L'étude chimique présente une communication préliminaire d'une travail detaillé dont les résultats analytiques seront publiés prochainement. De plus les semmences et les fleurs de tous les espèces du colchique grec seront l'objet d'une autre communication.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. – Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη**.** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Α΄. Εἰς τὸ τρίτον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «κύκλου μέτρησις», ὁ Ἀρχιμήδης διὰ ν' ἀποδείξῃ ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον παντὸς κύκλου εἶναι μικρότερος μὲν τοῦ $3\frac{1}{7}$, μεγαλύτερος δὲ τοῦ $3\frac{10}{71}$, χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Ἡ σχέσις αὕτη στηρίζεται εἰς τὰς ἀκεραίας λύσεις τῶν δύο διοφαντικῶν ἐξισώσεων $y^2 = 3x^2 - 2$ καὶ $y^2 = 3x^2 + 1$, τὰς ὁποίας ὁ Ἀρχιμήδης χρησιμοποιεῖ εἰς τὸ αὐτὸ θεώρημα ἐπίσης ἄνευ ἀποδείξεως.

Τινὲς ἐκ τῶν ἑρμηνευτῶν τῶν πραγματειῶν τοῦ Ἀρχιμήδους, φρονοῦσιν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις εἶναι ἐπινόησις τοῦ Συρακοσίου σοφοῦ. Τοῦτο δὲν φαίνεται πιθανόν· διότι ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σῳζομένων ἔργων του, ὁσάκις χρησιμοποιεῖ εἰς τὰς ἐρεύνας αὐτοῦ μαθηματικὰς προτάσεις ἀποδειχθείσας ὑπ' ἄλλων χρησιμοποιεῖ αὐτὰς ἄνευ ἀποδείξεως.

Τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι αἱ ἀνωτέρω μαθηματικαὶ προτάσεις ἦσαν γνωσταὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους καὶ δὴ καὶ εἰς τὸν Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον. Ἔνδειξίς τις ἀφορῶσα εἰς τὸν τελευταῖον τοῦτον ἰσχυρισμὸν δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ μαθηματικὸν χωρίον τοῦ Θεαιτήτου τοῦ Πλάτωνος (147D – 148B).

Κατὰ τοὺς τελευταίους δύο αἰῶνας ἐγένοντο πολλαὶ προσπάθειαι ἀποδείξεως τῶν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους χρησιμοποιουμένων ἀναποδείκτως προτάσεων τούτων. Ὁ T. Heath[1], γράφει, δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι ἡ ὀρθοτέρα ἑρμηνεία τῶν ἀνωτέρω προτάσεων ἐγένετο ὑπὸ τῶν Hultsch - Hunrath διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως:

$$\alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha} > \sqrt{\alpha^2 \pm \beta} > \alpha \pm \frac{\beta}{2\alpha \pm 1},$$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Geometrischer Beweis der archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$.**

[1] Archimedes Werke (Deutsch von F. Kliem, S. 72, Verlag O. Häring, Berlin 1914).

ἔνθα $\alpha^2 \pm \beta$ ἀκέραιος μὴ τετράγωνος καὶ α^2 ὁ ἐγγὺς πρὸς τοῦτον τετράγωνος (ἀναλόγως τῆς ἑκάστοτε περιπτώσεως μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ). Ἐκτὸς τῆς μεθόδου Hultsch-Hunrath μνημονεύονται ὑπὸ τοῦ Heath καὶ αἱ ἑξῆς: De Lagny, Zeuthen, Tannery, Heilermann, Rodet. Ἐπὶ πλέον ἀναφέρονται ἐπίσης ὡς ἑρμηνευταὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ οἱ Hauber, Buzengeiger, Radicke, Pessl, Oppermann, Alexejeff, Schönborn[1].

