Πολὺ-πολὺ προσεχῶς, αἱ δύο πολύυμνοι ἀδελφαί, θὰ συναπολαύσουν τῆς μητρικῆς ἀγκάλης τὴν θαλπωρήν. Καὶ ἀπὸ τότε οἱ δύο γίγαντές των ὁ Ἀτάβυρος τῆς μιᾶς ἀδελφῆς καὶ ὁ Ψηλορείτης τῆς ἄλλης, θ' ἀγναντεύουν μὲ μάτι διαπεραστικὸν τῶν ὑδρατμῶν τῆς θαλάσσης τὸν Κιλίκιον Αὐλῶνα· σὰν ν' ἀγωνίζωνται νὰ ὑπερνικήσουν τὴν μεγάλην ἀπόστασιν, νὰ ἑλκύσουν πρὸς τὴν κοινὴν μητέρα, ἔστω καὶ μὲ τὴν δύναμιν τῆς ματιᾶς των, καὶ τῆς τρίτης περικλύτου ἀδελφῆς των τὸν γίγαντα Ὄλυμπον! Τὸν Κύπριον Ὄλυμπον... Καὶ ἡ μεγάλη καὶ κραταιὰ κηδεμὼν ἐκείνης, ἡ παρακολουθοῦσα μ' ἐνδιαφέρον τὴν ἀγωνιώδη αὐτὴν προσπάθειαν, τῆς προσμειδιᾷ Ἀλλὰ μὲ μειδίαμα καλοκάγαθον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ξεχύνεται ἡ συγκατάβασις, ἡ ἐλπίς ἡ βεβαίωσις, ἡ ὑπόσχεσις καὶ διαφαίνεται ἡ συγκατάθεσις τελικῶς. Μὲ μειδίαμα εὐπροσήγορον πονετικῆς ψυχομάννας πρὸς ἀγαπημένην ὑπὸ τὴν κηδεμονίαν της κόρην, ποὺ τὴν ἀντιλαμβάνεται ν' ἀγωνιᾷ, μὲ τὸ νὰ βλέπῃ νὰ βραδύνῃ μιὰ περιπόθητος Ἕνωσίς της, τὴν ὁποίαν Αὐτὴ ἀπὸ μακρινὰ χρόνια καρτερεῖ μὲ λαχτάρα, ποὺ τὴν κρατάει σὲ ἀγρυπνιά!

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑ.— Γενικὴ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον γραμμικοῦ κυκλώματος μετὰ διασταυρουμένων κλάδων εἰς δύο κόμβους, τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις, *ὑπὸ* ***Νικ. Κ. Κασιμάτη.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἀλεξ. Χ. Βουρνάζου.

Εἰσαγωγή.—Ἡ ἀνὰ χεῖρας μελέτη ἀποτελεῖ συνέχειαν ἄλλης πρωτοτύπου μελέτης μου ἐν τῇ ὁποίᾳ διατυπώνεται ἡ αὐτὴ συνθήκη διὰ γραμμικὰ κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων, συμπεριλαμβανομένης δὲ μετ' ἄλλων θεμάτων εἰς τὴν ἀπὸ 19 Ἰουνίου 1946 ἐγκριθεῖσαν διδακτορικὴν διατριβήν μου ὑπὸ τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς Μηχανολόγων Ἠλεκτρολόγων τοῦ Ε.Μ.Π.

Ἡ εὕρεσις τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος (ἐφ' ὅσον οὗτος εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὸς) εἰς τυχόντα κλάδον γραμμικοῦ κυκλώματος εἰς δύο κόμβους τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις δύναται, ὡς γνωστόν, πάντοτε νὰ εὑρεθῇ διὰ καταλλήλου ἐφαρμογῆς τῶν προτάσεων τοῦ Kirchhoff ἢ διὰ διαφόρων βοηθητικῶν μεθόδων στηριζομένων ὅμως ὁπωσδήποτε εἰς τὰς προτάσεις ταύτας. Οἱ ὑπολογισμοὶ ὅμως τοῦ εἴδους τούτου εἶναι, ὡς γνωστόν, συχνὰ μακροὶ καὶ ἐπίπονοι.

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς ὅτι μολονότι τὸ διὰ τῆς ὑπ' ὄψιν συνθήκης λυόμενον πρόβλημα δὲν ἦτο κατὰ περίπτωσιν ἄλυτον μέχρι τοῦδε, ἐν τούτοις δὲν εἶχε μέχρι σήμερον λυθῆ γενικῶς. Ἔπρεπε δι' ἑκάστην εἰδικὴν περίπτωσιν νὰ ἀντιμετωπίζεται τὸ πρόβλημα ἐξ ἀρχῆς, Διὰ τῆς ἀνὰ χεῖρας μελέτης τὸ πρόβλημα λύεται γενικῶς. Πράγματι ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον γραμμικοῦ κυκλώματος εἰς δύο κόμβους τοῦ ὁποίου ἐπιβάλλεται συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις ἐκφράζεται διὰ γενικοῦ τύπου, ἀπὸ τὸν ὁποῖον προκύπτει ὡς μερικὴ περίπτωσις ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον οἱουδήποτε τοιούτου κυκλώματος. Εἰδικώτερα, ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ὅλων τῶν γεφυρῶν μηδενισμοῦ ἐκφράζεται δι' ἑνὸς γενικοῦ τύπου ἀπὸ τὸν ὁποῖον προκύπτει ὡς μερικὴ περίπτωσις ἡ συνθήκη ἰσορροπίας οἱασδήποτε τοιαύτης γεφύρας.

Ἡ γενικὴ συνθήκη μηδενισμοῦ εὑρίσκει λίαν χρήσιμον ἐφαρμογὴν εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ δὴ εἰς τὸ συχνὰ παρουσιαζόμενον πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς ἕνα τῶν κλάδων τῶν πρὸς διαφόρους σκοποὺς χρησιμοποιουμένων ἠλεκτρικῶν γεφυρῶν μηδενισμοῦ, δηλαδή, εἰς τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς συνθήκης ἰσορροπίας μιᾶς τοιαύτης ἠλεκτρικῆς γεφύρας. Ἡ χρησιμοποίησις δ' αὐτῆς ἀπαλλάσσει ἀπὸ τὸν κόπον τῆς καταστρώσεως καὶ τὸν ἀκόμη μεγαλύτερον τῆς ἐπιλύσεως τοῦ εἰδικοῦ δι' ἕκαστον κύκλωμα συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Εἰς τὸ παράρτημα τὸ συνοδεῦον τὴν μελέτην ταύτην σὺν τοῖς ἄλλοις ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἀκόλουθα:

1. Ἡ διατύπωσις τῆς ὑπ' ὄψιν γενικῆς συνθήκης μηδενισμοῦ εἶναι δυνατή, ὄχι μόνον ὅταν ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων τοῦ θεωρουμένου κυκλώματος γίνῃ σύμφωνα μὲ τὸν καθοριζόμενον εἰς τὸ κύριον μέρος τῆς μελέτης σκόπιμον τρόπον, ἀλλὰ καὶ ὅταν γίνῃ κατὰ τυχόντα τρόπον.

