ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 28ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1998

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΑΓΑΠΗΤΟΥ Γ. ΤΣΟΠΑΝΑΚΗ

DIFFERENTIALGEOMETRIE.—**Bestimmung von M-Strahlensystemen durch die Mittenhüllfläche und eine Krümmung**, vom korr. Mitglied *N. K. Stephanidis**.

Zusammenfassung. Es sei $\overrightarrow{OM} = M(u,\upsilon)$ eine reguläre Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Die Funktion $M(u,\upsilon)$ sei in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der (u, υ)-Ebene erklärt und dort von der Differenzierbarkeitsklasse C^4. Wir nehmen an, dass die Fläche eineindeutig sphärisch abbildbar und frei von parabolischen Punkten und Nabelpunkten ist. Ferner seien im Gebiet G zwei Fumtionen $h(u, \upsilon)$, und $k(u, \upsilon)$ der Klasse C^2 gegeben.

Die Bestimmung eines Strahlensystems, dessen Mittenhüllfläche und mittlere Krümmung M und $h(u, \upsilon)$ entsprechend sind, führt auf ein elliptisches System zweier partieller Differentialgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen und daher ist das Problem immer lösbar (vgl. N. K. Stephanidis [4]). Ist speziell die gegebene Fläche M eine Minimalfläche, so wird das Problem auf die *Poissonsche* Differentialgleichung

$$\Delta\varphi(u,\upsilon) = 2\, h\,(u,\upsilon) \tag{1}$$

zurückgeführt, wobei $\varphi(u, \upsilon)$ die gesuchte Funktion ist.

Verlangt man, dass das Strahlensystem ein Normalensystem ist, so reduziert sich (1) auf die *Laplace-Beltramische* Differentialgleichung

$$\Delta\varphi(u,\upsilon) = 0. \tag{2}$$

Das Problem der Bestimmung eines Strahlensystems, dessen Mittenhüllfläche und Krümmung M und $k(u, \upsilon,)$ entsprechend sind, ist m. W. un-

---

* N. K. ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ, **Προσδιορισμός τῶν Μ-σμηνῶν ἀπό τή μέση περιβάλλουσα καί μία καμπυλότητα.**

gelöst. Ist speziell die gegebene Fläche M eine *Minimalfläche*, so wird das Problem auf die Bestimmung einer Lösung $\varphi(u, \upsilon)$ der Monge - Ampèreschen Differentialgleichung

$$(3) \qquad \varphi_{uu}\,\varphi_{\upsilon\upsilon} - \varphi_{u\upsilon}^2 + A\varphi_{uu} + 2B\varphi_{u\upsilon} - A\varphi_{\upsilon\upsilon} + D = 0$$

zurückgeführt. Hierbei sind die Koeffizienten A, B, D Funktionen von u, υ, φ_u, φ_υ allein.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$(4) \qquad k(u,\upsilon) > 0 \quad \forall\ (u,\upsilon,) \in G$$

folgt: Wenn eine Lösung $\varphi(u,\upsilon)$ von (3) existiert, so ist sie in G entweder *subharmonisch* oder *superharmonisch*. Ferner sei bemerkt, dass nach einem Satz von F. Rellich ([1]) folgt: Die erste Randwertaufgabe für die Differentialgleichung (3) hat höchstens zwei Lösungen.

1. *Hilfsbetrachtungen*. Ein Strahlensystem im dreidimensionalen euklidischen Raum sei gegeben durch die Leitfläche $\overrightarrow{OP} = P(u,\upsilon)$ und den Einheistsvektor $\overrightarrow{e_3}(u,\upsilon)$. Es sei $\{\overrightarrow{e_1}(u,\upsilon), \overrightarrow{e_2}(u,\upsilon), \overrightarrow{e_3}(u,\upsilon)\}$ ein begleitendes orthonormiertes Dreibein. Die Reihenfolge $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sei ein Rechtssystem. Es werden folgende Annahmen gemacht:

(a) Die Funktionen $P(u, \upsilon)$ und $\overrightarrow{e_j}(u, \upsilon)$, $i = 1, 2, 3$ sind in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der (u, υ) — Ebene erklärt und dort von der Differenzierbarkeitsklasse C^4.

(b) Das Strahlensystem ist eineindeutig sphärisch abbildbar.

(c) Die Leitfläche $\overrightarrow{OP} = P(u,\upsilon)$ ist die Mittenfläche des Strahlensystems.

Es existieren lineare Differentialformen σ_i, ω_{ij}, $i\,j, = 1, 2, 3$ derart, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$(1.1) \qquad dP = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i\, \vec{e}_i\,,$$

$$(1.2) \qquad d\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \omega_{ji}\, \vec{e}_i\,, \ j=1,2,3$$

$$(1.3) \qquad \omega_{ji} + \omega_{ij} = 0, \quad i,j=1,2,3\ .$$

Es bezeichne $\wedge$ das äussere Produkt von Differentialformen und d die äussere Differentiation. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (1.1), (1.2) sind

$$(1.4)\quad d\left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i\, \vec{e}_i\right) = 0,$$

$$(1.5)\quad d\left(\sum_{i=1}^{3} \omega_{ji}\, \vec{e}_i\right) = 0.$$

Nach Annahme fällt die Mittenfläche des Strahlensystems mit der Leitfläche zusammen. Das ist gemau dann der Fall, wenn

$$(1.6)\quad \omega_{31} \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \omega_{32} = 0$$

gilt. Da die Formen ω_{31}, ω_{32} linear unabhängig sind, existieren fünf Funktionen q, $\bar{q}$, l, m, n der Variablen u, υ, für die gilt:

$$(1.7)\quad d\,\omega_{31} = q\,\omega_{31} \wedge \omega_{32},$$

$$(1.8)\quad d\,\omega_{32} = \bar{q}\,\omega_{32} \wedge \omega_{31},$$

$$(1.9)\quad \sigma_1 = -m\,\omega_{31} - n\,\omega_{32},$$

$$(1.10)\quad \sigma_2 = l\,\omega_{31} + m\,\omega_{32},$$

$$(1.11)\quad \sigma_3 = \{\nabla_1 m - \nabla_2 l - 2\bar{q}m + q\,(l-n)\}\,\omega_{31} + \{\nabla_1 n - \nabla_2 m + 2qm + \bar{q}\,(l-n)\}\,\omega_{32}.$$

Hierin bedeutet ∇_1 bzw. ∇_2 die Pfaffsche Ableitung längs $\omega_{32}=0$ bzw. $\omega_{31}=0$.

Unter Verwendung der Funktionen q, $\bar{q}$, l, m, n reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen (1.4), (1.5) auf die folgenden zwei:

$$(1.12)\quad \nabla_2 q + \nabla_1 \bar{q} - q^2 - \bar{q}^2 - l = 0,$$

$$(1.13)\quad \left\{\begin{array}{l} \nabla_2\nabla_2 l - 2q\,\nabla_2 l + \bar{q}\,\nabla_1 l + 2l\,(\nabla_1 \bar{q} - \bar{q}^2) \\ -2\,(\nabla_2\nabla_1 m - 2q\,\nabla_1 m - \bar{q}\,\nabla_2 m) + 2m\,(\nabla_2 \bar{q} - 2q\bar{q} + \nabla_1 q) \\ +\nabla_1\nabla_1 n - 2\,\bar{q}\,\nabla_1 n + q\nabla_2 n + 2n\,(\nabla_2 q - q^2) = 0. \end{array}\right.$$

Die Krümmung k (u,υ) und die mittlere Krümmung h (u,υ) des Strahlensystems sind

$$(1.14)\quad k = \frac{\sigma_1 \wedge \sigma_2}{\omega_{31} \wedge \omega_{32}} = ln - m^2,$$

$$(1.15)\quad h = \frac{\sigma_1 \wedge \omega_{31} + \sigma_2 \wedge \omega_{32}}{2\,(\omega_{31} \wedge \omega_{32})} = \frac{l+n}{2}.$$

Jedem Strahlensystem werden die folgenden quadratischen Differentialformen zugeordnet:

$$(1.16) \quad I = \omega_{31}^2 + \omega_{32}^2 ,$$

$$(1.17) \quad II = l\omega_{31}^2 + 2m\omega_{31}\omega_{32} + n\omega_{32}^2 .$$

Es gilt bekanntlich der Satz: Sind die Pfaffschen Formen ω_{31}, ω_{32} und die Funktionen $l(u,\upsilon)$, $m(u,\upsilon)$, $n(u,\upsilon)$ gegeben und ist das System (1.12), (1.13) identisch in G erfüllt, so existiert bis auf Bewegungen genau ein Strahlensystem, dessen quadratische Differentialformen die Formen (1.16), (1.17) sind.

Es bezeichne $\overrightarrow{OM} = M(u,\upsilon)$ die Mittenhüllfläche des Strahlensystems. Es wird angenommen, dass die Punkte der Mittenhüllfläche den Punkten der Mittenfläche eineindeutig entsprechen. Die Normalen der Mittenhüllfläche sind parallel zu den Geraden des Strahlensystems. Daher existieren zwei Funktionen $a(u,\upsilon)$ und $b(u,\upsilon)$ derart, dass

$$(1.18) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

gilt. Die Funktionen a und b erfüllen für jedes $(u, \upsilon) \in G$ die Gleichung (vgl. N. K. Stephanidis [3])

$$(1.19) \quad d(b\omega_{31} - a\omega_{32}) = -(r_1 + r_2)\,\omega_{31} \wedge \omega_{32} .$$

Hierin sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Mittenhüllfläche. Äquivalent zu (1.19) ist die Gleichung

$$(1.20) \quad \nabla_1 a + \nabla_2 b - \bar{q}a - qb = r_1 + r_2 .$$

Setzt man

$$(1.21) \quad dM = \varrho\vec{e}_1 + \sigma\vec{e}_2 ,$$

so existieren drei Funktionen $\alpha(u,\upsilon)$, $\beta(u,\upsilon)$, $\delta(u,\upsilon)$ derart, dass

$$(1.22) \quad \varrho = \alpha\omega_{31} + \beta\omega_{32} ,$$

$$(1.23) \quad \sigma = \beta\omega_{31} + \delta\omega_{32} ,$$

ist. Dann ist

$$(1.24) \quad \alpha + \delta = -(r_1 + r_2) .$$

Für die Krümmung K (u,υ) der Mittenhüllfläche gilt

$$(1.25)\quad \frac{1}{K} = r_1 r_2 = \alpha\delta - \beta^2 .$$

Zwischen l, m, n, α, β, δ bestehen die Beziehungen

$$(1.26)\quad l = \nabla_1 b + q\,a + \beta ,$$

$$(1.27)\quad m = -(\nabla_1 a - q\,b + \alpha) = \nabla_2 b - \bar{q} a + \delta ,$$

$$(1.28)\quad n = -(\nabla_2 a + \bar{q} b + \beta) .$$

Gegeben sei die Fläche M. Betrachtet man ein orthonormiertes Begleitdreibein der Fläche M $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, so sind die Differentialformen ω_{31}, ω_{32} und die Funktionen q (u, υ), $\bar{q}$(u,υ) sowie die Ableitungen ∇_1 ∇_2 bezüglich ω_{31}, ω_{32} eindeutig bestimmt. Jeder Lösung a (u, υ), b (u, υ) der partiellen Differentialgleichung (1.20) entspricht ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche die gegebene Fläche M ist. Die Mittenfläche und das Strahlensystem sind eindeutig durch (1.18) und $\{P(u,\upsilon), \vec{e}_3\,(u,\upsilon)\}$ bestimmt.

Jedes Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche eine Minimalfläche ist, heisst *M-Strahlensystem*. Da für jedes M- Strahlensystem $r_1+r_2=0$ gilt, folgt aus (1.19), dass die Differentialform $b\omega_{31}-a\omega_{32}$ ein vollständiges Differential ist und daher existiert eine Funktion φ (u, υ) mit

$$(1.29)\quad \alpha = -\nabla_2\varphi, \quad \beta = \nabla_1\varphi .$$

Die Gesamtheit der Lösungen von (1.19) ist durch (1.29) bestimmt, wobei φ (u,υ) eine beliebige Funktion der Klasse C^1 ist. Die Menge der M- Strahlensysteme ist sehr umfangreich. Unter anderen enthält sie alle isotropen Strahlensysteme. Es gilt ferner der Satz (N. K. Stephanidis [5]): Die Menge der M-Strahlensysteme, die eine gegebene Minimalfläche als Mittenhüllfläche haben, ist ein reeller unendlich dimensionaler Vektorraum, dessen Nullelement das Normalensystem der Minimalfläche ist.

2. *Bestimmung von Strahlensystemen durch die Mittenhüllfläche und eine Krümmung.* Gegeben seien eine eineindeutig sphärisch abbildbare Fläche $\vec{OM}$=M (u,υ) der Klasse C^4 und zwei Funktionen h (u, υ), k (u,υ) der Klasse C^2. Die Fläche M sei frei von parabolischen Punkten und Nabelpunkten. Man kann zwei allgemeine Probleme stellen: Man bestimme ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche M und die mittlere Krümmung (bzw. Krümmung) h (u, υ) (bzw. k (u,υ)) sind.

Das erste Problem führt auf das elliptische System

$$(2.1) \quad \nabla_2 a - \nabla_1 b - qa + \bar{q}b = -2h$$

$$(2.2) \quad \nabla_1 a + \nabla_2 b - \bar{q}a - qb = r_1 + r_2$$

mit a, b, als gesuchten Funktionen und wurde in voller Allgemeinheit gelöst (N. K. Stephanidis [4]).

Das zweite Problem, also die Bestimmung eines Strahlensystems durch das Paar $\{M(u, \upsilon), k(u,\upsilon)\}$, ist m. W. offen. Im folgenden werden gewisse Aussagen gemacht für den Fall, in dem die gegebene Fläche eine Minimalfläche ist.

3. *Vorgabe der Minimalfläche und der mittleren Krümmung* h (u,υ,). Ist die gegebene Fläche M eine Minimalfläche, so gilt

$$(3.1) \quad r_1 + r_2 = 0 \quad \forall (u,\upsilon) \in G.$$

In diesem Fall reduziert sich das System (2.1), (2.2) auf die *Poissonsche* Differentialgleichung

$$(3.2) \quad \Delta\varphi(u,\upsilon) = 2h\ (u,\upsilon)$$

mit $\varphi(u,\upsilon)$ als gesuchter Funktion. Hierin ist Δ der zweite Beltramische Operator bezüglich der Metrik des sphärischen Bildes der Minimalfläche.

Ist speziell $h(u, \upsilon) = 0\ \forall\ (u, \upsilon) \in G$, so erhalten wir aus (3.2) die *Laplace-Beltramische* Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$. Die zugehörigen Strahlensysteme sind Normalensysteme. Der trivialen Lösung $\varphi\ (u, \upsilon) \equiv 0$ entspricht das Normalensystem der Minimalfläche, denn jede Minimalfläche ist sowohl Mittenfläche als auch Mittenhüllfläche ihres Normalensystems.

4. *Vorgabe der Minimalfläche und der Krümmung* k (u,υ). Gegeben sind eine Minimalfläche $\overrightarrow{OM} = M\ (u, \upsilon)$ und eine Funktion $k\ (u, \upsilon) \in C^2$. Gesucht ist ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche M und die Krümmung k (u, υ) sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass das Parameternetz u=const., υ = const. das Krümmungsliniennetz der Fläche M ist Bei jeder Minimalfläche sind das Krümmungsliniennetz und dessen sphärisches Bild isotherme Netze. Wir können also ansetzen

$$(4.1) \quad \omega_{31} = \mu\ (u, \upsilon)\ du, \quad \omega_{32} = -\mu\ (u, \upsilon)\ d\upsilon, \quad \mu\ (u, \upsilon) > 0.$$

Dann ergibt sich

$$(4.2) \quad q = \frac{\mu_\upsilon}{\mu^2}, \qquad \bar{q} = -\frac{\mu_u}{\mu^2},$$

$$(4.3) \quad \nabla_1\varphi = \frac{\varphi_u}{\mu}, \quad \nabla_2\varphi = \frac{\varphi_\upsilon}{\mu},$$

$$(4.4)\quad \nabla_1\nabla_1\varphi = \frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{uu} - \mu_u\varphi_u),$$

$$(4.5)\quad \nabla_2\nabla_2\varphi = \frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{vv} - \mu_v\varphi_v),$$

$$(4.6)\quad \nabla_2\nabla_1\varphi = -\frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{uv} - \mu_v\varphi_u),$$

$$(4.7)\quad \nabla_1\nabla_2\varphi = -\frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{uv} - \mu_u\varphi_v).$$

Wir verwenden nun die Formeln (1.26), (1.27), (1.28). Da die Integralkurven von $\omega_{31}=0$, $\omega_{32}=0$ die Krümmungslinien von M liefern, gilt

$$(4.8)\quad \beta(u,v) = 0,\ \alpha(u,v) = -r_1(u,v),\ \delta(u,v)=r_1(u,v)\quad \forall (u,v)\in G$$

Unter Beachtung von (1.29) erhalten wir

$$(4.9)\quad l=\frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{uu} - \mu_u\varphi_u + \mu_v\varphi_v),$$

$$(4.10)\quad m= -\frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{uv} - \mu_u\varphi_v - \mu_v\varphi_u)+ r_1,$$

$$(4.11)\quad n=\frac{1}{\mu^3}(\mu\varphi_{vv} + \mu_u\varphi_u - \mu_v\varphi_v).$$

Die Forderung, dass die Beziehung (1.14) gilt, führt auf die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit φ (u, v) als gesuchter Funktion:

$$(4.12)\quad \varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2 + A\varphi_{uu} + 2B\varphi_{uv} - A\varphi_{vv} + D= 0.$$

Hierbei wurde gesetzt

$$(4.13)\quad A= W_u\varphi_u - W_v\varphi_v,$$

$$(4.14)\quad B= W_u\varphi_v + W_v\varphi_u + \mu^2 r_1,$$

$$(4.15)\quad D= -(W_u^2 + W_v^2)(\varphi_u^2 + \varphi_v^2) - 2\mu^2 r_1(W_u\varphi_v + W_v\varphi_u) - \mu^4(k + r_1^2)$$

$$(4.16)\quad W= \log\mu.$$

Somit reduziert sich die Lösung unseres Problems auf die Integration der Monge — Ampèreschen Differentialgleichung (4.12).

Bekanntlich, die allgemeine Monge-Ampèresche Differentialgleichrung

$$(4.17) \quad E\,(\varphi_{uu}\varphi_{\upsilon\upsilon} - \varphi_{u\upsilon}^2) + A\varphi_{uu} + 2B\varphi_{u\upsilon} + C\,\varphi_{\upsilon\upsilon} + D = 0\,,$$

wodei E, A, B, C, D Funktionen von u, υ, φu, $\varphi\upsilon$ sind, heisst für eine vorgelegte Lösung φ (u, υ) elliptisch, wenn

$$(4.18) \quad AC - B^2 - ED > 0$$

gilt. Für die Gleichung (4.12), die Ungleichung (4.18) lautet, unter Beachtung der Formeln (4.13), (4.14), (4.15),

$$(4.19) \quad k(u,\upsilon) > 0 \qquad \forall (u,\upsilon) \in G.$$

Erfüllt also die vorgegebene Funktion k (u, υ) die Ungleichung (4.19), so ist die Differentialgleichung (4.12) elliptisch. In diesem Fall existieren, nach einem Satz von F. Rellich ([1]) höchstens zwei Lösungen der ersten Randwertaufgabe für die Differenialgleichung (4.12).

Wir können (4.12) in der folgenden Form schreiben:

$$(4.20) \quad (\varphi_{uu} - A)(\varphi_{\upsilon\upsilon} + A) = (\varphi_{u\upsilon} - B)^2 - A^2 - B^2 - D$$

Es ist also

$$(4.21) \quad (\varphi_{uu} - A)(\varphi_{\upsilon\upsilon} + A) = (\varphi_{u\upsilon} - B)^2 + k\mu^4\,.$$

Setzen wir voraus, dass die Bedingung (4.19) erfüllf ist und eine Lösung φ (u.υ) $\in C^2$ der Differentialgleichung (4.21) existiert, so gilt für diese Lösung entweder

$$(4.22) \quad \varphi_{uu} - A > 0, \quad \varphi_{\upsilon\upsilon} + A > 0 \qquad \forall (u,\upsilon) \in G.$$

oder

$$(4.23) \quad \varphi_{uu} - A < 0, \quad \varphi_{\upsilon\upsilon} + A < 0 \qquad \forall (u,\upsilon) \in G.$$

Im ersten Fall erhalten wir

$$(4.24) \quad \varphi_{uu} + \varphi_{\upsilon\upsilon} > 0 \qquad \forall (u,\upsilon) \in G,$$

also φ (u υ) ist *subharmonisch* und im zweiten

$$(4.25) \quad \varphi_{uu} + \varphi_{\upsilon\upsilon} < 0 \qquad \forall (u,\upsilon) \in G,$$

also φ (u, υ) ist *superharmonish.* Somit haben wir das Resultat:

Gegeben seien eine Minimalfläche M, die im einfach zusammenhängenden Gebiet G der (u, v) — Ebene erklärt ist, und eine Funktion $k(u, v) \in C^2, (u, v) \in G$. Wir nehemen an, dass die Fläche M eineindeutig sphärisch abbildbar und frei von parabolischen Punkten und Nabelpunkten ist. Die Bestimmung aller Strahlensysteme, die M und k (u, v) als Mittenhüllfäche und Krümmung entsprechend haben, führt auf die Monge - Ampèresche Differentialgleichung (4.12). Gilt zusätzlich

$$k(u,\upsilon) > 0 \quad \forall\ (u,\upsilon) \in G,$$

so ist jede Lösung von (4.12) entweder subharmonisch oder superharmonisch.

5. *Vorgabe der Minimalfläche und der gemischten mittleren Krümmung H^* (u., v).*

Im Gebiet G seien eine Minimalfläche $\overrightarrow{OM} = M(u, \upsilon)$ und eine Funktion $H^*(u,\upsilon)$ gegeben. Gesucht ist ein Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche und gemischte mittlere Krümmung M und $H^*(u, \upsilon)$ entsprechend sind.

Die gemischte Kümmung ist

$$(5.1) \qquad H^* = -\frac{1}{2}(\alpha l + 2\beta m + \delta n).$$

Die Krümmungslinien von M seien u = const., υ = const.. Unter Verwendung der Bezeichnugen des vorigen Abschnittes finden wir, dass die Lösung des Problems auf die hyperbolische Differentialgleichung

$$(5.2) \qquad \varphi_{uu} - \varphi_{\upsilon\upsilon} - (\log\mu^2)_u\varphi_u + (\log\mu^2)_\upsilon\varphi_\upsilon = \frac{2\,H^*\mu^2}{r_1}$$

zurückgeführt wird. Um die Normalform von (5.2) zu finden, führen wir wie üblich die Transformation ein:

$$(5.3) \qquad \xi = u + \upsilon, \qquad \eta = u - \upsilon.$$

Die Gleichung (5.2) wird

$$(5.4) \qquad \varphi_{\xi\eta} - (\log\mu)_\eta\,\varphi_\xi - (\log\mu)_\xi\,\varphi_\eta = \frac{H^*\mu^2}{2r_1}.$$

Die Charakteristiken sind ξ = const., η = const., also $u+\upsilon$ = const. und $u-\upsilon$ = const., also die Winkelhalbierenden des sphärischen Bildes der Krümmnungslinien von M.

Gilt speziell

$$(5.5) \qquad (\log\mu)_{\xi\eta} - (\log\mu)_\xi\,(\log\mu)_\eta = 0 \qquad \forall\,(u, \upsilon) \in G$$

so ist (5.4) elementar integrierbar. Denn, in diesem Fall können wir (5.4) in der folgenden Form schreiben:

$$(5.6) \quad \frac{\partial}{\partial_\xi}\,[\varphi_\eta - (\log\mu)_\eta\,\varphi] - (\log\mu)_\xi\,[\varphi_\eta - (\log\mu)_\eta\,\varphi] = \frac{H^*\mu^2}{2r_1}.$$

Setzen wir

$$(5.7) \quad z = \varphi_\eta - (\log\mu)_\eta\,\varphi,$$

so erhalten wir aus (5.6) die lineare Differentialgleichung

$$(5.8) \quad z_\xi - (\log\mu)_\xi\, z = \frac{H^*\mu^2}{2r_1},$$

woraus durch Integration folgt

$$(5.9) \quad z = \mu\,[A(\eta) + \frac{1}{2}\int \frac{\mu H^*}{r_1}\,d\xi].$$

Hierbei ist A (η) eine willkürliche differenzierbare Funktion der Variablen η. Aus (5.7), (5.9) durch Integration folgt

$$(5.10) \quad \varphi = \mu\,\{B(\xi) + \int [A(\eta) + \frac{1}{2}\int \frac{\mu H^*}{r_1}\,d\xi]\,d\eta\,\}$$

wobei B(ξ) eine willkürliche differenzierbare Funktion der Variablen ξ ist.

Die Existenz isothermer Netze, die (5.5) erfüllen, ist gesichert. Die Gleichung (5.5) ist äquivalent zu der Gleichung

$$(5.11) \quad (\log\mu)_{uu} - (\log\mu)_{\upsilon\upsilon} - (\log\mu)_u^2 + (\log\mu)_\upsilon^2 = 0\,.$$

Für die Ennepersche Minimalfläche

$$(5.12) \quad x = u + u\upsilon^2 - \frac{u^3}{3}\,, \quad y = -\upsilon - u^2\upsilon + \frac{\upsilon^3}{3}\,, \quad z = u^2 - \upsilon^2, \quad u^2 + \upsilon^2 < \infty$$

ist

$$(5.13) \quad \mu = \frac{2}{1+u^2+\upsilon^2}$$

Man verifiziert, dass die Funktion (5.13) die Beziehung (5.11) erfüllt.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Προσδιορισμὸς τῶν Μ-σμηνῶν ἀπὸ τὴ μέση περιβάλλουσα καὶ μία καμπυλότητα.

Ἔστω $\overrightarrow{OM} = M\,(u, \upsilon)$ μία ὁμαλὴ ἐπιφάνεια τοῦ τριδιάστατου εὐκλείδειου χώρου. Ἡ συνάρτηση M(u, υ) ἂς εἶναι ὁρισμένη στὸν ἁπλῶς συναφῆ τόπο G τοῦ (u, υ) — ἐπιπέδου καὶ τῆς κλάσεως C^4. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀμφιμονότιμα σφαιρικῶς ἀπεικονίσιμη καὶ ὅτι στερεῖται παραβολικῶν καὶ ὀμφαλικῶν σημείων. Δίδονται ἐπίσης δύο συναρτήσεις h (u, υ), k (u, υ), $(u, \upsilon) \in G$ τῆς κλάσεως C^2.

Ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς σμήνους, τοῦ ὁποίου ἡ μέση περιβάλλουσα εἶναι M καὶ ἡ μέση καμπυλότητα h(u, υ) ἀνάγεται σὲ ἐλλειπτικὸ σύστημα δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὲς παραγώγους, τὸ ὁποῖον ἔχει πάντοτε λύση (βλ. N. K. Stephanidis [4]). Στὴν περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια M εἶναιἐλαχιστική, ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ἀντιστοίχου σμήνους ἀνάγεται στὴ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Poisson $\Delta \varphi (u, \upsilon)=2h (u, \upsilon)$, ὅπου Δ εἶναι ὁ δεύτερος τελεστὴς τοῦ Beltrami ὡς πρὸς τὴ μετρικὴ τῆς σφαιρικῆς εἰκόνας τῆς ἐπιφάνειας M καὶ $\varphi(u, \upsilon)$ ἡ ζητούμενη συνάρτηση. Εἰδικώτερα, ὅταν τὸ ζητούμενο σμῆνος εἶναι καθετικό, προκύπτει ἡ διαφορετικὴ ἐξίσωση Laplace - Beltrami $\Delta\varphi (u, \upsilon)=0$.

Τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως σμήνους, τοῦ ὁποίου ἡ μέση περιβάλλουσα εἶναι M καὶ ἡ καμπυλότητα $k (u, \upsilon)$, ἐξετάζεται στὴ μερικὴ περίπτωση, κατὰ τὴν ὁποία ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια M εἶναι ἐλαχιστικὴ καὶ ἀνάγεται στὴ διαφορικὴ ἐξίσωση τύπου Monge - Ampère

$$\varphi_{uu}\ \varphi_{\upsilon\upsilon} - \varphi_{u\upsilon}^2 + A\varphi_{uu} + 2B\varphi_{u\upsilon} - A\varphi_{\upsilon\upsilon} + D = 0,$$

ὅπου A, B, D εἶναι συναρτήσεις τῶν u, υ, φ_u φ_υ, καὶ $\varphi(u, \upsilon)$ ἡ ζητούμενη συνάρτηση. Ἂν ἐπὶ πλέον ὑποτεθεῖ ὅτι ἰσχύει $k (u, \upsilon) > 0 \ \forall \ (u,\upsilon) \in G$, τότε ἡ λύση $\varphi (u, \upsilon)$ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἢ ὑφαρμονικὴ ἢ ὑπεραρμονική. Τέλος, σύμφωνα μὲ ἕνα θεώρημα τοῦ F. Rellich ([1]), τὸ πρῶτο πρόβλημα συνόρου» τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ἔχει τὸ πολὺ δύο λύσεις.

LITERATUR

[1] Rellich, F.: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge—Ampèreschen Differentialgleichung vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. 107, 505-513 (1933).

[2] Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Springer, Berlin 1958.

[3] Stephanidis, N. K.: Existenzfragen für Strahlensysteme. Arch. Math. 14, 430-440 (1963).

[4] Stephanidis, N. K.: Strahlensysyeme mit gemeinsamer Mittenhüllfläche. Mh. Math. 70, 64-73 (1966).

[5] Stephanidis, N. K.: Minimalflächen und Strahlensysteme. Arch. Math. 41, 544-554 (1983).

[6] Stephanidis, N. K.: Über eine invariante Differentialform für Strahlensysteme. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss., math.—nat. Kl. 198, 267-279 (1989).

[7] Stephanidis, N. K.: On the mixed mean curvature of a rectilinear congruence. Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Serie II, Vol. 1, 237-245 (1991).