Κατωτέρω παραθέτομεν ἐν περιλήψει τὴν μέθοδον Heilermann, διότι αὕτη στηριζομένη εἰς τοὺς ἐκ τετραγώνων σχημάτων πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς παρουσιάζει συγγένειάν τινα πρὸς τὴν ἡμετέραν μέθοδον. Κατὰ τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον[2] οἱ πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\multicolumn{3}{c}{\text{Πλευρικοὶ ἀριθμοί}} & \multicolumn{3}{c}{\text{Διαμετρικοὶ ἀριθμοί}} \\
S_1 & = & S_o + D_o & D_1 & = & 2S_o + D_o \\
S_2 & = & S_1 + D_1 & D_2 & = & 2S_1 + D_1 \\
S_3 & = & S_2 + D_2 & D_3 & = & 2S_2 + D_2 \\
\cdot & & & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & & \\
S_n & = & S_{n-1} + D_{n-1} & D_n & = & 2S_{n-1} + D_{n-1}
\end{array}
$$

Ἐὰν $S_o = 1$ καὶ $D_o = 1$, οἱ λόγοι D_n/S_n ὁδηγοῦσιν εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{2}$.

Ὁ Heilermann ἀντὶ τοῦ 2 εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις θέτει τυχόντα ἀριθμὸν α (μὴ τετράγωνον) καὶ λαμβάνει τὸ ἑπόμενον σχῆμα:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\multicolumn{3}{c}{\text{Πλευρικοὶ ἀριθμοί}} & \multicolumn{3}{c}{\text{Διαμετρικοὶ ἀριθμοί}} \\
S_1 & = & S_o + D_o & D_1 & = & \alpha S_o + D_o \\
S_2 & = & S_1 + D_1 & D_2 & = & \alpha S_1 + D_1 \\
S_3 & = & S_2 + D_2 & D_3 & = & \alpha S_2 + D_2 \\
\cdot & & & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & & \\
S_n & = & S_{n-1} + D_{n-1} & D_n & = & \alpha S_{n-1} + D_{n-1}
\end{array}
$$

Οἱ λόγοι D_n/S_n ἐκφράζουσι κατὰ προσέγγισιν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $\sqrt{\alpha}$. Οὕτως, ἐὰν θέσωμεν $\alpha = 3$, $S_o = 1$, $D_o = 2$, λαμβάνομεν τοὺς λόγους,

[1] Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwicklungsmethoden, Leipzig 1882, von Sigmund Günther.

[2] Theonis Smyrnaei, Philosophi Platonici, (ἔκδ. E. Hiller, σ. 43 κ.ἑ., Leipzig 1878) καὶ Ε. ΣΤΑΜΑΤΗ, ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8 κ. ἑ., *Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων*, Ἀθῆναι 1953.

$$\frac{D_0}{S_0}=\frac{2}{1},\ \frac{D_1}{S_1}=\frac{5}{3},\ \frac{D_2}{S_2}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4},\ \frac{D_3}{S_3}=\frac{19}{11},\ \frac{D_4}{S_4}=\frac{52}{30}=\frac{26}{15},\ \frac{D_5}{S_5}=\frac{71}{41},$$

$$\frac{D_6}{S_6}=\frac{194}{112}=\frac{97}{56},\ \frac{D_7}{S_7}=\frac{265}{153},\ \frac{D_8}{S_8}=\frac{362}{209},\ \frac{D_9}{S_9}=\frac{989}{571},\ \frac{D_{10}}{S_{10}}=\frac{1351}{780}\ \text{κλπ.}$$

Οἱ περιττῆς τάξεως λόγοι ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα, ἐνῷ οἱ ἀρτίας τάξεως ἀποτελοῦσιν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα. Τοῦτο εἶναι κοινὸν καὶ διὰ τὰς δύο ἀκολουθίας, ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι εἶναι:

$$\frac{2}{1} > \frac{7}{4} > \frac{26}{15} > \frac{97}{56} > \frac{362}{209} > \frac{1351}{780} \cdots > \sqrt{3} \cdots > \frac{989}{571} > \frac{265}{153} > \frac{71}{41} > \frac{19}{11} > \frac{5}{3}.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ὁδηγεῖ, ὡς ἀποδεικνύει ὁ Heilermann, ταχύτερον πρὸς τὰ ἐμπρός, ἐὰν χρησιμοποιηθῇ οὐ μόνον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\sqrt{\alpha}$, ἀλλὰ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς $\beta\sqrt{\alpha}$, ἔνθα ὁ β ἐκλέγεται οὕτω πως, ὥστε τὸ $\beta^2\alpha$ (ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ α) νὰ κεῖται ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον πρὸς τὴν μονάδα. Ὅθεν ἐὰν θέσωμεν $\alpha=\frac{27}{25}$, ὥστε $\sqrt{\alpha}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$ ἔχομεν (ἐὰν τεθῇ $D_0=S_0=1$)