2. Τὰ κάτωθι τρία θεωρήματα:

α. Τυχοῦσα τάσις, παρεμβαλλομένη εἰς τυχόντα κλάδον ΑΒ γραμμικοῦ κυκλώματος, προκαλεῖ εἰς τυχόντα κλάδον ΓΔ, τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἣν θὰ προεκάλει εἰς τὸν κλάδον ΑΒ ἡ αὐτὴ τάσις παρεμβαλλομένη εἰς τὸν κλάδον ΓΔ.

β. Ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον ΓΔ γραμμικοῦ κυκλώματος, ὅταν εἰς τὸν ἐπίσης τυχόντα κλάδον αὐτοῦ ΑΒ παρεμβληθῇ τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συνθήκην μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν κλάδον ΑΒ, ὅταν τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις παρεμβληθῇ εἰς τὸν κλάδον ΓΔ.

γ. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας οἱασδήποτε γεφύρας μηδενισμοῦ παραμένει ἀναλλοίωτος ἂν γίνῃ ἀμοιβαία ἐναλλαγὴ τοῦ ρευματοσκοπίου καὶ τῆς πηγῆς.

3. Ἡ γνωστὴ συνθήκη ἰσορροπίας τῆς γεφύρας τοῦ Wheatstone εἶναι μὲν ἀναγκαία ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπαρκής.

Εἰσαγόμενα σύμβολα ὁριζουσῶν: Εἰσάγομεν τὰ ἀκόλουθα σύμβολα ὁριζουσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ διευκολύνουν τὴν διατύπωσιν τῆς ὑπ' ὄψιν συνθήκης.

$\Delta^{\iota\pm\varkappa}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς ι στήλης προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης κ.

$\Delta^{\iota\pm\lambda/\varkappa\pm\lambda}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ι προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης λ καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης κ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης λ.

$\Delta^{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}$ θὰ παριστᾶ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν στηλῶν ι, κ, λ.... καὶ μ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ν.

$\Delta_{\iota\pm\varkappa}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς ι γραμμῆς προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς κ.

$\Delta_{\iota\pm\varkappa/\mu\pm\lambda}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ι προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς κ καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς μ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς λ.

$\Delta_{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς Δ, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν γραμμῶν ι, κ, λ · · · καὶ μ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ν.

$\Delta^{\iota\pm\varkappa}_{\lambda\pm\mu}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς $\Delta_{\lambda\pm\mu}$, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ι προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης κ (ἢ ἐκ τῆς $\Delta^{\iota\pm\varkappa}$, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς λ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς μ).

$\Delta^{\iota\pm\lambda/\varkappa\pm\lambda}_{\mu\pm\nu/\varrho\pm\sigma}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς $\Delta_{\mu\pm\nu/\varrho\pm\sigma}$, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ι προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης λ καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης κ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης λ ἢ ἐκ τῆς $\Delta^{\iota\pm\lambda/\varkappa\pm\lambda}$, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς μ γραμμῆς προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ν καὶ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ϱ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς σ).

$\Delta^{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}_{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}$ θὰ παριστᾷ ὁρίζουσαν προκύπτουσαν ἐκ τῆς $\Delta_{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}$ ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν στηλῶν ι, κ, λ · · · καὶ μ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης ν (ἢ ἐκ τῆς $\Delta^{\iota\pm\nu/\varkappa\pm\nu/\lambda\pm\nu/\ldots/\mu\pm\nu}$, ἂν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν γραμμῶν ι, κ, λ· · · καὶ μ προσθέσωμεν ἢ ἀναλόγως ἀφαιρέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς ν).

Τὰς ἐλάσσονας τῶν ἀνωτέρω ὁριζουσῶν θὰ παριστῶμεν ὡς συνήθως, π. χ. $\Delta^{\iota-\varkappa}_{\iota-\varkappa/1\iota}$ θὰ παριστᾷ τὴν ἐλάσσονα τῆς $\Delta^{\iota-\varkappa}_{\iota-\varkappa}$, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν καὶ ι στήλην.

Διατύπωσις τῆς συνθήκης.— Διὰ τὴν διατύπωσιν τῆς ὑπ' ὄψιν συνθήκης διὰ κυκλώματα μετὰ διασταυρουμένων κλάδων θὰ ἐφαρμόσω τὴν αὐτὴν μέθοδον, ἣν ἐχρησιμοποίησα εἰς τὴν διδακτορικήν μου διατριβὴν διὰ τὴν διατύπωσιν τῆς αὐτῆς συνθήκης διὰ κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων. Ἔστω τυχὸν γραμμικὸν κύκλωμα μετὰ ἢ ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων ἀποτελούμενον ἀπὸ ν κόμβους καὶ λ κλάδους εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τάσις ἐπιβάλλεται μεταξὺ τῶν τυχόντων κόμβων 1 καὶ ν. Ἡ τάσις ἂς εἶναι ἡμιτονοειδής, τὸ δὲ μιγαδικὸν σύμβολον αὐτῆς E.

Τὸ πλῆθος τῶν βρόχων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους προκύπτουν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς δευτέρας προτάσεως τοῦ Kirchhoff ἀνεξάρτητοι ἐξισώσεις, καὶ τοὺς ὁποίους ἐκαλέσαμεν ἀνεξαρτήτους βρόχους, εἶναι, ὡς γνωστόν, $\mu = \lambda - \nu + 1$. Ἐννοεῖται ὅτι οἱ μ ἀνεξάρτητοι βρόχοι τοῦ κυκλώματος δὲν εἶναι ἐκ τῶν προτέρων ὡρισμένοι, ἀλλὰ δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν κατά τινα σκόπιμον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τρόπον.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὑπ' ὄψιν προβλήματος οἱ μ ἀνεξάρτητοι βρόχοι ἐξελέγησαν κατὰ τρόπον ὥστε δύο τυχόντες βρόχοι νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν κλάδον ἢ οὐδένα, τυχὼν κλάδος τοῦ κυκλώματος ἢ νὰ ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον ἢ νὰ εἶναι κοινὸς εἰς δύο ἢ τρεῖς τὸ πολὺ βρόχους, ὁ δὲ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ μόνον εἰς ἕνα βρόχον.

Ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν μ ἀνεξαρτήτων βρόχων γίνεται διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, $3 \cdots \iota \cdots \varkappa \cdots (\mu - 1)$, μ. Προφανῶς, εἶναι ἀδιάφορον ποῖον ἀριθμὸν θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν βρόχων. Ἂς δώσωμεν ὅμως διὰ λόγους λογιστικῆς σκοπιμότητος εἰς τὸν βρόχον ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸν κλάδον τῆς πηγῆς, τὸν ἀριθμὸν 1.

Ὁ συμβολισμὸς τῶν ἀντιστάσεων τῶν κλάδων θὰ γίνῃ μὲ δείκτας ἀναφερομένους εἰς τοὺς βρόχους καὶ οὐχί, ὡς συνήθως γίνεται εἰς τοὺς κόμβους τοῦ κυκλώματος. Μὲ τὸν συμβολισμὸν τοῦτον: ἀντίστασις ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ εἰς δύο βρόχους, ἔστω τοὺς ι καὶ κ, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ συμβόλου $Z_{\iota\varkappa}$ ἢ $Z_{\varkappa\iota}$· ἀντίστασις ἡ ὁποία ἀνήκει εἰς ἕνα μόνον βρόχον, λ.χ. τὸν ι, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ συμβόλου Z_{ι}· ἀντίστασις ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ εἰς τρεῖς βρόχους, ἔστω τοὺς ι, κ καὶ λ, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ συμβόλου $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ (ἢ $Z_{\iota\varkappa}$ ἢ $Z_{\varkappa\iota}$ ἢ $Z_{\varkappa\lambda}$ ἢ $Z_{\lambda\varkappa}$ ἢ $Z_{\iota\lambda}$ ἢ $Z_{\lambda\iota}$)· τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀντιστάσεων αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς ἕνα βρόχον, π.χ. τὸν κ, θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ συμβόλου $Z_{\varkappa\varkappa}$.

Θεωρητικῶς δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἕκαστος βρόχος ἔχει ἀνὰ μίαν κοινὴν ἀντίστασιν μὲ ὅλους τοὺς ὑπολοίπους βρόχους. Ἐκεῖναι ὅμως ἐκ τῶν ἀντιστάσεων, αἱ ὁποῖαι δὲν ὑπάρχουν, θὰ εἶναι ἴσαι μὲ μηδέν.

Πρὸς κατάστρωσιν τοῦ συστήματος ἐξισώσεων ποὺ χρειάζεται διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ὑπ' ὄψιν προβλήματος, ἐφαρμόζομεν τὴν μέδοδον τοῦ Maxwell, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὴν παραδοχὴν ὅτι εἰς ἕκαστον βρόχον κυκλοφορεῖ ἓν βασικὸν ρεῦμα μὲ ὡρισμένην φορὰν διαγραφῆς π.χ. συμφώνως μὲ τὴν φορὰν στροφῆς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ἢ τὴν ἀντίθετον. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην, δι' ἑκάστου κλάδου, ὁ ὁποῖος θὰ ἀνήκῃ εἰς δύο ἢ τρεῖς βρόχους, θὰ κυκλοφορῇ ρεῦμα ἴσον μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν βασικῶν ρευμάτων τῶν δύο ἢ τριῶν βρόχων, διὰ τοὺς ὁποίους ὁ ὑπ' ὄψιν κλάδος εἶναι κοινός.

Τὴν μιγαδικὴν ἔντασιν ρεύματος διὰ τυχόντος βρόχου ι, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μιγαδικὴν τάσιν E παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον I_ι. Τὴν ἔντασιν ρεύματος διὰ τυχούσης ἀντιστάσεως (κλάδου) $Z_{\iota\varkappa}$ συμβολίζομεν μὲ $I_{\iota\varkappa}$. Τὴν ἔντασιν ρεύματος διὰ τυχούσης ἀντιστάσεως (κλάδου) $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ συμβολίζομεν μὲ $I_{\iota\varkappa\lambda}$.

Ἐφαρμόζοντες τὴν δευτέραν πρότασιν τοῦ Kirchhoff εἰς τοὺς μ ἀνεξαρτήτους βρόχους τυχόντος γραμμικοῦ κυκλώματος θὰ λάβωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων, τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸν βρόχον 1 τοῦ κυκλώματος εἶναι

$$Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 \cdots \pm Z_{1\iota}I_\iota \cdots \pm Z_{\iota\varkappa}I_\varkappa \cdots \pm Z_{1(\mu-1)}I_{\mu-1} \pm Z_{1\mu}I_\mu = E \quad (1)$$

ἑκάστη δὲ τῶν ὑπολοίπων $\mu-1$, αἵτινες ἀναφέρονται εἰς τοὺς βρόχους $2, 3 \cdots\cdots \iota \cdots\cdots \varkappa \cdots\cdots \mu$, εἶναι τῆς μορφῆς

$$\sum_{\varkappa=1}^{\mu}(\pm Z_{\iota\varkappa}I_\varkappa)=0 \qquad (\iota=2, 3 \cdots \iota \cdots \varkappa \cdots \mu). \tag{2}$$

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων λ. χ. ἡ $\sum_{\varkappa=1}^{\mu}(\pm Z_{\lambda\varkappa}I_\varkappa)$, ἥτις ἀναφέρεται εἰς τὸν βρόχον λ, ἔχει ἕνα ὅρον, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁπωσδήποτε θετικός, τὸν $Z_{\lambda\lambda}I_\lambda$, καὶ $\mu-1$ ὅρους τοὺς $\pm Z_{\lambda\varkappa}I_\varkappa$ $(\varkappa=1, 2 \cdots \lambda-1, \lambda+1 \cdots \mu)$ ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς καθ' ὅσον τὰ ρεύματα I_λ καὶ $I_\varkappa$ εἰς τὸν κλάδον $Z_{\lambda\varkappa}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα, π. χ. ὁ ὅρος $Z_{\lambda\varphi}I_\varphi$ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς καθ' ὅσον τὰ ρεύματα I_λ καὶ I_φ εἰς τὸν κλάδον $Z_{\lambda\varphi}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.

Ἄγνωστοι εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐξισώσεων εἶναι αἱ ἐντάσεις $I_1, I_2, I_3 \cdots I_\mu$. Παριστῶμεν μὲ Δ τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων ἐντάσεων. Ἡ ὁρίζουσα αὕτη, ἣν θὰ καλοῦμεν κυρίαν ὁρίζουσαν τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

α) Εἶναι βαθμοῦ $\mu=\lambda-\nu+1$.

β) Τὰ στοιχεῖα τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν θετικὴν διαγώνιον εἶναι ἴσα, δηλαδὴ $Z_{\iota\varkappa}=Z_{\varkappa\iota}$, ἤτοι ἡ ὁρίζουσα εἶναι συμμετρική.

