ΕΠΙ ΤΙΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΥΦΗΓΕΣΙᾼ

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1904

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΠΙ ΤΙΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΥΦΗΓΕΣΙᾼ

ΥΠΟ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1904

Τῷ κ. Δημ. Αἰγινήτῃ

Γ. Ρεμούνδος

ΕΙΣ ΤΗΝ ΙΕΡΑΝ ΜΝΗΜΗΝ

ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΙΛΟΥΣ ΜΟΙ ΣΥΖΥΓΟΥ

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΠΙ ΤΙΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

ΤΗΣ

ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ἀπέδειξεν ἓν θεώρημα (1) ὑψίστης σημασίας, τὸ ὁποῖον παρουσιάζει μεγάλην ἀναλογίαν μετὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ κ. Borel, ὅπερ ἐχρησίμευσεν ὡς βάσις ἐν ταῖς ἐρεύναις μου ἐπὶ τῆς ἐπεκτάσεως εἰς τὰς πλειονοτίμους συναρτήσεις (fonctions multiformes ou à plusieurs branches) τοῦ περιφήμου θεωρήματος τοῦ κ. Picard καὶ τῶν γενικεύσεών του (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 20 Avril 1903, 8 Février 1904, 20 Juin 1904, 8 Août 1904. Bulletin de la société mathématique de France, 1904, fascicule I).

Τὸ θεώρημα τοῦ Lindemann συνίσταται εἰς τὸ ἀδύνατον ἰσότητος τῆς μορφῆς:

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_\nu e^{\alpha_\nu} = 0 \qquad (1)$$

ὅπου οἱ ἐκθέται $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων καὶ οἱ συντελεσταὶ $A_1, A_2, \dots A_\nu$ ἐπίσης ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἐκτὸς ὅταν ἔχωμεν:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_\nu = 0. \qquad (2)$$

(1) Mathematische Annalen. Τόμος 20 (1882), σελὶς 213.

Μία δὲ μερικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ κ. Borel συνίσταται εἰς τὸ ἀδύνατον ταυτότητος τῆς μορφῆς:

$$P_1(z)e^{H_1(z)}+P_2(z)e^{H_2(z)}+\ldots+P_\nu(z)e^{H_\nu(z)}=0 \qquad (3)$$

ἔνθα οἱ ἐκθέται $H_1(z)$, $H_2(z)$, ... $H_\nu(z)$ καὶ οἱ συντελεσταὶ $P_1(z)$, $P_2(z)$ ... $P_\nu(z)$ εἶναι πολυώνυμα, ἐκτὸς ὅταν ἔχωμεν:

$$P_1(z)=0,\ P_2(z)=0, \ldots P_\nu(z)=0.$$

Ἡ ἀξιοσημείωτος αὕτη ἀναλογία γίνεται μᾶλλον καταφανὴς ἐν ταῖς συνεπείαις τῶν δύω τούτων θεωρημάτων, ὡς θὰ ἴδωμεν ἐν τῷ παρόντι ἔργῳ, καὶ ἀποτελεῖ ἓν σημεῖον προσεγγίσεως τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων μετὰ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν ἄξιον μεγάλης προσοχῆς.

Ὁ Lindemann ἐχρησιμοποίησε μίαν μερικὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος διὰ νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ὑπερβατικός. Περὶ τούτου ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἴδῃ ἐν τῷ πρώτῳ τόμῳ τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ τοῦ κ. Χατζιδάκη (σελ. 452), ἔνθα ἐκτίθεται καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Lindemann ἐν τῇ μερικῇ ταύτῃ περιπτώσει.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

1) Θεωρήσωμεν ἓν πολυώνυμον $q(u)$

$$q(u)=u^{\nu}+\gamma_1 u^{\nu-1}+\gamma_2 u^{\nu-2}+\ldots+\gamma_{\nu-1}u+\gamma_\nu \qquad (4)$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ γ_1, γ_2, ... $\gamma_{\nu-1}$, γ_ν εἶναι ἀριθμοὶ ὑπερβατικοὶ (μὴ ἀλγεβρικοὶ) καὶ θεωρήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$q(u)=Ae^{\alpha} \qquad (5)$$

τῶν ἀριθμῶν A καὶ α ὄντων ἀλγεβρικῶν. Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς (ἐὰν α διάφορον τοῦ 0) συμφώνως τῷ θεωρήματι τοῦ Lindemann.

Θ' ἀποδείξω ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (5) εἶναι ἐν γένει ὑπερβατικαὶ καὶ ὅτι ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (5) δεχομένη ἀλγεβρικὰς ῥίζας δέον νὰ θεωρῆται *ἐξαιρετική*.