$$S_1=2,\ D_1=\frac{52}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\ \ \frac{5}{3}\cdot\frac{26}{25}\ \text{ἢ}\ \frac{26}{15}$$

$$S_2=\frac{102}{25},\ D_2=\frac{54+52}{25}=\frac{106}{25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\ \ \frac{5}{3}\cdot\frac{106}{25}\ \text{ἢ}\ \frac{265}{153}$$

$$S_3=\frac{208}{25},\ D_3=\frac{102\cdot 27}{25\cdot 25}+\frac{106}{25}=\frac{5404}{25\cdot 25},\ \text{καὶ}\ \sqrt{3}\ \ \frac{5404}{25\cdot 208}\cdot\frac{5}{3}\ \text{ἢ}\ \frac{1351}{780},\ \text{κλπ.}$$

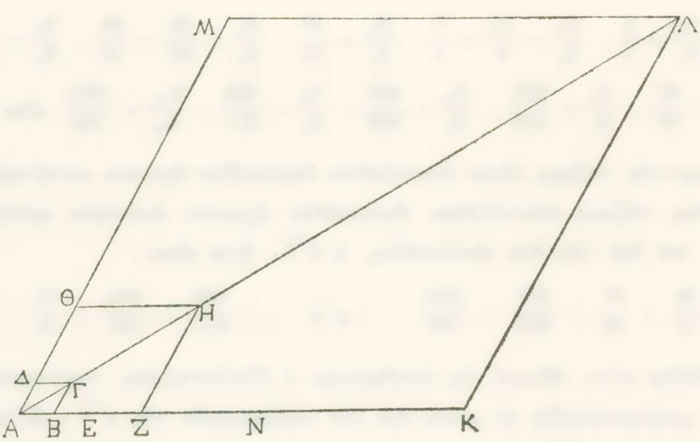
Β΄. Ἡ παρ᾽ ἡμῶν ἀνακοινουμένη κατωτέρω μέθοδος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$ καὶ ἐπιλύσεως τῶν μνημονευθεισῶν δύο διαφαντικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται εἰς τοὺς πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς προκύπτοντας ἐκ τῆς θεωρήσεως ὁμοίων ρόμβων ἐχόντων τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 1), τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου. Κατὰ τὸ 12ον θεώρημα τοῦ II Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου εἶναι $ΑΓ^2=3ΑΒ^2$, ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ ΑΓ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρά, δηλαδὴ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος, τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ.

Συνεπῶς $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}=\sqrt{3}$.

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΕΖ=ΑΓ, ὥστε ΑΖ=2ΑΒ+ΕΖ.

Κατὰ τὸ 10ον θεώρημα τοῦ II Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου (τὸ ὁποῖον



Σχ. 1.

μνημονεύει ὁ Πρόκλος διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν[1]) θὰ ἔχωμεν:

$$AZ^2 + EZ^2 = 2AB^2 + 2BZ^2.$$

Ἐπειδὴ $$BZ = BE + EZ$$

θὰ εἶναι $$AZ^2 + EZ^2 = 2AB^2 + 2(BE + EZ)^2$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ EZ^2 λαμβάνομεν

$$AZ^2 = 2AB^2 + 2BE^2 + EZ^2 + 4BE \times EZ.$$

Καὶ ἐπειδὴ $$BE = AB \text{ καὶ } EZ = A\Gamma$$

θὰ ἔχωμεν $$AZ^2 = 4AB^2 + A\Gamma^2 + 4AB \times A\Gamma.$$

Ἄρα καὶ $$3AZ^2 = 12AB^2 + 3A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma.$$

Ἀλλὰ $$A\Gamma^2 = 3AB^2.$$

Ὅθεν εἶναι $$3AZ^2 = 9AB^2 + 4A\Gamma^2 + 12AB \times A\Gamma = (3AB + 2A\Gamma)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AZ = 2AB + EZ = 2AB + A\Gamma$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AB + 2A\Gamma$ εἶναι διαγώνιος ρόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου. Σχηματίζομεν τὸν ρόμβον τοῦτον, τὸν $AZH\Theta$ ἔνθα $AH = 3AB + 2A\Gamma$ καὶ $AH^2 = 3AZ^2$. Ἐὰν καλέσωμεν $AB = \alpha$ καὶ $A\Gamma = \delta$ θὰ ἔχωμεν $AZ = 2\alpha + \delta$, (1) καὶ $AH = 3\alpha + 2\delta$, (2).

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AZ λαμβάνομεν τμῆμα $ZN = AZ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ZN λαμβάνομεν τμῆμα $NK = AH$, ὥστε $AK = 2AZ + NK$.

[1] Σχόλια εἰς Πολιτείαν Πλάτωνος, τόμ. II, σ. 24 καὶ 393. ὑπὸ Hultsch, ἐκδ. Kroll, *Teubner*. Καὶ PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclid, σ. 438, Paris 1950, *(Soc. d'édition Les Belles Lettres)*.

Πάλιν κατὰ τὸ $10^{ον}$ θεώρημα τοῦ II τῶν Στοιχείων θὰ ἔχωμεν

$$AK^2 + NK^2 = 2AZ^2 + 2ZK^2.$$

Ἐπειδὴ $ZK = ZN + NK$ θὰ εἶναι

$$AK^2 + NK^2 = 2AZ^2 + 2(ZN + NK)^2.$$

Δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τοῦ NK^2 λαμβάνομεν

$$AK^2 = 2AZ^2 + 2ZN^2 + NK^2 + 4ZN \times NK.$$

Καὶ ἐπειδὴ $ZN = AZ$ καὶ $NK = AH$, θὰ ἔχωμεν

$$AK^2 = 4AZ^2 + AH^2 + 4AZ \times AH.$$

Ἄρα καὶ $\quad 3AK^2 = 12AZ^2 + 3AH^2 + 12AZ \times AH.$

Ἀλλὰ $AH^2 = 3AZ^2$. Ὅθεν εἶναι

$$3AK^2 = 9AZ^2 + 4AH^2 + 12AZ \times AH = (3AZ + 2AH)^2.$$

Ἡ σχέσις ὅμως αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ μὲν $AK = 2AZ + NK = 2AZ + AH$ εἶναι πλευρά, ἡ δὲ $3AZ + 2AH$ εἶναι διαγώνιος ρόμβου ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ἰσοπλεύρου τριγώνου· Σχηματίζομεν τὸν ρόμβον τοῦτον, τὸν ΑΚΛΜ ἔνθα $AΛ = 3AZ + 2AH$ καὶ $AΛ^2 = 3AK^2$. Ἐὰν εἰς τὰς ΑΚ καὶ ΑΛ ἀντικαταστήσωμεν τὰς ΑΖ, ΑΗ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$AΛ = 12\alpha + 7\delta \text{ καὶ } AK = 7\alpha + 4\delta.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι προφανὴς ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐκ ρόμβων ὅμως καὶ ὄχι ἐκ τετραγώνων

Κατὰ τοῦτον θὰ ἔχωμεν,

Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ					Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ				
		α					δ		
α_1	=	2α	+	δ	δ_1	=	3α	+	2δ
α_2	=	7α	+	4δ	δ_2	=	12α	+	7δ
α_3	=	26α	+	15δ	δ_3	=	45α	+	26δ
α_4	=	97α	+	56δ	δ_4	=	168α	+	97δ
α_5	=	362α	+	209δ	δ_5	=	627α	+	362δ

Ἢ

α_1					δ_1				
α_2	=	$2\alpha_1$	+	δ_1	δ_2	=	$3\alpha_1$	+	$2\delta_1$
α_3	=	$2\alpha_2$	+	δ_2	δ_3	=	$3\alpha_2$	+	$2\delta_2$
α_4	=	$2\alpha_3$	+	δ_3	δ_4	=	$3\alpha_3$	+	$2\delta_3$

$$\alpha_5 = 2\alpha_4 + \delta_4 \qquad \delta_5 = 3\alpha_4 + 2\delta_4$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} \qquad \delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 1$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{19}{11}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{71}{41}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{265}{153} \quad \text{κλπ.}$$

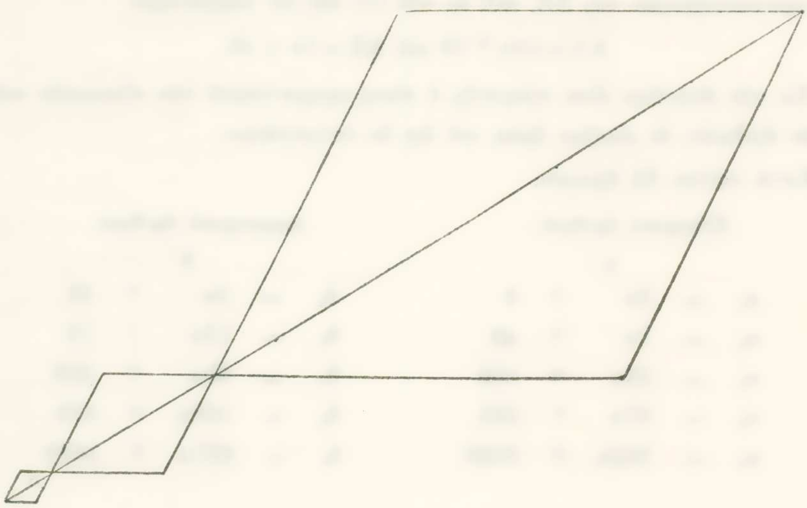
Ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1 = 1$ καὶ $\delta_1 = 2$ καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{26}{15}, \quad \frac{\delta_4}{\alpha_4} = \frac{97}{56}, \quad \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{362}{208}, \quad \frac{\delta_6}{\sigma_6} = \frac{1351}{780} \quad \text{κλπ.}$$

Ἤτοι εἶναι

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \cdots \sqrt{3} \cdots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}$$

Αἱ τιμαὶ δ_ν, α_ν, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 - 2$, ἐν ᾧ αὗται, ἐὰν τεθῇ $\delta_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$, παρέχουσι τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως $y^2 = 3x^2 + 1$.



Σχ. 2.

[Σημ. Εἰς τὸ σχ. 2, οἱ ρόμβοι ἐσχεδιάσθησαν κεχωρισμένως].

ZUSAMMENFASSUNG

Archimedes benutzt in seiner «Kreismessung» ohne eine Erklärung dafür anzugeben, die Beziehungen

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

und $$265^2 = 3.153^2 - 2, \qquad 1351^2 = 3.780^2 + 1.$$

E. Stamatis teilt, auf Grund der Theorie der Seiten- und Diagonalzahlen, wie sie uns von Theon von Smyrna und Proklos überliefert ist, einen geometrischen Beweis dieser Beziehungen mit.

Es sei ein Rhombus ΑΒΓΔ (Fig. 1) gegeben, dessen grösserer Winkel gleich einem äusseren Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist, $AB = \alpha_1$ die Seite, $A\Gamma = \delta_1$ die grössere Diagonale des Rhombus.

Nach Euklid II, 12 ist $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$, und $\delta_1 : \alpha_1 = \sqrt{3}$. Auf die Verlängerung von AB tragen wir eine Strecke $BE = AB = \alpha_1$ und $EZ = A\Gamma = \delta_1$ ab. Dann ist nach Euklid II, 10 (was Proklos für die Seiten- und Diagonalzahlen erwähnt) $(2\alpha_1 + \delta_1)^2 + \delta_1^2 = 2\alpha_1^2 + 2(\alpha_1 + \delta_1)^2$.

Aus dieser

$$(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\delta_1 + \delta_1^2.$$

Es gilt aber auch $3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 3\delta_1^2$, und weil $\delta_1^2 = 3\alpha_1^2$ ist, so haben wir

$$3(2\alpha_1 + \delta_1)^2 = 9\alpha_1^2 + 12\alpha_1\delta_1 + 4\delta_1^2 = (3\alpha_1 + 2\alpha_1)^2.$$

Diese Beziehung drückt die Tatsache aus, dass $(2\alpha_1 + \delta_1)$ die Seite, $(3\alpha_1 + 2\delta_1)$ die grössere Diagonale eines ähnlichen, wie der gegebene Rhombus ΑΒΓΔ ist. Das Verfahren lässt sich unendlich wiederholen.

Folglich ergeben sich die entsprechenden Seiten- und Diagonalzahlen:

	Seitenzahlen	Diagonalzahlen
1. Rhombus	α_1	δ_1
2. »	$\alpha_2 = 2\alpha_1 + \delta_1$	$\delta_2 = 3\alpha_1 + 2\delta_1$
3. »	$\alpha_3 = 2\alpha_2 + \delta_2$	$\delta_3 = 3\alpha_2 + 2\delta_2$
4. »	$\alpha_4 = 2\alpha_3 + \delta_3$	$\delta_4 = 3\alpha_3 + 2\delta_3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
ν. »	$\alpha_\nu = 2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$	$\delta_\nu = 3\alpha_{\nu-1} + 2\delta_{\nu-1}$.

1. Setzen wir $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die steigende Folge

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \cdots \sqrt{3},$$

und $$265^2 = 3.153^2 - 2.$$

2. Setzen wir $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = 2$ und bilden die Quotienten $\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu}$, so bekommen wir die fallende Folge

$$\sqrt{3}\cdots < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1},$$

und $1351^2 = 3.780^2 + 1$. Wir haben also, auf Grund der von Theon von Smyrna und Proklos überlieferten Methode, die Beziehungen die Archimedes, ohne Erklärung, als bekannt, angibt.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ.— **Συμβολὴ εἰς τὴν ἔρευναν τῆς γεωμετρικῆς ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων**, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** * Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Εἰς τὸν ἴδιον τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται κατὰ τὴν παράδοσιν ἡ ἀπόδειξις τοῦ περιφήμου ὁμωνύμου θεωρήματος (Εὐκλείδου I, 47), ὡρισμέναι ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2 = x^2 + y^2$ καὶ ἡ ἀνακάλυψις τῶν ἀσυμμέτρων [1]. Εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἐν γένει ἀποδίδεται μεταξὺ ἄλλων τὸ II Βιβλίον καὶ τὸ πλεῖστον τῶν ἀριθμητικῶν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, καὶ ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $y^2 = 2x^2 \mp 1$, (1), αἵτινες χρησιμεύουσι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κατὰ προσέγγισιν ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς $\sqrt{2}$. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) ὀνομάζονται, ὡς γνωστόν, πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοί, διότι οἱ μὲν ἐκ τούτων ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς πλευράς, οἱ δὲ εἰς τὰς διαγωνίους τετραγώνων [2].

Ὁ νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν διεσώθη ὑπὸ τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου καὶ ἔχει ὡς κάτωθι:

	Πλευρικοὶ ἀριθμοὶ	Διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ
1.	1	1
2.	$1 + 1 = 2$	$2 \cdot 2 + 1 = 3$
3.	$2 + 3 = 5$	$2 \cdot 2 + 3 = 7$

---

* EVANGELOS STAMATIS, **A contribution to the investigation of the geometrical algebra of the Pythagoreans.**

[1] ΜΙΧΑΗΛ ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 55-65 καὶ 102-3, Ἀθῆναι 1938.— Πρόκλος εἰς σχόλια Εὐκλείδου I, σ. 65 καὶ 438. Ἔκδ. Friedlein, Teubner. — Ἰαμβλίχου V. P. 246, ἔκδ. L. Deubner, Teubner.

[2] Theonis Smyrnaei, Philosophi Platoniki, ἔκδ. E. Hiller, σ. 43, Teubner. E. ΣΤΑΜΑΤΗ, Εὐκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία ἀριθμῶν, τόμ. II, σ. 8, (*Ὀργ. Ἐκδ. Σχολικῶν Βιβλίων*, 1953 Ἀθῆναι). — PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide. p 438, Paris 1950.— (*Soc. d'éd. Les Belles Lettres*). M. CANTOR Vorlesungen über Geschichte der Mathematik u. Theon von Smyrna.— T. HEATH A history of Greek mathematics I, p. 91, Oxford 1921 at the Clarendon Press. — R. MORIS COHEN and J. E. DRABKIN, A source book in Greek science, p. 43, McGraw-Hill book company inc. New York, Toronto, London, 1984.