γ) Τὰ στοιχεῖα τῆς θετικῆς διαγωνίου εἶναι θετικά. Τυχὸν στοιχεῖον τῶν ὑπολοίπων ἔστω τὸ $Z_{\iota\varkappa}$ (μὴ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς θετικῆς διαγωνίου), εἶναι θετικὸν ὅταν τὰ διὰ τοῦ κλάδου $Z_{\iota\varkappa}$ διερχόμενα ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$, δηλαδὴ τὰ εἰς τοὺς βρόχους ι καὶ $\varkappa$ ἀντιστοιχοῦντα, εἶναι ὁμόρροπα, ἀρνητικὸν δὲ ὅταν τὰ ρεύματα ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα. Δι' ἕκαστον κλάδον $Z_{\iota\varkappa}$ κοινὸν εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ $\varkappa$, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὁρίζουσαν Δ, δύο στοιχεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, καὶ δι' ἕκαστον κλάδον $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ κοινὸν εἰς τρεῖς βρόχους, τοὺς ι, κ καὶ λ, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὁρίζουσαν Δ, ἓξ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα.

δ) Τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης εἶναι μιγαδικὰ μεγέθη, τῶν ὁποίων τὸ πραγματικὸν μέρος εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν, τὸ φανταστικὸν δὲ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ μηδέν.

ε) Ἕκαστον στοιχεῖον τῆς θετικῆς διαγωνίου, π. χ. τὸ $Z_{\varkappa\varkappa}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μιγαδικῶν ἀντιστάσεων τοῦ οἰκείου βρόχου (τοῦ κ), ὅπερ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὑπολοίπων στοιχείων τῆς στήλης (ἢ τῆς γραμμῆς, ἀφοῦ ἡ ὁρίζουσα εἶναι συμμετρική) εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει. Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τούτου πρέπει βέβαια ν' ἀφαιρεθῇ ἡ ἀντίστασις $Z_{\varkappa}$, ἐφ' ὅσον ὁ βρόχος ἔχει ἕνα κλάδον, τὸν $Z_{\varkappa}$, μὴ ἀνήκοντα καὶ εἰς ἄλλον τινὰ βρόχον. Ὅταν ἡ στήλη (συνεπῶς καὶ ἡ γραμμή, ἀφοῦ ἡ ὁρίζουσα εἶναι συμμετρική) ἔχει στοιχεῖα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα ταῦτα εἰσέρχονται ἅπαξ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

ς) Ἕκαστον στοιχεῖον μὴ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς θετικῆς διαγωνίου, π. χ. τὸ $Z_{\iota\varkappa}$ εἶναι ἴσον μὲ τὴν μιγαδικὴν ἀντίστασιν τοῦ κλάδου, ὁ ὁποῖος εἶναι κοινὸς εἰς τοὺς βρόχους ι καὶ κ.

ζ) Συχνά, ἀρκετὰ ἐκ τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν θετικὴν διαγώνιον, εἶναι μηδέν. Προφανῶς τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἀναφέρονται εἰς τοὺς κλάδους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι δὲν ὑπάρχουν εἰς τὴν πραγματικότητα, ἀλλ' εἰσήχθησαν μόνον πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς γενικωτέρας διατυπώσεως τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ.

Ἐκ τοῦ καταστρωθέντος συστήματος ἐξισώσεων προκύπτει ὅτι τὸ βασικὸν ρεῦμα I_ι εἰς τὸν τυχόντα βρόχον ι εἶναι

$$I_\iota = (-1)^{1+\iota} \frac{E}{\Delta} \Delta_{1\iota}. \tag{3}$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως (3) εὑρίσκεται καὶ ἡ ἔντασις ρεύματος I_ι εἰς τὸν τυχόντα κλάδον Z_ι, ὅστις ἀνήκει εἰς ἕνα μόνον βρόχον, τὸν ι.

Ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον $Z_{\iota\varkappa}$ ἀνάκοντα εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$ εἶναι ὁμόρροπα, εἶναι

$$I_{\iota\varkappa} = I_\iota + I_\varkappa \tag{4}$$

ἥτις σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (3) γράφεται

$$I_{\iota\varkappa} = \frac{E}{\Delta} \left[(-1)^{1+\iota}\Delta_{1\iota} + (-1)^{1-\varkappa}\Delta_{1\varkappa} \right] \tag{5}$$

ὁπόθεν προκύπτει

$$I_{\iota\varkappa} = (-1)^{1+\iota} \frac{E}{\Delta} \Delta_{1\iota}^{\varkappa-\iota}. \tag{6}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προκύπτει ὅτι ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον $Z_{\iota\varkappa}$ κοινὸν εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$ εἰς εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ἀντίρροπα, εἶναι

$$I_{\iota\varkappa} = (-1)^{1+\iota} \frac{E}{\Delta} \Delta_{1\iota}^{\varkappa+\iota} \,. \tag{7}$$

Ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ κοινὸν εἰς τρεῖς βρόχους, τοὺς ι, κ καὶ λ τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι, $I_\varkappa$ καὶ I_λ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ὁμόρροπα, εἶναι

$$I_{\iota\varkappa\lambda} = I_\iota + I_\varkappa + I_\lambda \tag{8}$$

ἥτις σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (3) γράφεται

$$I_{\iota\varkappa\lambda} = \frac{E}{\Delta} \left[(-1)^{1+\iota}\Delta_{1\iota} + (-1)^{1+\varkappa}\Delta_{1\varkappa} + (-1)^{1+\lambda}\Delta_{1\lambda} \right] \tag{9}$$

ὁπόθεν προκύπτει

$$I_{\iota\varkappa\lambda} = (-1)^{1+\lambda} \frac{E}{\Delta} \Delta_{1\lambda}^{\iota-\lambda/\varkappa-\lambda} \,. \tag{10}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προκύπτει ὅτι ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ κοινὸν εἰς τρεῖς βρόχους, τοὺς ι, κ λ τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ὁμόρροπα, τὸ δὲ I_λ ἀντίρροπον πρὸς αὐτά, εἶναι

$$I_{\iota\varkappa\lambda} = (-1)^{\lambda} \frac{E}{\Delta} \Delta_{1\lambda}^{\iota+\lambda/\varkappa+\lambda} \,. \tag{11}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3), (6), (7), (10) καὶ (11) προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον

α) Z_ι ὅστις ἀνήκει εἰς ἕνα μόνον βρόχον, τὸν ι, εἶναι

$$\Delta_{1\iota} = 0 \tag{12}$$

β) $Z_{\iota\varkappa}$ κοινὸν εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα εἰς τὸν κλάδον εἶναι ὁμόρροπα, εἶναι

$$\Delta_{1\iota}^{\varkappa-\iota} = 0 \tag{13}$$

γ) $Z_{\iota\varkappa}$ κοινὸν εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ἀντίρροπα, εἶναι

$$\Delta_{1\iota}^{\varkappa+\iota} = 0 \tag{14}$$

δ) $Z^{\iota\varkappa\lambda}$ κοινὸν εἰς τρεῖς βρόχους, τοὺς ι, κ καὶ λ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ὁμόρροπα, εἶναι

$$\Delta_{1\iota}^{\iota-\lambda/\varkappa-\lambda} = 0 \tag{15}$$

ε) $Z_{\iota\varkappa\lambda}$ κοινὸν εἰς τρεῖς βρόχους, τοὺς ι, κ καὶ λ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ὁμόρροπα, τὸ δὲ I_λ ἀντίρροπον πρὸς αὐτά, εἶναι

$$\Delta_{1\lambda}^{\iota+\lambda/\varkappa+\lambda} = 0 \,. \tag{16}$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι συμμετρική, αἱ προηγούμεναι σχέσεις (12), (13), (14), (15) καὶ (16) γράφονται κατὰ σειρὰν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\Delta_{\iota 1}=0 \tag{12α}$$

$$\Delta_{\varkappa-\iota/\iota 1}=0 \tag{13α}$$

$$\Delta_{\varkappa+\iota/\iota 1}=0 \tag{14α}$$

$$\Delta_{\iota-\lambda/\varkappa-\lambda/\lambda 1}=0 \tag{15α}$$

$$\Delta_{\iota+\lambda/\varkappa+\lambda/\lambda 1}=0. \tag{16α}$$

Κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων.—Ἡ περίπτωσις αὕτη ἐξετάζεται λεπτομερῶς εἰς τὴν διδακτορικήν μου διατριβήν. Εἰς τὰ κυκλώματα ταῦτα οἱ ἀνεξάρτητοι βρόχοι ἐκλέγονται κατὰ τρόπον ὥστε οὐδεὶς βρόχος νὰ καλύπτῃ ἄλλον· ὁ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ μόνον εἰς ἕνα βρόχον, ὁ χαρακτηρισμὸς δὲ τοῦ βρόχου ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸν κλάδον τῆς πηγῆς γίνεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 1.

Μὲ τὴν ἐκλογὴν ταύτην τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων, τυχὸν κλάδος τοῦ κυκλώματος ἢ ἀνήκει εἰς ἕνα μόνον βρόχον ἢ εἶναι κοινὸς εἰς δύο βρόχους. Συνεπῶς διὰ τὴν συνθήκην μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α) Εἰς κλάδον ἀνήκοντα εἰς ἕνα μόνον βρόχον. Προφανῶς εἶναι ἡ σχέσις (12).

β) Εἰς κλάδον κοινὸν εἰς δύο βρόχους. Προφανῶς εἶναι ἡ σχέσις (14).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εἰς τὸ παράρτημα τοῦτο ἀναφέρονται 11 παρατηρήσεις, αἱ ὁποῖαι συμπληρώνουν τὸ κύριον κείμενον τῆς μελέτης.

Παρατήρησις 1.—Ὅταν εἰς κύκλωμα μετὰ διασταυρουμένων κλάδων, ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων γίνῃ ὡς καθορίζεται εἰς τὴν σελίδα 337 μὲ τὴν μόνην ἐξαίρεσιν, δύο οἱοιδήποτε βρόχοι (ἢ καὶ περισσότεροι) νὰ ἔχουν δύο ἢ περισσοτέρους κοινοὺς κλάδους, ἀντὶ ἑνός, ἡ κυρία ὁρίζουσα Δ τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος ἔχει πάλιν τὰς ἑπτὰ ἰδιότητας ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν σελίδα 338 μὲ τὰς ἀκολούθους δύο συμπληρώσεις:

α) Εἰς τὴν ἰδιότητα ς: Ἐὰν δύο τυχόντες βρόχοι ι καὶ κ ἔχουν δύο ἢ περισσοτέρους κοινοὺς κλάδους, τότε τὸ στοιχεῖον $Z_{\iota\varkappa}$, (ὅπερ δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς θετικῆς διαγωνίου), εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μιγαδικῶν ἀντιστάσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι κοιναὶ εἰς τοὺς βρόχους ι καὶ κ. Τυχὸν στοιχεῖον $Z_{\iota\varkappa}$ τῆς ὁριζούσης Δ μὴ εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς θετικῆς διαγωνίου ὀνομάζομεν ἁπλοῦν, ἐὰν ἀντιπροσωπεύῃ τὴν μιγαδικὴν ἀντίστασιν ἑνὸς κλάδου, ὁ ὁποῖος εἶναι κοινὸς εἰς τοὺς βρόχους ι καὶ κ, σύνθετον δέ, ἐὰν ἀντιπροσωπεύῃ τὸ ἄθροισμα τῶν μιγαδικῶν ἀντιστάσεων δύο ἢ περισσοτέρων κλάδων, οἱ ὁποῖοι εἶναι κοινοὶ εἰς τοὺς βρόχους τούτους. Προφανῶς, προσθετέοι τινὲς ἑνὸς συνθέτου στοιχείου τῆς ὁριζούσης Δ συχνάκις εἶναι ἁπλᾶ στοιχεῖα ἢ προσθετέοι ἄλλου συνθέτου στοιχείου αὐτῆς.

β) Εἰς τὴν ἰδιότητα ε: Ὅταν ἡ στήλη (συνεπῶς καὶ ἡ γραμμή, ἀφοῦ ἡ ὁρίζουσα εἶναι συμμετρική) ἔχει σύνθετα στοιχεῖα, τότε ἐκ τῶν συνθέτων στοιχείων εἰσέρχονται εἰς τὸ ἄθροισμα τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν ἰδιότητα ε (βλ. σελ. 339) μόνον ἐκεῖνοι οἱ προσθετέοι, οἱ ὁποῖοι δὲν ἐμφανίζονται ὡς ἁπλᾶ στοιχεῖα καὶ δὴ ἕκαστος τούτων ἅπαξ, ἔστω καὶ ἂν τυχὸν ἐμφανίζεται καὶ ὡς προσθετέος ἄλλου τινὸς στοιχείου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ εὑρίσκεται σύμφωνα μὲ τὰ ἀναφερθέντα εἰς τὸ κύριον μέρος τῆς παρούσης μελέτης.

