασχηματισμοὺς

$$(u, v) \to (-u, -v) \quad \text{καὶ} \quad (u, v) \to (-1-u, -v)$$

δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι

$$0 \leqslant Y_0 \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{ἐὰν} \quad X_0 = 0 \quad \text{ἢ} \quad X_0 = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ λήμματος καὶ τῶν πέντε ἀκολούθων μετασχηματισμῶν

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x=3X+2Y & x=2X+Y & x=2X+Y & x=10X+3Y & x=34X+15Y \\ y=X+Y & y=X+Y & y=X+Y & y=3X+Y & y=9X+4Y \end{array}$$

ἀποδεικνύεται ὅτι $|f(x, y)| < 1$ διὰ $D=11, 29, 41, 57$ καὶ 73 ἀντιστοίχως.

Ἀπεδείχθη οὕτω, ὅτι τὰ ἀριθμοσώματα $A(\sqrt{D})$ ὅπου D οἱοσδήποτε τῶν ἀριθμῶν τῆς (2) πλὴν τῶν 19 καὶ 97 εἶναι Εὐκλείδεια.

SUMMARY

1. Euclid's Algorithm is said to hold in the algebraic field $K(\Theta)$, if for any non-zero integers α and β of $K(\Theta)$ there is an integer ξ of $K(\Theta)$ such that

$$|N(\alpha - \xi\beta)| < |N(\beta)|, \tag{1}$$

where N denotes the norm.

It is known that Euclid's Algorithm holds in the real quadratic field $K(\sqrt{D})$, where D is a positive square-free rational integer, when

$$D = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73, 97. \tag{2}$$

A number of authors have given proofs of general theorems from which they were able to deduce the existence of Euclid's Algorithm in many

of these fields. In particular results have been given by Heinhold [6], Davenport [7], myself [8], and Cassels [9]. In this paper I develop the method of my earlier paper [8] to prove the existence of E. A. in K($\sqrt{D}$) when D has any of the values (2) except* 19 and 97.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zurich und Leipzig (1927), pp. 150-151.
2. O. Perron, Quadratische Zahlkörper mit Euclidischen Algorithmus, *Math. Annalen*, **107** (1932), pp. 489-495.
3. A. Oppenheim, Quadratic fields with and without Euclid's Algorithm. *Math. Ann.* **109** (1934), pp. 349-352.
4. N. Hofreiter, Quadratische Körper mit und ohne Euklidischem Algorithmus, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **42** (1935), pp. 397-400.
5. L. Redei, Zur Frage des Euklidischen Algorithmus in Quadratischen Zahlkörpern, *Math. Ann*, **118** (1942), pp. 588-608.
6. J. Heinhold, *Math. Zeithschr.*, **44** (1939), pp. 659-688.
7. H. Davenport, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, Amsterdam, **49** (1946), pp. 815-821.
8. P. Varnavides, *Quart. Jonrnal of Math.* **19** (1948), pp. 54-58.
9. J. W. S. Cassels, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **44** (1948), pp. 145-154.

ΙΣΤΟΡΙΑ. — Ἀνέκδοτα ἔγγραφα περὶ τριῶν συντρόφων τοῦ Ρήγα, Ι. Μαυρογένη, Γ. Πουλίου, Γ. Θεοχάρη, *ὑπὸ* ***Π. Ἐνεπεκίδου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Ἀμάντου.

Ὁ κ. Πολυχρόνης Ἐνεπεκίδης, ἀπόφοιτος τῆς Φιλοσοφικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν καὶ τελευταίως ὑφηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Graz τῆς Αὐστρίας, ἀσχολεῖται ἀπὸ ἐτῶν μὲ τὴν ἱστορίαν τοῦ ἐν Αὐστρίᾳ Ἑλληνισμοῦ καὶ ἑτοιμάζει μεγάλην μελέτην περὶ τῶν διακριθέντων ἐκεῖ Ἑλλήνων τῶν οἰκογενειῶν Σίνα, Δούμπα, Καραγιάννη, Οἰκονόμου, καὶ πολλῶν ἄλλων. Ἡ ἐργασία αὕτη τοῦ κατέστησε γνωστὰ τὰ αὐστριακὰ ἀρχεῖα καὶ τὴν σχετικὴν βιβλιογραφίαν καὶ σήμερον εἶναι πράγματι ὁ καταλληλότατος νὰ ἐξετάσῃ τὴν ἱστορίαν τοῦ ἐν Αὐστρίᾳ Ἑλληνισμοῦ.

Δὲν φαίνεται δι' αὐτὸ περίεργον ὅτι ὁ φέρελπις οὗτος ἐπιστήμων εὗρῆκε πλῆθος

---

* No short proof of the existence of Euclid's Algorithm in K($\sqrt{19}$) has been given. This case seems to be of exceptional difficulty. As far as I know Redei proof of the existence of E. A. in K($\sqrt{97}$) has not yet been published; it seems likely that this case is difficult.