Παρατηρῶ κατ' ἀρχὰς ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχωσι ν διάφοροι ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$q(u)=A_1, \; q(u)=A_2, \ldots q(u)=A_\nu \qquad (6)$$

δεχόμεναι ἀλγεβρικὰς ῥίζας, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ A_1, A_2,... A_ν εἶναι ἀλγεβρικοί. Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τοῦτο συνέβαινε, ἔστωσαν u_1, u_2, ... u_ν ἀλγεβρικαὶ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων τούτων. Θὰ εἴχομεν :

$$q(u_1)=A_1, \; q(u_2)=A_2, \ldots q(u_\nu)=A_\nu \qquad (7)$$

καὶ οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ u_1, u_2,... u_ν θὰ ἦσαν προφανῶς διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων· ἀλλὰ τότε αἱ ν αὗται ἐξισώσεις (7) λυόμεναι ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς γ_1, γ_2,... γ_ν θὰ ἔδιδον ἀλγεβρικὰς τιμὰς αὐτῶν, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἡμῶν, καθ' ἣν εἷς τοὐλάχιστον τῶν συντελεστῶν εἶναι ἀριθμὸς ὑπερβατικός Συνάγομεν ἐντεῦθεν τὸ ἑξῆς θεώρημα :

«Δὲν ὑπάρχουσι ν ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τοῦ u, διὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς q(u) νὰ εἶναι ἀλγεβρικός· τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν τούτων τοῦ u εἶναι τὸ πολὺ ν-1». Εἶναι πρόδηλον ὅτι οὐδεμία τοιαύτη τιμὴ θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ ἀριθμοὶ γ_1, γ_2, ... γ_ν εἶναι πάντες ὑπερβατικοὶ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, δηλαδὴ ὅταν δὲν ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ὑπερβατικῶν τούτων ἀριθμῶν οὐδεμία σχέσις γραμμικὴ μὲ συντελεστὰς ἀλγεβρικούς. Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ u εἶναι ἀκριβῶς ἀντίστοιχοι πρὸς ἐκείνας, τὰς ὁποίας ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν συναρτήσεων, προκειμένου περὶ τῶν μηδενικῶν τῶν πλειονοτίμων συναρτήσεων, ἐκάλεσα ἐξαιρετικὰς τιμὰς τῆς ὁμάδος (E) (valeurs exceptionnelles E).

2) Θ᾽ ἀποδείξω νῦν ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχωσι $\nu+1$ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$q(u)=A_1 e^{\alpha_1}, q(u)=A_2 e^{\alpha_2}, \ldots q(u)=A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}} \quad (8)$$

δεχόμεναι ἀλγεβρικὰς ῥίζας, ἐὰν τὰ δεύτερα μέλη αὐτῶν εἶναι ὑπερβατικοὶ ἀριθμοὶ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ διάφοροι τοῦ 0).

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, θὰ ἐφαρμόσω τὴν μέθοδον ἐκείνην τῆς *ἀπαλοιφῆς*, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποίησα ἐν ταῖς ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων ἐρεύναις μου καὶ ἥτις μεθ᾽ ὅλην τὴν ἁπλότητα αὐτῆς εἰς τόσον ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα κατέληξε.

Ὑποτεθείσθω ὅτι αἱ ἐξισώσεις (8) δέχονται κατὰ σειρὰν τὰς ἀλγεβρικὰς ῥίζας $u_1, u_2, \ldots u_\nu, u_{\nu+1}$. Θὰ ἔχωμεν:

$$q(u_1)=A_1 e^{\alpha_1}\, q(u_2)=A_2 e^{\alpha_2}, \ldots q(u_\nu)=A_\nu e^{\alpha_\nu},$$

$$q(u_{\nu+1})=A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}} \quad (9)$$

καὶ οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $u_1, u_2, \ldots u_\nu, u_{\nu+1}$ θὰ εἶναι διάφοροι ἀπ᾽ ἀλλήλων, διότι, ἐὰν δύο ἐξ αὐτῶν $u_\varkappa$ καὶ u_λ ἦσαν ἴσοι, θὰ εἴχομεν προφανῶς τὴν ἰσότητα:

$$A_\varkappa\, e^{\alpha_\varkappa} - A_\lambda\, e^{\alpha_\lambda} = 0$$

ἥτις, συμφώνως τῷ θεωρήματι τοῦ Lindemman, εἶναι ἀδύνατος, ἐὰν δὲν εἶναι:

ἢ $\alpha_\varkappa = \alpha_\lambda$ (ὅτε $A_\varkappa = A_\lambda$ ὡσαύτως) ἢ $A_\varkappa = A_\lambda = 0$.

Τούτου τεθέντος, ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν συντελεστῶν $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu$ μεταξὺ τῶν $\nu+1$ ἐξισώσεων (9) ὁδηγεῖ ἡμᾶς εἰς τὴν ἰσότητα:

$$\alpha_1 A_1 e^{\alpha_1} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2} + \ldots \alpha_\nu A_\nu e^{\alpha_\nu} + \alpha_{\nu+1} A_{\nu+1} e^{\alpha_{\nu+1}} = \alpha \quad (10)$$

ὅπου :

$$
\alpha_i = \begin{vmatrix}
1 & u_{i+1}, & u_{i+1}^2 & \dots & u_{i+1}^{\nu-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & u_{\nu+1}, & u_{\nu+1}^2 & \dots & u_{\nu+1}^{\nu-1} \\
1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{\nu-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \dots & u_{i-1}^{\nu-1}
\end{vmatrix}
\qquad [i = 1, 2, \dots \nu + 1] \qquad (11)
$$

$$
\alpha = \begin{vmatrix}
1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{\nu} \\
1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{\nu} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & u_\nu & u_\nu^2 & \dots & u_\nu^{\nu} \\
1 & u_{\nu+1} & u_{\nu+1}^2 & \dots & u_{\nu+1}^{\nu}
\end{vmatrix}
$$

Ἡ ὁρίζουσα, ἡ δίδουσα τὸ α_i, εἶναι τάξεως ν, ἐνῷ ἐκείνη, ἥτις δίδει τὸ α, εἶναι τάξεως $\nu+1$· πάντες οἱ ἀριθμοὶ α_i $[i = 1, 2, \dots, \nu+1]$ καὶ α εἶναι προφανῶς ἀλγεβρικοὶ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.

Πάντες οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (10) εἶναι ὑπερβατικοί, διότι οἱ ἐκθέται α_1, α_2, ... $\alpha_{\nu+1}$ ὑπετέθησαν τοῦ μηδενὸς διάφοροι, ἀλλὰ οἱ ἐκθέται οὗτοι δὲν εἶναι ἀναγκαίως διάφοροι ἀπ᾽ ἀλλήλων καὶ δύναται κάλλιστα νὰ συμβῇ τινὲς ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσοι ἀλλήλοις, ὅτε ἀναγωγαὶ θὰ λάβωσι χώραν ἐν τῷ πρώτῳ μέλει τῆς (10).

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν διακεκριμένων ὑπερβατικῶν ὅρων τῆς ἰσότητος (10) δύναται νὰ ἐλαττωθῇ διὰ τοιούτων ἀναγωγῶν καί, ὅταν αὕτη λάβῃ ἀκριβῶς τὴν μορφήν, ἣν ἀπαιτεῖ τὸ θεώρημα τοῦ Lindemann, οὐδεὶς τῶν ἀρχικῶν συντελεστῶν αἱ A_i $[i = 1, 2, 3, \ldots, \nu+1]$ νὰ μείνῃ ἀνάγωγος, ἀλλὰ ὁ μόνος ἀλγεβρικὸς ὅρος, ὅστις ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον μέλος, οὐδεμίαν ἀναγωγὴν δύναται νὰ ὑποστῇ καὶ ἑπομένως θὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος ὅπως ἐξ ἀρχῆς ἦτο.

Ὑποτεθείσθω ὅτι κατόπιν ὅλων τῶν δυνατῶν ἀναγωγῶν ἡ ἰσότης (10) ἔλαβε τὴν μορφήν:

$$a_1 e^{\alpha_{\varkappa_1}} + a_2 e^{\alpha_{\varkappa_2}} + \ldots + a_\mu e^{\alpha_{\varkappa_\mu}} = \alpha. \qquad (12)$$

Συμφώνως τῷ θεωρήματι τοῦ Lindemann, ἡ ἰσότης (12) εἶναι ἀδύνατος, διότι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι τοῦ μηδενὸς διάφορος.

Ἐνταῦθεν συνάγομεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

«Ἐὰν ὑπάρχουσι τιμαὶ ἀλγεβρικαὶ τοῦ u, διὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς q(u) νὰ εἶναι ὑπερβατικὸς τῆς μορφῆς: Ae^{α} (τῶν A καὶ α ὄντων ἀριθμῶν ἀλγεβρικῶν), τὸ πλῆθος τῶν τιμῶν τούτων τοῦ u δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ν».

Τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ u, καθὼς καὶ ἐκείνας, δι' ἃς τὸ q(u) εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, καλέσωμεν *ἐξαιρετικὰς* (exceptionnelles).

Ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς αὐτῶν δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 2ν—1· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, τὸ πολυώνυμον q(u) εἶναι ἀλγεβρικόν, δηλαδὴ οἱ συντελεσταὶ αὐτοῦ πάντες εἶναι ἀριθμοὶ ἀλγεβρικοί.

Ἐξαιρετικὴ κληθήσεται καὶ πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (5) δεχομένη ἀλγεβρικὰς ῥίζας καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ ἐπίσης τὸ 2ν—1, συμπεριλαμβανομένων καὶ ἐκείνων, ὧν τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.

Ὅτι ὑπάρχει πολυώνυμον q(u) μὲ συντελεστὰς ὑπερβατικοὺς δεχόμενον ν ἀλγεβρικὰς *ἐξαιρετικὰς* τιμὰς τοῦ u, τοῦτο εἶναι προφανές, διότι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς γ_1, γ_2, ... γ_ν ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$$q(u_1) = A_1 e^{\alpha_1},\ q(u_2) = A_2 e^{\alpha_2},\ \ldots, q(u_\nu) = A_\nu e^{\alpha_\nu} \quad (13)$$

ὅπου u_1, u_2, ... u_ν εἶναι ν τυχόντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, καθὼς καὶ οἱ A_1, A_2, ... A_ν, α_1, α_2, ... α_ν. Εἶναι δὲ ἀξιοπαρατήρητον ὅτι, ὅταν τὸ πολυώνυμον $q(u)$ δέχεται ν τοιαύτας ἐξαιρετικὰς τιμὰς καὶ οἱ ἀριθμοὶ $A_1 e^{\alpha_1}$, $A_2 e^{\alpha_2}$, ... $A_\nu e^{\alpha_\nu}$ εἶναι ὑπερβατικοί, οἱ συντελεσταὶ γ_1, γ_2, ... γ_ν εἶναι ὑπεγβατικοὶ τῆς μορφῆς $a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \ldots + a_\nu e^{\alpha_\nu}$, ὅπου οἱ ἀριθμοὶ a_1, a_2, ... a_ν εἶναι ἐπίσης ἀλγεβρικοί.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος ἡμῶν ἕπεται τὸ ἑξῆς πόρισμα:

Πόρισμα I. Ἐὰν ἔχωμεν n ἐξισώσεις ἐξαιρετικὰς

$$q(u) = A_1 e^{\alpha_1},\ q(u) = A_2 e^{\alpha_2},\ \ldots\ q(u) = A_n e^{\alpha_n}$$
$$[\text{τῶν } \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n \text{ διαφερόντων τοῦ } 0] \quad (14)$$

ὧν ὁ πρώτη κέκτηται K_1 ῥίζας ἀλγεβρικάς, ἡ δευτέρα K_2 τοιαύτας ῥίζας ... καὶ ἡ τελευταία K_n, τὸ ἄθροισμα $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἀριθμὸν ν. Ἑπομένως ἐὰν ἔχωμεν $K_1 = \nu$, δέον νὰ εἶναι:

$$K_2 = 0,\ K_3 = 0,\ \ldots\ K_n = 0.$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν καὶ τὸ ἑξῆς πόρισμα:

Πόρισμα II. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$q(u) = A_0 e^{\alpha_0} \qquad \alpha_0 \text{ διάφορον τοῦ } 0$$

ἔχουσα πάσας τὰς ῥίζας αὐτῆς ἀλγεβρικάς, οὐδεμία ἄλλη τῆς αὐτῆς μορφῆς:

$$q(u) = Ae^{\alpha} \quad \left[Ae^{\alpha} \text{ διάφορον τοῦ } A_0 e^{\alpha_0}\right] \quad (\alpha \text{ διάφορον τοῦ } 0)$$

δύναται νὰ δέχηται ἀλγεβρικὴν ῥίζαν.

3) Πάντα τ' ἀποτελέσματα ταῦτα εὐκόλως ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς : (¹)

$$q(u) = A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_m e^{\alpha_m} \qquad (15)$$

τῇ βοηθείᾳ πάντοτε τοῦ θεωρήματος τοῦ Lindemann. Ἀφίνοντες εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν φροντίδα νὰ ἐπαληθεύσῃ τοῦτο, περιοριζόμεθα νὰ ἐκθέσωμεν μίαν γενίκευσιν ἀξίαν λόγου, ἣν λαμβάνουσι τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἀποτελέσματα :

Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς:

$$Q(u) = \sigma_0(u) + \gamma_1 \sigma_1(u) + \gamma_2 \sigma_2(u) + \dots + \gamma_\nu \sigma_\nu(u) \qquad (16)$$

ἔνθα αἱ συναρτήσεις $\sigma_0(u)$, $\sigma_1(u)$, ... $\sigma_\nu(u)$ εἶναι ἀλγεβρικαὶ μονότιμοι ἢ πλειονότιμοι καὶ ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ὑπάρχουσι ν ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τοῦ u, αἱ u_1, u_2, ... u_ν τοιαῦται ὥστε :

$$Q(u_1) = A_1 \quad Q(u_2) = A_2 \dots Q(u_\nu) = A_\nu \qquad (17)$$

τῶν ἀριθμῶν A_1, A_2, ... A_ν ὄντων ἀλγεβρικῶν.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ γ_1, γ_2, ... γ_ν δὲν εἶναι πάντες ἀλγεβρικοὶ (τουθ' ὅπερ ὑποθέτομεν ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ παραγράφῳ), ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν :

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_\nu) = \begin{vmatrix} \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) & \dots \sigma_1(u_\nu) \\ \sigma_2(u_1) & \sigma_2(u_2) & \dots \sigma_2(u_\nu) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) & \dots \sigma_\nu(u_\nu) \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

Δυνάμεθα μάλιστα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ γ_1, γ_2, ... γ_ν εἶναι πάντες ὑπερβατικοὶ καὶ ἀλγεβρικῶς ἀνεξάρτητοι ἀπ' ἀλλήλων, δηλαδὴ ὅτι οὐδεμία σχέσις ὑπάρχει τῆς μορφῆς:

(¹) Ἡ ἀναλογία τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων μετ' ἐκείνων, τὰ ὁποῖα ἀπέκτησα ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν συναρτήσεων, εἶναι ὄντως, ὡς βλέπει ὁ ἀναγνώστης, τελεία (ὅρα τὰς ἀνακοινώσεις μου εἰς τὴν γαλλικὴν ἀκαδημίαν).

$$\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \dots + \beta_\nu \gamma_\nu = \beta \qquad (19)$$

τῶν ἀριθμῶν $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu$ καὶ β ὄντων ἀλγεβρικῶν· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τοιαύτη σχέσις ὑπῆρχε, ἠδυνάμην εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ν᾽ ἀπαλείψω ἕνα τῶν $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_\nu$ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς (16) καὶ νὰ ἐλαττώσω οὕτως τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος $Q(u)$.

Τούτου ὑποτεθέντος, εἶναι πρόδηλον ὅτι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαί, δι᾽ ἃς τὸ $Q(u)$ εἶναι ἀριθμὸς ἀλγεβρικός, δέον νὰ μηδενίζωσι ταυτοχρόνως τὰς συναρτήσεις $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \dots \sigma_\nu(u)$, καί, ἑπομένως, θὰ εἶναι κοιναὶ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων:

$$\sigma_1(u) = 0, \qquad \sigma_2(u) = 0, \dots \sigma_\nu(u) = 0$$

Ὑποθέσωμεν νῦν ὅτι ὑπάρχουσι $\nu+1$ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τοῦ u αἱ $u_1, u_2, \dots u_{\nu+1}$, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $Q(u)$ νὰ εἶναι ἀριθμὸς ὑπερβατικὸς τῆς μορφῆς:

$$Q(u) = A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_m e^{\alpha_m} \qquad (20)$$

Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς συνδυαζομένη μετὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Lindemann ὁδηγεῖ ἡμᾶς εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ $u_1, u_2, \dots u_{\nu+1}$ δέον νὰ ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν:

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} \sigma_0(u_1) & \sigma_0(u_2) \dots & \sigma_0(u_{\nu+1}) \\ \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) \dots & \sigma_1(u_{\nu+1}) \\ \sigma_2(u_1) & \sigma_2(u_2) \dots & \sigma_2(u_{\nu+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) \dots & \sigma_\nu(u_{\nu+1}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι πάλιν πεπερασμένος καὶ αἱ τιμαὶ αὗται δέον διὰ τοῦτο νὰ θεωρῶνται ἐξαιρετικαί.

4) Ἐπικαλοῦμαι τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν ἐπὶ τῆς ἐν τῷ ἔργῳ τούτῳ δειχθείσης ἀναλογίας μεταξὺ τοῦ θεωρήματος τοῦ Lindemann καὶ τῆς μερικῆς περιπτώσεως τοῦ θεωρήματος τοῦ κ. Borel, περὶ ἧς ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἐποιησάμεθα λόγον· ἐπίσης οὐδένα διαφεύγει ἡ σπουδαιότης τῆς ἁρμονίας μεταξὺ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν, ἁρμονίας, ἥτις δύναται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς τὴν θεμελίωσιν θεωριῶν βαρυσημάντων ἐπὶ τῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν.

Τῷ ὄντι, τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Lindemann δὲν ἀντιστοιχεῖ εἰμὴ εἰς μίαν μόνον μερικὴν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος τοῦ κ. Borel, δέον νὰ ἑλκύσῃ τὴν προσοχήν μας καὶ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἀφετηρία τῶν σκέψεών μας.

Τὸ θεώρημα τοῦ κ. Borel ἐν ὅλῃ του τῇ γενικότητι συνίσταται εἰς τὸ ἀδύνατον ταυτότητος τῆς μορφῆς:

$$Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \dots + Q_n(z)e^{H_n(z)} = 0 \quad (22)$$

ἔνθα τὰ $Q_1(z)$, $Q_2(z)$, . . $Q_n(z)$ σημαίνουσιν ἀκεραίας συναρτήσεις βαθμοῦ ἀπειρισμοῦ κατωτέρου τοῦ $e^{\mu(r)}$, αἱ δὲ συναρτήσεις $H_1(z)$, $H_2(z)$ . . $H_n(z)$ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιαι βαθμοῦ ἀπειρισμοῦ (ordre de croissance ἢ ordre de grandeur) ἀνωτέρου τοῦ $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, τοῦ α σημαίνοντος θετικὸν ἀριθμὸν τυχόντα καὶ τοῦ $\mu(r)$ συνάρτησιν τοῦ μέτρου $r = |z|$ πάντοτε αὔξουσαν (croissante) μετὰ τοῦ r (¹).

Λέγομεν ὅτι μία συνάρτησις ἀκεραία $G(z)$ ἔχει βαθμὸν ἀπειρισμοῦ (degré de croissance ἢ ordre de grandeur) μικρότερον τοῦ $e^{\mu(r)}$, ὅταν τὸ μέγιστον μέτρον αὐτῆς (module maximum) διὰ $|z| = r$ μένῃ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ r καὶ ἐφεξῆς μικρότερον τοῦ $e^{\mu(r)}$.

Εἰδικώτερον, λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $G(z)$ ἔχει *τάξιν* ἢ *βαθμὸν ἀπειρισμοῦ* ρ, ὅταν τὸ μέγιστον μέτρον αὐτῆς $M(r)$ ἐπαληθεύῃ τὰς ἀνισότητας:

(¹) Ὅρα: E. Borel: Sur les zéros des fonctions entières. Acta mathematica, tome 20.

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}} \qquad (23)$$

τὴν μὲν πρώτην ἀπό τινος τιμῆς τοῦ r καὶ ἐφεξῆς (τιμῆς, ἥτις ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ αὐθαιρέτως μικροῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε), τὴν δὲ δευτέραν διὰ μίαν ἄπειρον σειρὰν τιμῶν τοῦ r μέτρου ἀπεριορίστως αὐξανομένου (¹).

Ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς *τάξιν* ἀκεραίας συναρτήσεως ἐννοοῦμεν τὴν τάξιν ἀπειρισμοῦ αὐτῆς καὶ ὄχι τὴν *πραγματικὴν τάξιν*, ἥτις μόνον ἐκ τῶν μηδενικῶν αὐτῆς ἐξαρτᾶται καὶ ἰσοῦται τῷ ἐκθέτῃ συγκλίσεως (exposant de convergence) τῆς σειρᾶς τῶν μέτρων τῶν μηδενικῶν.

Ἔργον σπουδαιότατον θὰ ἦτο μία γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Lindemann ἔχουσα ὡς ἀποτέλεσμα τὴν τελείαν ἀναλογίαν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ κ. Borel, θεωρουμένου ἐν τῇ γενικῇ αὐτοῦ περιπτώσει· φρονῶ ὅτι μία τοιαύτη ἔρευνα ἤθελεν ὁδηγήσει ἡμᾶς εἰς μίαν διάταξιν τῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν ἀνάλογον τῇ τῶν ὑπερβατικῶν ἀκεραίων συναρτήσεων. Ἐν τῷ παρόντι ἔργῳ δὲν θὰ ἐξετάσω τὸ ζήτημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον χρήζει πολλῆς μελέτης.

Θὰ περάνω τὸ ἔργον τοῦτο διὰ μιᾶς παρατηρήσεως λίαν ἐνδιαφερούσης ἐπὶ ἑνὸς προβλήματος παρεμβολῆς, ὅπερ παρουσιάζεται εἰς πλεῖστα ζητήματα.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

5) Γνωστὸν τυγχάνει ὅτι, ἐὰν δοθῶσι δύω ἀπεριόριστοι σειραὶ ἀριθμῶν:

(¹) Διὰ τὰς θεωρίας ταύτας παραπέμπω τὸν ἀναγνώστην εἰς τὰ παγκοσμίου φήμης συγγράμματα τοῦ κ. Borel ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων [Leçons sur les fonctions entières et les fonctions meromorphes, Paris, Gauthier-Villars].

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ldots\ \alpha_n\ \ldots\ldots \\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ldots\ \beta_n\ \ldots\ldots \end{array} \qquad (24)$$

τοιαῦται ὥστε τὸ μέτρον τοῦ α_n νὰ αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον μετὰ τοῦ n, ὑπάρχει πάντοτε ἀκεραία τις συνάρτησις $f(z)$, ἥτις διὰ $z=\alpha_n$ λαμβάνει τιμὴν ἴσην τῷ β_n $(n=1, 2, \ldots \infty)$. Ἡ συνάρτησις αὕτη δίδεται ὑπὸ τοῦ ἑξῆς τύπου:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta_n \varphi(z)}{(z-\alpha_n)\ \varphi'(\alpha_n)} \qquad (25)$$

τοῦ $\varphi(z)$ δηλοῦντος συνάρτησιν ἀκεραίαν μηδενιζομένην διὰ $z=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n \ldots$

Εὐνόητον ἐστὶ ὅτι, ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν ἄπειροι συναρτήσεις δεχόμεναι ὡς μηδενικὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \ldots$, αἱ συναρτήσεις $f(z)$, αἵτινες λύουσι τὸ πρόβλημα, εἶναι ἐπίσης ἄπειροι.

Ὁ κ. E. Borel ἀπέδειξε ἐν τῇ Thèse αὐτοῦ ὅτι ἡ σειρὰ (25) δύναται πάντοτε νὰ γίνῃ συγκλίνουσα διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ $\varphi(z)$ διὰ $\varphi(z)\ \Theta(z)$, τοῦ $\Theta(z)$ ὄντος πολυωνύμου ἢ ἀκεραίας τινος συναρτήσεως κατὰ τὰς περιστάσεις [1].

Ἐὰν τὸ ὅριον τοῦ α_n δὲν εἶναι τὸ ἄπειρον (διὰ $n=\infty$) ἀλλ' ἀριθμός τις πεπερασμένος h, ὑπάρχει ἀκεραία συνάρτησις λύουσα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πρόβλημα;

Ἀκεραία καλεῖται μία συνάρτησις, ἐὰν δὲν ἔχῃ εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν οὐδὲν ἀνώμαλον σημεῖον· εἰς τὰς ὑπερβατικὰς ἀκεραίας συναρτήσεις τὸ ∞ εἶναι κύριον ἀνώμαλον σημεῖον ἢ σημεῖον ἀπροσδιοριστίας [2] (point singulier essentiel ou point d'indétermination), εἰς δὲ τὰ πολυώνυμα τὸ ∞ εἶναι ἁπλοῦς πόλος.

---

(1) Πλείστας ἐνδιαφερούσας παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου δύναται νὰ ἴδῃ ὁ ἀναγνώστης ἔν τινι ἀνακοινώσει τοῦ κ. Borel εἰς τὴν γαλλικὴν ἀκαδημίαν τῶν ἐπιστημῶν (Comptes rendus, 29 Mars 1897. Sur un problème d'interpolation).

(2) Ὅρα τὸν ὁλοκληρ. λογισμὸν τοῦ κ. Ἰωάν. Χατζιδάκη, τόμον I, σελίδα 431.

Δυνάμεθα πάντοτε διὰ δύω ὁμογραφικῶν μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς:

$$z = \alpha\zeta + \beta \qquad f(z) = AF(z) + B \qquad [\alpha, \beta, A, B \text{ σταθεραὶ}]$$

νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $h = 1$ καὶ ὅτι τὸ β_n τείνει εἰς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $\frac{1}{n}$. Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(z)$, ἥτις εἰσέρχεται ἐν τῷ τύπῳ (25), δὲν δύναται ἐν τῇ προκειμένῃ περιπτώσει νὰ εἶναι ἀκεραία, διότι αἱ ἀκέραιαι συναρτήσεις δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄπειρον ἀριθμὸν μηδενικῶν ἔν τινι πεπερασμένῳ τόπῳ τοῦ ἐπιπέδου τῶν z· ἡ $\varphi(z)$ θὰ εἶναι ἐνταῦθα συνάρτησις ἔχουσα ὡς κύριον ἀνώμαλον σημεῖον ἢ σημεῖον ἀοριστίας τὸ $z = 1$. Διὰ τοῦτο ὁ τύπος (25) δὲν δίδει ἐν γένει ἀκεραίας συναρτήσεις.

6) Ποῖαι εἶναι αἱ ἀπαιτούμεναι συνθῆκαι ἵνα ὑπάρχῃ ἀκεραία συνάρτησις λύουσα τὸ προκείμενον πρόβλημα;

Ἰδοὺ τὸ ζήτημα τὸ ὁποῖον προτίθεται ἡμῖν καὶ τὸ ὁποῖον παρουσιάσθη ἐν ταῖς ἐρεύναις μου ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων.

Θὰ ἐκθέσω ἐν τοῖς ἑπομένοις μέθοδον ἄγουσαν ἡμᾶς εἰς μίαν ἀναγκαίαν συνθήκην ἀρκετὰ ἐνδιαφέρουσαν.

Χάριν συντομίας θὰ λέγω ὅτι μία συνάρτησις $\sigma(n)$ τοῦ n τείνει εἰς τὸ μηδὲν (ὅταν τὸ n αὐξάνῃ ἐπ' ἄπειρον) μὲ *ταχύτητα ἀκεραίαν,* ὅταν ἡ $\sqrt[n]{\sigma(n)}$ τείνει ὡσαύτως εἰς μηδὲν μετὰ τοῦ $\frac{1}{n}$.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει ἀκεραία τις συνάρτησις διδομένη ὑπὸ τῆς σειρᾶς:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \tag{26}$$

καὶ πληροῦσα πάντα τὰ δοθέντα ἐπιτάγματα. Θὰ ἔχωμεν:

$$f(\alpha_1) = \beta_1, \ f(\alpha_2) = \beta_2, \ f(\alpha_3) = \beta_3, \dots f(\alpha_n) = \beta_n \dots \tag{27}$$

τὸ δὲ c_n θὰ τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν μὲ ταχύτητα ἀκεραίαν.

Τὴν ἰσότητα:

$$\left(c_0 + c_1 \alpha_n + c_2 \alpha_n^2 + \ldots + c_n \alpha_n^n\right) +$$
$$+ \; c_{n+1} \alpha_n^{n+1} + c_{n+2} \alpha_n^{n+2} + \ldots = \beta_n \qquad (28)$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλως, ἐὰν θέσωμεν:

$$K_n = c_0 + c_1 \alpha_n c_2 \alpha_n^2 + \ldots + c_n \alpha_n^n$$

$$R_n = c_{n+1} \alpha_n^{n+1} + c_{n+2} \alpha_n^{n+2} + \ldots$$

διότι ἔχομεν:

$$K_n = (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n) + c_1(\alpha_n - 1) + c_2(\alpha_n^2 - 1) + \ldots$$
$$+ \; c_n(\alpha_n^n - 1)$$

$$\text{ἢ} \quad K_n = S_n \left[1 + \frac{c_1(\alpha_n - 1) + c_2(\alpha_n^2 - 1) + \ldots + c_n(\alpha_n^n - 1)}{S_n} \right]$$

$$K_n = S_n \Big[1 + \frac{\alpha_n - 1}{S_n} \Big(c_1 + c_2(\alpha_n + 1) + \ldots$$
$$+ \; c_n (1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^{n-1}) \Big) \Big]$$

καὶ $K_n = S_n \left(1 + \frac{\alpha_n - 1}{S_n} \vartheta_n \right)$ τοῦ ϑ_n τείνοντος εἰς τὸ αὐτὸ

ὅριον εἰς ὃ καὶ ἡ ποσότης: $c_1 + 2c_2 + \ldots + nc_n$
δηλαδὴ εἰς τὸ $f'(1)$.

Ὅσον δ' ἀφορᾷ τὸ R_n, τὸ γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$R_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+1}\left(\alpha_n^{n+1} - 1\right) + $$
$$+ c_{n+2}\left(\alpha_n^{n+2} - 1\right) + \dots$$

$$\text{ἢ } R_n = -S_n + c_{n+1}\left(\alpha_n^{n+1} - 1\right) +$$
$$+ c_{n+2}\left(\alpha_n^{n+2} - 1\right) + \dots$$

διότι εἶναι: $\quad c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + c_{n+1} + \dots = 0.$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$R_n = -S_n + (\alpha_n - 1)\left[c_{n+1}\left(1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \dots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \alpha_n^n\right) + \dots\right]$$

Ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ ἴδῃ τις ὅτι πάντες οἱ ὅροι τῆς μεγάλης ταύτης παρενθέσεως τείνουσιν εἰς τὸ μηδὲν μετὰ ταχύτητος ἀκεραίας, διότι ἡ ποσότης $1 + \alpha_n + \dots + \alpha_n^{n+m}$ δὲν δύναται νὰ τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον μὲ ταχύτητα ἀκεραίαν, δηλαδὴ ἡ

$$\sqrt[n+m]{1 + \alpha_n + \dots + \alpha_n^{n+m}} \qquad \left[m = 0, 1, 3, \dots \infty\right]$$

δὲν τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἐνῷ ἡ $\sqrt[n+m]{c_{n+m+1}}$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ὑποθέσεως. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν:

$$R_n = -S_n + (\alpha_n - 1)\ \varepsilon\ (^1)$$

(1) Ὅτι ἡ ἐν τῷ τύπῳ τούτῳ εἰσερχομένη ποσότης ε τείνει εἰς τὸ μηδέν, τοῦτο βλέπει τις καὶ ἀμέσως παρατηρῶν ὅτι:

$$\text{ὅρ. } \varepsilon = \text{ὅρ. } \left[(n+1)\, c_{n+1} + (n+2)\, c_{n+2} + (n+3)\, c_{n+3} + \dots\right]$$

τοῦ ε τείνοντος εἰς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $\frac{1}{n}$ καὶ ἡ ἰσότης (28) θὰ γίνῃ:

$$S_n + (\alpha_n - 1)\vartheta_n - S_n + (\alpha_n - 1)\,\varepsilon = \beta_n$$

$$\text{ἢ} \qquad (\alpha_n - 1)(\vartheta_n + \varepsilon) = \beta_n$$

τὸ $\vartheta_n + \varepsilon$ εἶναι ποσότης ἔχουσα πεπερασμένον ὅριον τὸ $f'(1)$ καὶ ἡ ἰσότης αὕτη μᾶς λέγει ὅτι τὸ ἀπειροστὸν β_n δὲν πρέπει νὰ εἶναι τάξεως κατωτέρας τοῦ ἀπειροστοῦ $\alpha_n - 1$.

Ἰδοὺ μία ἀναγκαία συνθήκη πολλοῦ λόγου ἀξία.

7) Ἐν ἑνὶ ὑπομνήματι δημοσιευθησομένῳ προσεχῶς ἐν γαλλικῷ περιοδικῷ θέλω δείξῃ πῶς ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς, ἥτις τόσας ὑπηρεσίας παρέσχεν ἡμῖν ἔν τε τῷ ἔργῳ τούτῳ καὶ ἐν ταῖς ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν συναρτήσεων ἐρεύναις μου, ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν ἀναγκαίων συνθηκῶν μᾶλλον προσδιοριστικῶν ἢ ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 11 Δεκεμβρίου 1904.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ι. ΡΕΜΟΥΝΔΟΣ