Παρατήρησις 2. Ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις καθ' ἣν οἱ ἀνεξάρτητοι βρόχοι γραμμικοῦ κυκλώματος ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων ἐκλέγονται κατὰ τρόπον ὥστε δύο οἱοιδήποτε βρόχοι (ἢ καὶ περισσότεροι) νὰ ἔχουν δύο ἢ περισσοτέρους κοινοὺς κλάδους, ἕκαστος κλάδος νὰ ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον ἢ νὰ εἶναι κοινὸς εἰς δύο ἢ τρεῖς τὸ πολὺ βρόχους καὶ ὁ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον· ὁ δὲ χαρακτηρισμὸς τοῦ βρόχου, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸν κλάδον τῆς πηγῆς γίνεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 1. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἰσχύουν τὰ ἀναφερθέντα εἰς τὴν προηγουμένην παρατήρησιν, τόσον διὰ τὴν κατάστρωσιν τῆς κυρίας ὁριζούσης Δ, ὅσον καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς συνθήκης μηδενισμοῦ.

Παρατήρησις 3. Ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις καθ' ἣν οἱ ἀνεξάρτητοι βρόχοι γραμμικοῦ κυκλώματος μετὰ ἢ ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων ἐκλέγονται κατὰ τὸν ἑξῆς ἕνα μόνον περιορισμόν: ὁ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ μόνον εἰς ἕνα βρόχον· ὁ χαρακτηρισμὸς δὲ τοῦ βρόχου ὅστις περιλαμβάνει τὸν κλάδον τῆς πηγῆς γίνεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 1. Μὲ τὴν ἐκλογὴν ταύτην τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψουν κλάδοι, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς περισσοτέρους τῶν τριῶν βρόχων καὶ βρόχοι οἱ ὁποῖοι ἔχουν δύο ἢ περισσοτέρους κοινοὺς κλάδους (ἐνῷ μὲ τὴν καθορισθεῖσαν, εἰς τὸ κύριον μέρος τῆς μελέτης, σκόπιμον ἐκλογὴν τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων, τυχὸν κλάδος εἶναι κοινὸς εἰς δύο τὸ πολὺ βρόχους διὰ κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων ἢ εἰς τρεῖς τὸ πολὺ βρόχους διὰ κυκλώματα μετὰ διασταυρουμένων κλάδων· δύο δὲ τυχόντες βρόχοι ἔχουν ἕνα κοινὸν κλάδον ἢ οὐδένα). Ἡ κυρία ὁρίζουσα Δ τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος ἔχει πάλιν τὰς ἰδιότητας ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παρατήρησιν 1 μὲ τὴν ἑξῆς συμπλήρωσιν εἰς τὴν γ: Δι' ἕκαστον κλάδον κοινὸν εἰς περισσοτέρους τῶν τριῶν βρόχων, ἔστω εἰς π, τοὺς ι, κ, λ, $\cdots$ σ καὶ τ, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν κυρίαν ὁρίζουσαν Δ τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος, $2\Sigma_{\pi}^{2}$ (συνδυασμοὶ τῶν π ἀνὰ 2) στοιχεῖα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα.

Ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον Ζ κοινὸν εἰς π βρόχους, τοὺς ι, κ, λ $\cdots$, σ καὶ τ, εἶναι

$$I = \pm I_\iota \pm I_\varkappa \pm I_\lambda \cdots \pm I_\sigma \pm I_\tau \tag{17}$$

ἥτις σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (3) γίνεται

$$I = \frac{E}{\Delta}\Big[\pm(-1)^{1+\iota}\Delta_{1\iota} \pm(-1)^{1+\varkappa}\Delta_{1\varkappa} \pm(-1)^{1+\lambda}\Delta_{1\lambda} \cdots \pm(-1)^{1+\sigma}\Delta_{1\sigma} \pm(-1)^{1+\tau}\Delta_{1\tau}\Big] \tag{18}$$

ὁπόθεν προκύπτει

$$I = \frac{E}{\Delta}\sum\Big[\pm(-1)^{1+\varrho}\Delta_{1\varrho}\Big] \qquad \varrho = \iota, \varkappa, \lambda \cdots \sigma, \tau). \tag{19}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (19) προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον Z, ὅστις εἶναι κοινὸς εἰς π βρόχους, τοὺς ι, κ, λ ··· σ καὶ τ, εἶναι

$$\sum\Big[\pm(-1)^{1+\varrho}\Delta_{1\varrho}\Big] = 0 \qquad (\varrho = \iota, \varkappa, \lambda \cdots \sigma, \tau). \tag{20}$$

Ἡ σχέσις (20) δύναται νὰ λάβῃ καὶ ἄλλην μορφήν. Πράγματι, ἂν ἐκλέξωμεν ὡς θετικὴν φορὰν τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κλάδον τοῦτον τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος I_ι, ἡ σχέσις (18) γράφεται

$$I = \frac{E}{\Delta}\Big[(-1)^{1+\iota}\Delta_{1\iota} \pm(-1)^{1+\varkappa}\Delta_{1\varkappa} \pm(-1)^{1+\lambda}\Delta_{1\lambda} \cdots \pm(-1)^{1+\sigma}\Delta_{1\sigma} \pm(-1)^{1+\tau}\Delta_{1\tau}\Big] \tag{21}$$

ὁπόθεν προκύπτει

$$I = \mp(-1)^{\tau}\,\frac{E}{\Delta}\,\Delta_{1\tau}^{\iota\pm\tau/\varkappa\pm\tau/\lambda\pm\tau/\ldots/\sigma\pm\tau} \tag{22}$$

ὅπου εἰς τὴν ὁρίζουσαν $\Delta_{1\tau}^{\iota\pm\tau/\varkappa\pm\tau/\lambda\pm\tau/\ldots\sigma/\pm\tau}$ τῆς προηγουμένης σχέσεως, τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης τ προστίθενται ἢ ἀναλόγως ἀφαιροῦνται εἰς τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν στηλῶν ι, κ, λ ····· καὶ σ ἐφόσον τὸ ρεῦμα I_τ εἶναι ἀντίρροποπον ἢ ὁμόρρόπον πρὸς ἕκαστον τῶν ρευμάτων I_ι, $I_\varkappa$, I_λ, ···· καὶ I_σ.

Ἐκ τῆς σχέσεως (22) προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸ κλάδον Z, ὅστις εἶναι κοινὸς εἰς π βρόχους, τοὺς ι, κ, λ ··· σ καὶ τ, εἶναι

$$\Delta_{1\tau}^{\iota\pm\tau/\varkappa\pm\tau/\lambda\pm\tau\ldots/\sigma\pm\tau} = 0 \tag{23}$$

ἢ ἀφοῦ ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι συμμετρικὴ

$$\Delta_{\iota\pm\tau/\varkappa\pm\tau/\lambda\pm\tau\ldots/\sigma\pm\tau/\tau 1} = 0. \tag{23α}$$

Παρατήρησις 4. Ἂν εἰς τὸν βρόχον, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸν κλάδον τῆς πηγῆς, δὲν δώσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1 ἀλλὰ τυχόντα ἀριθμὸν α, τότε προφανὲς ὅτι αἱ σχέσεις (12), (13), (14), (15) καὶ (16) εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων ἔγινε κατὰ τὸν καθορισθέντα σκόπιμον τρόπον (βλ. σελ. 337) γίνονται κατὰ σειρὰν

$$\Delta_{\alpha\iota} = 0 \tag{12β}$$

$$\Delta_{\alpha\iota}^{\varkappa-\iota} = 0 \tag{13β}$$

$$\Delta_{\alpha\iota}^{\varkappa+\iota}=0 \tag{14β}$$

$$\Delta_{\alpha\lambda}^{\iota-\lambda/\varkappa-\lambda}=0 \tag{15β}$$

$$\Delta_{\alpha\lambda}^{\iota+\lambda/\varkappa+\lambda}=0\,. \tag{16β}$$

Ἀντιστοίχως μεταβάλλονται καὶ αἱ σχέσεις ποὺ προκύπτουν ἐκ τῆς κυρίας ὁριζούσης Δ τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος. Ἡ μεταβολὴ τῶν ἐν λόγῳ σχέσεων συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ὁ δείκτης 1 τῶν ἐλασσόνων τῆς κυρίας ὁριζούσης Δ, ὁ ἀναφερόμενος εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν (ἢ ἀναλόγως στήλην) τῆς Δ, λαμβάνει τὸν ἀριθμὸν τοῦ βρόχου, εἰς τὸν ὁποῖον παρεμβάλλεται ἡ πηγὴ ἤτοι τὸν ἀριθμὸν α.

Παρατήρησις 5. Ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ ἀνεξάρτητοι βρόχοι τυχόντος γραμμικοῦ κυκλώματος ἐκλέγονται κατὰ τυχόντα τρόπον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψουν κλάδοι, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς περισσοτέρους τῶν τριῶν βρόχων καὶ βρόχοι οἱ ὁποῖοι ἔχουν δύο ἢ περισσοτέρους κοινοὺς κλάδους· προσέτι δὲ ὁ κλάδος τῆς πηγῆς ν' ἀνήκῃ εἰς πολλοὺς βρόχους. Ἡ κυρία ὁρίζουσα Δ ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν προηγουμένην παρατήρησιν. Ἡ ἔντασις ρεύματος I εἰς τυχόντα κλάδον Z κοινὸν εἰς π βρόχους, ι, κ, λ καὶ .... σ καὶ τ, ὅταν ὁ κλάδος τῆς πηγῆς εἶναι κοινὸς εἰς υ βρόχους, τοὺς α, β, γ ... η καὶ ϑ εἶναι

$$I=\pm I_\iota \pm I_\varkappa \pm I_\lambda \cdots \pm I_\sigma \pm I_\tau \tag{24}$$

ἀλλὰ

$$I_\iota=\frac{E}{\Delta}\sum_{\varphi}[\pm(-1)^{\varphi+\iota}\Delta_{\varphi\iota}] \quad (\varphi=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots.\ \eta,\ \vartheta) \tag{25}$$

ἑπομένως

$$I=\frac{E}{\Delta}\left\{\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\iota}\Delta_{\varphi\iota}\right]\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\lambda}\Delta_{\varphi\lambda}\right]\ldots\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\sigma}\Delta_{\varphi\sigma}\right]\pm\right.$$

$$\left.\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\tau}\Delta_{\varphi\tau}\right]\right\}=0 \qquad (\varphi=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots.\ \eta,\ \vartheta) \tag{26}$$

ὁπόθεν προκύπτει

$$I=\frac{E}{\Delta}\sum_{\varrho}\left\{\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\varrho}\Delta_{\varphi\varrho}\right]\right\} \quad (\varphi=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots\ \eta,\ \vartheta\ \text{καὶ}\ \varrho=\iota,\ \varkappa,\ \lambda\ \ldots\ \sigma,\ \tau). \tag{27}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (27) προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον Z, ὅστις εἶναι κοινὸς εἰς π βρόχους, τοὺς ι, κ, λ .... σ καὶ τ, ὅταν ὁ κλάδος τῆς πηγῆς εἶναι κοινὸς εἰς υ βρόχους, τοὺς α, β, γ .... η καὶ ϑ, εἶναι

$$\sum_{\varrho}\left\{\pm\sum_{\varphi}\left[\pm(-1)^{\varphi+\varrho}\Delta_{\varphi\varrho}\right]\right\}=0 \quad (\varphi=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \ldots\ \eta,\ \vartheta\ \text{καὶ}\ \varrho=\iota,\ \varkappa,\ \lambda\ \ldots.\ \sigma,\tau). \tag{28}$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ γενικὴ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τυχόντα κλάδον τυχόντος γραμμικοῦ κυκλώματος μὲ τυχοῦσαν ἐκλογὴν τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων του εἰς δύο κόμβους τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις.

Παρατήρησις 6. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ δι' ἑκάστην περίπτωσιν εὑρεθεῖσα γενικὴ συνθήκη μηδενισμοῦ ἰσχύει, καὶ διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τροφοδοτοῦσα τὸ κύκλωμα τάσις Ε εἶναι συνεχής, ἀντὶ τῆς ὑποτεθείσης ἡμιτονοειδοῦς.

Παρατήρησις 7. Αἱ ὑπ' ἀριθ. 1 ἕως 5 παρατηρήσεις δὲν παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον εἰς τὴν πρᾶξιν, διότι εἰς οἱονδήποτε γραμμικὸν κύκλωμα ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων δύναται νὰ γίνῃ σύμφωνα μὲ τὸν καθορισθέντα τρόπον εἰς σελ. 337, ὁπότε δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ μία τῶν σχέσεων (12), (13), (14), (15) ἢ (16). Ἐπὶ πλέον καὶ αἱ σχέσεις (12), (13), (15) καὶ (16) δὲν εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὑπ' ὄψιν συνθήκης μηδενισμοῦ, διότι δυνάμεθα εἰς κάθε περίπτωσιν νὰ ἐκλέξωμεν τοὺς ἀνεξαρτήτους βρόχους, οὕτως ὥστε ὁ κλάδος διὰ τὸν ὁποῖον ζητεῖται ὁ μηδενισμὸς τοῦ ρεύματος νὰ ἀνήκῃ εἰς δύο βρόχους τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα εἶναι ἀντίρροπα, ὁπότε δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν σχέσιν (14).

Παρατήρησις 8. Γνωρίζομεν ἐκ πείρας ὅτι ὑπάρχουν περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ὁ μηδενισμὸς τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἴς τινα κλάδον κυκλώματος εἶναι ἀδύνατος. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ὁ μηδενισμὸς τῆς ὁριζούσης ἥτις εἶναι τὸ πρῶτον μέρος οἱασδήποτε τῶν σχέσεων (12), (13), (14), (15) καὶ (16) εἶναι ἐπίσης ἀδύνατος.

Παρατήρησις 9. Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον ΓΔ γραμμικοῦ κυκλώματος, ὅταν εἰς τὸν ἐπίσης τυχόντα κλάδον αὐτοῦ ΑΒ παρεμβληθῇ συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις Ε, ὅταν ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων τοῦ κυκλώματος γίνῃ κατὰ τρόπον ὥστε ὁ κλάδος ΓΔ νὰ ἀνήκῃ εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ I_κ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ἀντίρροπα, ὁ δὲ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον καὶ δὴ τὸν 1, δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως (7).

Ἐὰν ἤδη παρεμβάλωμεν τὴν αὐτὴν τάσιν Ε εἰς τὸν κλάδον ΓΔ τοῦ αὐτοῦ, κυκλώματος, ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τὸν κλάδον ΑΒ, σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (27) εἶναι

$$I_1 = \frac{E}{\Delta}\Big[(-1)^{1+\iota}\Delta_{\iota 1} - (-1)^{1+\kappa}\Delta_{\kappa 1}\Big] \qquad (29)$$

ἀφοῦ τώρα ὁ κλάδος ΓΔ τῆς πηγῆς ἀνήκῃ εἰς δύο βρόχους, τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα εἶναι ἀντίρροπα, ὁ δὲ κλάδος ΑΒ, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ἔντασιν εἰς ἕνα μόνον βρόχον καὶ δὴ τὸν 1. Ἐπειδὴ ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι συμμετρικὴ ἡ σχέσις (29) γράφεται

$$I_1 = \frac{E}{\Delta}\left[(-1)^{1+\iota}\Delta_{1\iota} - (-1)^{1+\varkappa}\Delta_{1\varkappa}\right] \tag{30}$$

ὁπόθεν

$$I_1 = (-1)^{1+\iota}\frac{E}{\Delta}\Delta_{1\iota}^{\varkappa+\iota}. \tag{31}$$

Ἀπεδείξαμεν δηλαδὴ τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: Τυχοῦσα τάσις, παρεμβαλλομένη εἰς τυχόντα κλάδον ΑΒ τυχόντος γραμμικοῦ κυκλώματος, προκαλεῖ εἰς τυχόντα κλάδον ΓΔ, τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἣν θὰ προεκάλει εἰς τὸν κλάδον ΑΒ ἡ αὐτὴ τάσις παρεμβαλλομένη εἰς τὸν κλάδον ΓΔ.

Παρατήρησις 10. Ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον ΓΔ γραμμικοῦ κυκλώματος, ὅταν εἰς τὸν ἐπίσης τυχόντα κλάδον αὐτοῦ ΑΒ παρεμβληθῇ τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις, τοῦ ὁποίου ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων ἐγένετο κατὰ τρόπον ὥστε ὁ κλάδος τῆς πηγῆς νὰ ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον καὶ δὴ τὸν 1, ὁ ὑπ' ὄψιν κλάδος ΓΔ νὰ εἶναι κοινὸς εἰς δύο βρόχους καὶ δὴ τοὺς ι καὶ κ, τῶν ὁποίων τὰ βασικὰ ρεύματα I_ι καὶ $I_\varkappa$ εἰς τὸν κλάδον τοῦτον εἶναι ἀντίρροπα, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως (14). Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς σχέσεως (31) προκύπτει ὅτι ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν κλάδον ΑΒ τοῦ αὐτοῦ κυκλώματος, ὅταν τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις παρεμβληθῇ εἰς τὸν κλάδον ΓΔ, εἶναι, πάλιν ἡ σχέσις (14).

Ἀπεδείξαμεν δηλαδὴ τὸ ἀκόλουθον θεώρημα: Ἡ συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν τυχόντα κλάδον ΓΔ γραμμικοῦ κυκλώματος, ὅταν εἰς τὸν ἐπίσης τυχόντα κλάδον αὐτοῦ ΑΒ παρεβληθῇ τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν συνθήκην μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν κλάδον ΑΒ, ὅταν τυχοῦσα συνεχὴς ἢ ἡμιτονοειδὴς τάσις παρεμβληθῇ εἰς τὸν κλάδον ΓΔ.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει τὸ ἀκόλουθον πόρισμα: Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας οἱασδήποτε γεφύρας μηδενισμοῦ παραμένει ἀναλλοίωτος, ὅταν γίνῃ ἀμοιβαία ἐναλλαγὴ τοῦ ρευματοσκοπίου καὶ τῆς πηγῆς.

Παρατήρησις 11. Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας προσοχῆς ὅτι εἰς κυκλώματα ἐναλλασσομένου ρεύματος, ἡ κυρία ὁρίζουσα Δ ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ διατυπωθεῖσα συνθήκη μηδενισμοῦ δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὸν μηδενισμὸν τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν κλάδον εἰς ὅν ἀναφέρεται. Π.χ. ἡ κυρία ὁρίζουσα τῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος τῆς γεφύρας τοῦ Wheatstone εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἕκαστος τῶν δύο ἀπέναντι κλάδων αὐτῆς Z_1 καὶ Z_4 περιέχει αὐταπαγωγὴν L, ἕκαστος δὲ τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι κλάδων της, Z_2 καὶ Z_4 χωρητικότητα C καὶ ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι ἴση πρὸς $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸν κλάδον τοῦ ρευματοσκοπίου δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδὲν ἀλλ' ἔχει τιμὴν

$$\frac{jE\omega L}{Z_\varrho Z_\pi + \omega^2 L^2}$$

ὅπου Z_ϱ ἡ μιγαδικὴ ἀντίστασις τοῦ κλάδου τοῦ ρευματοσκοπίου καὶ Z_π ἡ μιγαδικὴ ἀντίστασις τοῦ κλάδου τῆς πηγῆς, μολονότι ἰσχύει ἡ σχέσις $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, ἥτις εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μηδενισμοῦ τῆς ἐντάσεως ρεύματος εἰς τὸν κλάδον τοῦτον, ὅταν ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ διατυπωθεῖσα δηλαδὴ γενικὴ συνθήκη μηδενισμοῦ εἶναι ἐπαρκής, ἐφ' ὅσον Δ διάφορος τοῦ μηδενός.

Σημείωσις: Αἱ παρατηρήσεις 4,6 καὶ 8 ἀναφέρονται καὶ εἰς τὴν διδακτορικήν μου διατριβὴν διὰ κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων.