τῶν κειμένων τοῦ Ἀκριτ. ἔπους, ἔνθα καὶ παρατίθεται ὁλόκληρον τὸ ᾆσμα. Πρβλ. αὐτόθι σχετικὰ χωρία ἐν σελ. 215 στίχ. 91 ἑξ. καὶ σελ. 216, στίχ. 161 ἑξ.

[4] Πρβλ. ὡσαύτως ἐν Β' τόμῳ Ἀκρίτα, σελ. 231, ᾆσμα Δ - ια': Ἡ ἀπαγωγὴ τῆς κόρης τοῦ στρατηγοῦ, στίχ. 87: «Ἀπροίκιστην τὴν ἤθελα κι' ἀπροίκιστην τὴν παίρνω».

[5] Τὰ χωρία τοῦ Ἡλιοδώρου, εἰς τὰ ὁποῖα διεπίστωσα σχέσεις πρὸς τὰ κείμενα τοῦ Ἀκριτ. ἔπους ἀνέρχονται μέχρις ὥρας εἰς περισσότερα τῶν ἑξήκοντα. Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ἐπίσης καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ ὁμοιότητες ἐμφανίζονται στενότεραι μὲ τὸ κείμενον Κρυπτοφέρρης καὶ χαλαρώτεραι πρὸς τὰ ἄλλα κείμενα τοῦ Ἔπους.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE — **Les corpuscules à structure multipolaire en relativité restreinte,** *par A. Papapétrou**, presentée par C. Maltézos.

1. Lubański[1] a donné une méthode particulièrement élégante pour l'étude au point de vue relativiste des corpuscules, dont la structure intérieure ne peut simplement être caracterisée par un pôle de masse, mais exige en outre l'introduction de grandeurs bipolaires. Cette méthode s'était d'abord appuyée sur les équations approchées de la théorie de gravitation d'Einstein:

$$\Box\, \varphi_{\alpha\beta} = -2\,\varkappa\, T_{\alpha\beta}\ , \quad \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0\ , \tag{1}$$

$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}$ potentiel du champ de gravitation, $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ tenseur de matière, $\varkappa$ constante de gravitation. Plus tard on a pu démontrer[2] que la dépendance avec la théorie de gravitation n'était qu'apparente, et que cette méthode ressort de la relativité restreinte, où elle permet une discussion complète du problème des corpuscules à structure multipolaire. Quant à l'intérêt physique de ces corpuscules il suffit de remarquer que, d'après les résultats d'une série de publications de Hönl et Papapétrou[3], un corpuscule à structure mono-bipolaire doit être considéré comme le modèle de l'électron magnétique de Dirac.

Dans l' étude qui suit nous donnerons une méthode de solution plus simple des équations de Lubański pour le cas des corpuscules mono-bipolai-

---

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ, Τὰ σωμάτια πολλαπλῆς πολικῆς δομῆς ἐν τῇ εἰδικῇ σχετικότητι.

[1] *J. Lubański*, Acta Physica Polonica 6 (1937), 356; dans la suite cité comme L.

[2] *A. Papapétrou* et *H. Hönl*, ZS. f. Phys. 114 (1939), 478; A. Papapétrou, Praktika de l'Académie d'Athènes 14 (1939), 540.

[3] *ZS* f. Phys. 112 (1939), 512; 114 (1939), 478; 116 (1940), 153; dans la suite comme I, II, III.

res méthode qui pourra être généralisée pour des structures multipolaires plus compliquées. Nous donnerons ensuite une propriété générale des corpuscules mono-bipolaires et enfin nous étudierons brièvement les corpuscules comportant des éléments quadripolaires.

2. Reprenons les points principaux de la méthode de Lubański. Nous étudions un corpuscule isolé, dont le mouvement (dans l'espace à quatre dimensions) soit représenté par une courbe K. Nous avons alors, pour tous les points (x_α) extérieurs à K, $T_{\alpha\beta} = 0$, et par conséquent au lieu de (1):

$$\Box\,\varphi_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad . \tag{2}$$

Soit, comme dans l. c. I, (X) le point retardé de K correspondant au point (x_α) de l'espace, et u_α la vitesse du corpuscule quand il se trouve au point (X_α) de K:

$$u_\alpha = \frac{d X_\alpha}{ds} \qquad (u_\alpha u^\alpha = 1) \tag{3}$$

A l'aide de ces grandeurs nous définissons le vecteur $l_\alpha = X_\alpha - x_\alpha$ et la grandeur scalaire $n = l_\alpha u^\alpha$, fonctions uniformes du point (x_α) de l'espace. Nous rappelons ici les règles de différentiation I (20) jusqu'à I (22), qui nous seront souvent utiles dans la suite:

$$\frac{\partial l_\alpha}{\partial x_\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + \frac{u_\alpha l_\beta}{n} \ , \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \dot{f}\frac{l_\alpha}{n} \ , \quad \frac{\partial n}{\partial x^\alpha} = -u_\alpha + \frac{l_\alpha}{n}(1 + l_\nu \dot{u}^\nu). \tag{4}$$

On peut alors démontrer l'identité fondamentale L (14):

$$\Box\,\frac{f}{n} = 0 \ , \tag{5}$$

valable pour tous les points (x_α) extérieurs à K, où f représente une fonction quelconque du temps propre s du corpuscule. Cette identité est le point de départ de la méthode Lubański. Celui-ci remarque que, puisque le tenseur $\varphi_{\alpha\beta}$ correspondant à un simple pôle de masse est de la forme $\varphi_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{n}$, on aura pour un corpuscule à structure mono-bipolaire:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{n} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{M_{\lambda\alpha\beta}}{n}\right) \ . \tag{6}$$

La première des équations (2) est alors identiquement vérifiée, tandis que la seconde nous permettra de déterminer les grandeurs caractéristiques du corpuscule. L'idée directrice de la méthode est la suivante: Le calcul de la quantité

$\frac{\vartheta\varphi_{\alpha\beta}}{\vartheta x_\beta}$ conduit à des termes, qui à une certaine distance du corpuscule se comportent comme des puissances de $\frac{1}{n}$ à exposants différents; la deuxième des (2) exige alors, que le coefficient de chacune des puissances $\frac{1}{n^\nu}$ soit égal à zéro. Les équations ainsi obtenues conduisent finalement dans les publications L et I après un calcul direct assez long aux résultats cherchés.

Dans la présente étude nous ferons usage d'une méthode plus simple, dans laquelle le terme en $\frac{1}{n^\nu}$ sera ramené successivement à la forme $\frac{1}{n^{\nu-1}}$. Nous notons ici les équations suivantes, qui nous seront utiles pour le calcul des coefficients de ces termes:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{A(s)}{n}\right] = -\frac{1}{n^2}\cdot A\left(u^\beta - \frac{l^\beta}{n} + \frac{1}{n}\left(\dot{A}\frac{l^\beta}{n} - A\frac{l^\beta}{n}\frac{l_\nu \dot{u}^\nu}{n}\right)\right), \qquad (7^\alpha)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\beta}\left[\frac{A}{n}\right] = \frac{1}{n^3}\cdot A\left[\delta^{\lambda\beta} + 2u^\lambda u^\beta - 3\left(u^\lambda\frac{l^\beta}{n} + \frac{l^\lambda}{n}u^\beta\right) + 3\frac{l^\lambda l^\beta}{n^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left[\ldots\right] + \ldots, \qquad (7^\beta)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\beta}\left[\frac{A}{n}\right] = \frac{1}{n^4}\cdot 3A\left[\delta^{\lambda\mu}u^\beta + \delta^{\mu\beta}u^\lambda + \delta^{\beta\lambda}u^\mu - \left(\delta^{\lambda\mu}\frac{l^\beta}{n} + \delta^{\mu\beta}\frac{l^\lambda}{n} + \right.\right.$$
$$\left. + \delta^{\beta\lambda}\frac{l^\mu}{n}\right) - 4\left(u^\lambda u^\mu\frac{l^\beta}{n} + u^\mu u^\beta\frac{l^\lambda}{n} + u^\beta u^\lambda\frac{l^\mu}{n}\right) + 2u^\lambda u^\mu u^\beta + 5\left(u^\lambda\frac{l^\mu l^\beta}{n^2} + \right.$$
$$\left.\left. u^\mu\frac{l^\beta l^\lambda}{n^2} + u^\beta\frac{l^\lambda l^\mu}{n^2}\right) - 5\frac{l^\lambda l^\mu l^\beta}{n^3}\right] + \ldots \qquad (7^\gamma)$$

3. Considérons d'abord le corpuscule mono-bipolaire correspondant à (6). Lubański a introduit une décomposition des tenseurs $M_{\alpha\beta}$ et $M_{\lambda\alpha\beta}$ suivant les composantes de la vitesse u_α, et a montré par une discussion détaillée qu'il suffit, sans restreindre aucunement la généralité, de poser:

$$M_{\lambda\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\lambda\alpha}u_\beta + \tilde{\eta}_{\lambda\beta}u_\alpha + p_\lambda u_\alpha u_\beta \qquad (8)$$

avec les relations supplémentaires suivantes:

$$\tilde{\eta}_{\lambda\alpha}u^\alpha = 0,\ \tilde{\eta}_{\lambda\alpha}u^\lambda = 0\ ,\ p_\lambda u^\lambda = 0\ ;\ \tilde{\eta}_{\lambda\alpha} = -\tilde{\eta}_{\alpha\lambda}\,. \qquad (8^\alpha)$$

Pour $M_{\alpha\beta}$ on aura à introduire la décomposition complète:

$$M_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} + \eta_\alpha u_\beta + \eta_\beta u_\alpha + m u_\alpha u_\beta,\ (m_{\alpha\beta}u^\alpha,\ m_{\alpha\beta}u^\beta,\ \eta_\alpha u^\alpha = 0\ ;\ m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}) \qquad (9)$$

En tenant compte de (8) et (9) la deuxième des équations (2) devient:

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{M_{\alpha\beta}}{n}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\beta}\left[\frac{\bar{\eta}_{\lambda\alpha} u_\beta + \bar{\eta}_{\lambda\beta} u_\alpha + p_\lambda u_\alpha u_\beta}{n}\right] = 0$$

La sommation sur λ et β fait disparaître, en tenant compte de (8_α), le deuxième terme du crochet; les deux autres termes contenant le facteur u_β se ramènent, à cause de L (26), à la forme monopolaire, et l' équation prend la forme simple:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{n}\right) = 0 \;, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + \dot{}(u_\alpha p_\beta) - \dot{\bar{\eta}}_{\alpha\beta} \; . \tag{10}$$

Cette équation équivaut, d'après (7_α), aux deux équations suivantes:

$$\Lambda_{\alpha\beta}\left(u^\beta - \frac{1^\beta}{n}\right) = 0 \;, \quad \dot{\Lambda}_{\alpha\beta}\frac{1^\beta}{n} - \Lambda_{\alpha\beta}\frac{1^\beta}{n}\frac{1_\nu \dot{u}^\nu}{n} = 0 \, . \tag{11}$$

dont la première se laisse transformer comme suit:

$$(\Lambda_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\nu} u^\nu u_\beta)\, 1^\beta = 0 \;,$$

et équivaut, comme on démontre aisément à:

$$\Lambda_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\nu} u^\nu u_\beta = 0 \; . \tag{11_α}$$

De la même manière on trouve l'équation, équivalente à la seconde de (11):

$$\dot{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\nu} u^\nu \dot{u}_\beta = 0 \; . \tag{11_β}$$

Les équations (11_α) et (11_β) conduisent immédiatement aux expressions de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement du corpuscule. On trouve, en dérivant (11_α) et après déduction de (11_β):

$$\Lambda_{\alpha\nu} u^{\nu} = \text{const} \; .$$

Cette relation exprime la loi de la quantité de mouvement, et prend, en tenant compte de (9) et (10), l'expression suivante:

$$\frac{1}{c} p_\alpha = \Lambda_{\alpha\nu} u^\nu = n_\alpha + \dot{m} u_\alpha + u_\alpha p_\nu \dot{u}^\nu - \dot{\bar{\eta}}_{\alpha\nu} u^\nu = \text{const.} \tag{12^α}$$

La valeur de n_α se calcule en multipliant (11_α) par u^α, et l'on est amené finalement à l'équation I (43) [1]:

$$\frac{1}{c} P_\alpha = m u_\alpha + 2 \dot{p}_\nu u^\nu u_\alpha - \dot{p}_\alpha - 2 \dot{\bar{\eta}}_{\alpha\nu} u^\nu = \text{const.} \tag{12}$$

Nous écrivons maintenant la loi des moments:

[1] Les signes contraires des termes en P_α et $\bar{\eta}_{\alpha\beta}$ proviennent de la différence des notations utilisées dans (8) et I (29_β). On a écrit dans I (29_β) par erreur $n^{\lambda\alpha} u^\beta + n^{\lambda\beta} u^\alpha$ au lieu de $n^{\alpha\lambda} u^\beta + n^{\beta\lambda} u^\alpha$.

$$J_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + X_\alpha P_\beta - P_\alpha X_\beta = \text{const.} \qquad (13)$$

Si l'on calcule la dérivée selon s, il résulte:

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = P_\alpha u_\beta - u_\alpha P_\beta \ .$$

Ou encore, à cause de (12_α), (11_α) et (10):

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = c\,(\Lambda_{\alpha\beta} - \Lambda_{\beta\alpha}) = c \cdot (u_\alpha p_\beta - p_\alpha u_\beta - 2\bar{\eta}_{\alpha\beta})$$

Nous retrouvons ainsi l'équation II (53):

$$S_{\alpha\beta} = c(u_\alpha p_\beta - p_\alpha u_\beta - 2\bar{\eta}_{\alpha\beta}) \qquad (14)$$

en vertu de laquelle l'équation (13) devient:

$$J_{\alpha\beta} = c(u_\alpha p_\beta - p_\alpha u_\beta - 2\bar{\eta}_{\alpha\beta}) + X_\alpha P_\beta - P_\alpha X_\beta = \text{const.} \qquad (15)$$

4. La solution mono-bipolaire décrite par (12) et (15), à l'aide des deux grandeurs indépendantes P_α et $\bar{\eta}_{\alpha\beta}$, posséde une propriété remarquable: On peut arriver à un corpuscule exécutant un mouvement *donné d'avance* et possédant des valeurs de P_α et $J_{\alpha\beta}$ *aussi données,* à condition de faire pour P_α et $\bar{\eta}_{\alpha\beta}$ un choix de valeurs convenable. On trouve en effet après multiplication de (15) par u^β:

$$cp_\alpha = X_\alpha P_\nu u^\nu - P_\alpha X_\nu u^\nu - J_{\alpha\nu} u^\nu \ , \qquad (16_\alpha)$$

et en faisant usage de (15) et (16_α):

$$2c\bar{\eta}_{\alpha\beta} = X_\alpha P_\beta - P_\alpha X_\beta + (u_\alpha X_\beta - X_\alpha u_\beta) P_\nu u^\nu - (u_\alpha P_\beta - P_\alpha u_\beta) X_\nu u^\nu +$$

$$J_{\alpha\nu} u^\nu u_\beta - J_{\beta\eta} u^\nu u_\alpha - J_{\alpha\beta} \qquad (16_\beta)$$

Ces valeurs de P_α et $\bar{\eta}_{\alpha\beta}$ satisfont également à l'équation (12), si l'on tient compte de la signification de m, qu'on détermine en multipliant les deux membres de (12) par u^α:

$$m \frac{1}{c} P_\nu u^\nu - \dot{p}_\nu u_\nu \ .$$

Soit comme exemple une oscillation linéaire quelconque:

$$\left.\begin{aligned} & X_1 = if(\tau) \ , \ X_2 = X_3 = O \ , \ X_4 = c\tau \,; \\ & u_1 = i\beta u_4 \ , \ u_2 = u_3 = O \ , \ u_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \ \beta = \frac{df}{cdr} \end{aligned}\right| \qquad (17)$$

Le corpuscule est supposé en repos macroscopique:

$$P_1 = P_2 = P_3 = O \ , \ P_4 = \frac{E}{c} \ , \qquad (18_\alpha)$$

avec son centre de gravité à l'origine des coordonnées [1]:

$$J_{14} = J_{24} = J_{34} = 0 \;, \; (J_{23} \,, J_{31} \,, J_{12}) = -\vec{J} \,. \tag{18$^\beta$}$$

Il résulte alors des formules (16_α) et (16_β):

$$\left. \begin{array}{l} cp_1 = \dfrac{X_1 E u_4}{c}, \; cp_2 = -J_z . i\beta u_4 \;, \; cp_3 = J_y . i\beta u_4 \;, \; cp_4 \quad \dfrac{X_1 i\beta E u_4}{c}; \\ 2cn_{12} = J_z u_4^2 \,, \; 2cn_{23} = J_x \,, \; 2cn_{31} = J_y u_4^2 \,, \\ 2cn_{14} = 0 \;, \; 2cn_{24} = J_z i\beta u_4^2 \,, \; 2cn_{34} = -J_y i\beta u_4^2 \,. \end{array} \right| \tag{19}$$

Il est remarquable que ces formules ne contiennent aucune dérivation en dehors de la vitesse. Rien n'empêche par conséquent de donner à la fonction f une forme correspondant à une vitesse de valeur absolue constante, ce qui donnerait une réalisation classique assez curieuse du mouvement de tremblement de Schrödinger.

5. Nous allons maintenant étudier un corpuscule, qui contient également des éléments quadripolaires. Le tenseur $\varphi_{\alpha\beta}$ sera donc de la forme

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{n} + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{M_{\lambda\alpha\beta}}{n}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\frac{M_{\lambda\mu\alpha\beta}}{n} \,. \tag{20}$$

$M_{\alpha\beta}$ aura de nouveax la forme (9), tandis que pour $M_{\lambda\alpha\beta}$ et $M_{\lambda\mu\alpha\beta}$ nous aurons les décompositions suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} M_{\lambda\alpha\beta} = m_{\lambda\alpha\beta} + n_{\lambda\alpha} u_\beta + n_{\lambda\beta} u_\alpha + p_\lambda u_\alpha u_\beta \;, \\ M_{\lambda\mu\alpha\beta} = m_{\lambda\mu\alpha\beta} + n_{\lambda\mu\alpha} u_\beta + n_{\lambda\mu\beta} u_\alpha + p_{\lambda\mu} u_\alpha u_\beta \;; \end{array} \right\} \tag{21}$$

$$m_{\lambda\alpha\beta} u^\lambda = m_{\lambda\alpha\beta} u^\alpha = m_{\lambda\alpha\beta} u^\beta = 0 \text{ etc.}, \; m_{\lambda\alpha\beta} = m_{\lambda\beta\alpha} \,, \; m_{\lambda\mu\alpha\beta} = m_{\lambda\mu\beta\alpha} \,.$$

A cause du troisième terme de (20) le calcul de $\dfrac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$ conduit maintenant à de termes en $\dfrac{1}{n^4}$; il en résulte d'après (7_γ) l'équation suivante:

$$(m_{\lambda\mu\alpha\beta} + n_{\lambda\mu\alpha} u_\beta + n_{\lambda\mu\beta} u_\alpha + p_{\lambda\mu} u_\alpha u_\beta) \; [\cdots] = 0, \tag{22$_\alpha$}$$

où le crochet est identique au crochet du second membre de (7_γ). On vérifie immédiatement que ce crochet est orthogonal avec u_β, ce qui simplifie (22_α) comme suit:

$$(m_{\lambda\mu\alpha\beta} + n_{\lambda\mu\beta} u_\alpha) \; [\cdots] = 0 \;. \tag{22$_\beta$}$$

Si l'on remarque que le facteur entre parenthèses de (22_β) est normal à u_λ, u_μ et u_β, cette équation se simplifie de nouveau:

[1] Voir *A. Papapétrou*, Praktika de l'Académie d'Athènes 14 (1939), 540.

$$(m_{\lambda\mu\alpha\beta} + n_{\lambda\mu\beta} u_\alpha) \left[\frac{\delta^{\lambda\mu} l^\beta + \delta^{\mu\beta} l^\lambda + \delta^{\beta\lambda} l^\mu}{n} + 5 \frac{l^\lambda l^\mu l^\beta}{n^3} \right] = O \,, \qquad (22\gamma)$$

et se décompose, après multiplication par u^α, aux équations suivantes:

$$n_{\lambda\mu\beta} \left[\delta^{\lambda\mu} \frac{l^\beta}{n} + \delta^{\mu\beta} \frac{l^\lambda}{n} + \delta^{\beta\lambda} \frac{l^\mu}{n} + 5 \frac{l^\lambda l^\mu l^\beta}{n^3} \right] = O \,, \qquad (22')$$

$$m_{\lambda\mu\alpha\beta} \left[\delta^{\lambda\mu} \frac{l^\beta}{n} + \delta^{\mu\beta} \frac{l^\lambda}{n} + \delta^{\beta\lambda} \frac{l^\mu}{n} + 5 \frac{l^\lambda l^\mu l^\beta}{n^3} \right] = O \,. \qquad (22'')$$

Pour la solution de l'équation (22') nous posons

$$n_{\lambda\mu\beta} = (\delta_{\lambda\mu} - u_\lambda u_\mu) V_\beta + (\delta_{\mu\beta} - u_\mu u_\beta) Y_\lambda + (\delta_{\beta\lambda} - u_\beta u_\lambda) Z_\mu + n'_{\lambda\mu\beta} \qquad (23)$$

et on démontre aisément, qu'on peut choisir V_α, Y_α et Z_α normaux à u_α, et en même temps $n'_{\lambda\mu\beta}$ satisfaisant aux conditions:

$$n'_{\lambda\mu\beta} \delta^{\lambda\mu} = n'_{\lambda\mu\beta} \delta^{\mu\beta} = n'_{\lambda\mu\beta} \delta^{\beta\lambda} = O \,. \qquad (24\alpha)$$

Alors, puisque les trois premiers termes de (23) sont orthogonaux avec le crochet de (22'), il s'en suit:

$$n'_{\lambda\mu\beta} \frac{l^\lambda l^\mu l^\beta}{n^3} = O \,.$$

On démontre facilement, que cette condition est, à cause de l'orthogonalité

$$n'_{\lambda\mu\beta} u^\lambda = n'_{\lambda\mu\beta} u^\mu = n'_{\lambda\mu\beta} u^\beta = O \qquad (24\beta)$$

équivalente à:

$$n'_{\lambda\mu\beta} + n'_{\mu\beta\lambda} + n'_{\beta\lambda\mu} + n'_{\beta\mu\lambda} + n'_{\mu\lambda\beta} + n'_{\lambda\beta\mu} = O. \qquad (24\gamma)$$

Dans (23) le terme en $\delta_{\lambda\mu}$ peut être omis à cause de (5); les termes contenant le facteur u_λ où u_μ se ramènent, d'après L (26), à la forme bipolaire; enfin, à cause de la sommation sur λ et μ, on peut écrire $\delta_{\mu\beta} Z_\lambda$ au lieu de $\delta_{\beta\lambda} Z_\mu$, et associer ce terme avec $\delta_{\mu\beta} Y_\lambda$. Il en résulte finalement:

$$n_{\lambda\mu\beta} = Y_\lambda \delta_{\mu\beta} + n'_{\lambda\mu\beta} \,. \qquad (25)$$

Nous remarquons de nouveau que $Y_\lambda u^\lambda = O$, et $n'_{\lambda\mu\beta}$ satisfait aux conditions (24α), (24β) et (24γ).

Pour la solution de (22'') nous posons

$$m_{\lambda\mu\alpha\beta} = (\delta_{\lambda\mu} - u_\lambda u_\mu) V_{\beta\alpha} + (\delta_{\mu\beta} - u_\mu u_\beta) Y_{\lambda\alpha} + (\delta_{\beta\lambda} - u_\beta u_\lambda) Z_{\mu\alpha} + m'_{\lambda\mu\alpha\beta} \,; \qquad (26\alpha)$$

les $V_{\lambda\mu}$, $Y_{\lambda\mu}$ et $Z_{\lambda\mu}$ seront orthogonaux avec u_λ et u_μ, et de plus tels que

$$m'_{\lambda\mu\alpha\beta} \delta^{\lambda\mu} = m'_{\lambda\mu\alpha\beta} \delta^{\mu\beta} = m'_{\lambda\mu\alpha\beta} \delta^{\beta\lambda} = O \,;$$

l'équation (22'') se ramène alors à la forme

$$m'_{\lambda\mu\alpha\beta}\frac{1^{\lambda}1^{\mu}1^{\beta}}{n^3}=O\ ,$$

qui est équivalente à

$$m'_{\lambda\mu\alpha\beta}+m'_{\mu\beta\alpha\lambda}+m'_{\beta\lambda\alpha\mu}+m'_{\beta\mu\alpha\lambda}+m'_{\mu\lambda\alpha\beta}+m'_{\lambda\beta\alpha\mu}=O\ .$$

Finalement les seuls termes de (26_α), qui influent sur le terme quadripolaire de (20) sont les suivants :

$$m_{\lambda\mu\alpha\beta}=\delta_{\mu\beta}Y_{\lambda\alpha}+\delta_{\beta\lambda}Z_{\mu\alpha}+m'_{\lambda\mu\alpha\beta}\ .$$

Mais tous ces termes s'annulent dans le calcul de $\frac{\vartheta\varphi_{\alpha\beta}}{\vartheta x_\beta}$ et n'ont par conséquent aucune signification physique. Nous pouvons donc les laisser de côté et poser

$$m_{\lambda\mu\alpha\beta}=O\ . \tag{26}$$

En tenant compte de (25) et (26) le terme quadripolaire de (20) conduit dans $\frac{\vartheta\varphi_{\alpha\beta}}{\vartheta x_\beta}$ à l'expression

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\beta}\left[\frac{1}{n}\left(Y_\lambda\delta_{\mu\alpha}u_\beta+n'_{\lambda\mu\alpha}u_\beta+Y_\lambda\delta_{\mu\beta}u_\alpha+n'_{\lambda\mu\beta}u_\alpha+p_{\lambda\mu}u_\alpha u_\beta\right)\right]\ .$$

A cause de la sommation sur λ, μ, β les termes $Y_\lambda\ \delta_{\mu\beta}u_\alpha+n'_{\lambda\mu\beta}\,u_\alpha$ disparaissent, voir (5) et (24_γ) ; les autres termes possédent le facteur u_β et se ramenent d'après L (26) au terme bipolaire. La seconde de (2) devient donc.

$$\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{M_{\alpha\beta}}{n}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda\partial x_\beta}\left[\frac{1}{n}\left\{M_{\lambda\alpha\beta}+(Y_\lambda\delta_{\beta\alpha}+n'_{\lambda\beta\alpha}+p_{\lambda\beta}u_\alpha)\right\}\right]=O. \tag{27}$$

Nous sommes ainsi arrivés à une condition de la même forme, que l'équation correspondante du corpuscule mono-bipolaire. Dans cette condition les éléments quadripolaires sont représentés par les trois grandeurs $n'_{\lambda\mu\alpha}$, $P_{\lambda\mu}$ et Y_λ. Le tenseur $P_{\lambda\mu}$ peut être considéré comme symétrique, parcequ'une partie antisymétrique s'annulerait dans (20) à cause de la sommation sur λ, μ.

6. Le calcul de (27) conduit d'abord en tenant compte de (7_β). à l'équation :

$$(m_{\lambda\alpha\beta}+n_{\lambda\alpha}u_\beta+n_{\lambda\beta}u_\alpha+P_\lambda u_\alpha u_\beta+\dot{n}'_{\lambda\beta\alpha}+\dot{p}_{\lambda\beta}u_\alpha+P_{\lambda\beta}\dot{u}_\alpha+\dot{Y}_\lambda\delta_{\beta\alpha})\ \left[\ldots\right]\ O\ , \tag{28}$$

où le crochet est identique au crochet de (7β). Cette équation se décompose, après multiplication par u^α, aux équations suivantes :

$$(n_{\lambda\beta}+\dot{n}'_{\lambda\beta\nu}u^\nu+\dot{p}_{\lambda\beta})\left[\ldots\right]=O\ , \tag{28 α}$$

$$(m_{\lambda\alpha\beta} + n'_{\lambda\beta\alpha} - \dot{n}'_{\lambda\beta\nu}u^{\nu}u_{\alpha} + p_{\lambda\beta}\dot{u}_{\alpha} + \dot{Y}_{\lambda}\delta_{\beta\alpha}) \left[\ldots\right] . \qquad (28_{\beta})$$

La différence avec les équations correspondantes du corpuscule mono-bipolaire consiste en ce que les premiers facteurs de (27_{α}) et (27_{β}) ne sont pas orthogonaux avec u^{λ}, u^{β} et u^{α}. Mais on peut obtenir cette orthogonalité par l'addition d'identités convenables, par exemple pour (28_{α}) en introduisant l'identité

$$(-\dot{p}_{\lambda\nu}u^{\nu}u_{\beta} - \dot{p}_{\beta\nu}u^{\nu}u_{\lambda}) \left[\ldots\right] = 0 .$$

On peut alors procéder comme dans le cas du corpuscule mono-bipolaire, et écrire la solution de (28_{α}) comme suit:

$$n_{\lambda\beta} = \tilde{\eta}_{\lambda\beta} - \dot{n}'_{\lambda\beta\nu}u^{\nu} + \dot{p}_{\lambda\nu}u^{\nu}u_{\beta} + \dot{p}_{\beta\nu}u^{\nu}u_{\lambda} - \dot{p}_{\lambda\beta} , \qquad (29_{\alpha})$$

où $\tilde{\eta}_{\lambda\beta}$ est un tenseur antisymétrique nouveau[1] On trouve d'une manière analogue la solution de (28_{β}):

$$m_{\lambda\alpha\beta} = \dot{n}'_{\alpha\beta\lambda} + \dot{n}'_{\beta\alpha\lambda} - (\dot{n}'_{\alpha\beta\nu}u_{\lambda} + \dot{n}'_{\beta\alpha\nu}u_{\lambda} + \dot{n}'_{\alpha\nu\lambda}u_{\beta} + \dot{n}'_{\beta\nu\lambda}u_{\alpha} + \dot{n}'_{\nu\beta\lambda}u_{\alpha} +$$

$$+ \dot{n}'_{\nu\alpha\lambda}u_{\beta})\, u^{\nu} + p_{\alpha\beta}\dot{u}_{\lambda} - p_{\lambda\beta}\dot{u}_{\alpha} - p_{\lambda\alpha}\dot{u}_{\beta} + (\dot{Y}_{\nu}u^{\nu}u_{\lambda} - \dot{Y}_{\lambda})\; (\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha}u_{\beta}). \qquad (29_{\beta})$$

En tenant compte des valeurs (29_{α}) et (29_{β}) le dernier terme de (27) devient:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda}\partial x_{\beta}} \left[\frac{u_{\lambda}}{n} (\Pi_{\beta}u_{\alpha} + \tilde{N}_{\beta\alpha} + \bar{N}_{\beta\alpha} + \dot{Y}_{\beta}u_{\alpha}) \right] ,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\Pi_{\alpha} = p_{\alpha} + 2\dot{p}_{\alpha\nu}u^{\nu}, \quad (\Pi_{\alpha}u^{\alpha} = 0) , \qquad (30_{\alpha})$$

$$\tilde{N}_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} - (\dot{n}'_{\alpha\beta\nu} + \dot{n}'_{\beta\nu\alpha} + \dot{n}'_{\nu\beta\alpha})\, u^{\nu}, \; (\tilde{N}_{\alpha\beta}u^{\alpha} = 0, \;\; \tilde{N}_{\alpha\beta} = -\tilde{N}_{\beta\alpha}), \qquad (30_{\beta})$$

$$\bar{N}_{\alpha\beta} = \dot{p}_{\nu\alpha}u^{\nu}u_{\beta} + \dot{p}_{\nu\beta}u^{\nu}u_{\alpha} - \dot{p}_{\alpha\beta}\; (\dot{n}'_{\alpha\beta\nu} + \dot{n}'_{\beta\alpha\nu})\, u^{\nu} + \dot{Y}_{\nu}u^{\nu}(\delta_{\alpha\beta} - u_{\alpha}u_{\beta}),$$

$$\bar{N}_{\alpha\beta}\cdot u_{\alpha} = 0, \;\; \bar{N}_{\alpha\beta} = \bar{N}_{\beta\alpha}). \qquad (30_{\gamma})$$

L'équation (27) prend alors, à cause de L (26), la même forme que (10):

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left(\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{n} \right) = 0 , \qquad (31)$$

où $\Lambda_{\alpha\beta}$ a maintenant la valeur

$$\Lambda_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + \cdot\; (u_{\alpha}\Pi_{\beta} - \tilde{N}_{\alpha\beta} + \bar{N}_{\alpha\beta} + u_{\alpha}\dot{Y}_{\beta}). \qquad (31_{\alpha})$$

Nous sommes ainsi conduit de nouveau aux équations (11_{α}) et (11_{β}), qui

---

[1] Nous avons pu laissé de côté un terme de la forme $\varrho\,(\delta_{\lambda\beta} - u_{\lambda}u_{\beta})$, voir L (33), parceque il n'a pas de signification physique (discussion détaillée voir Lubański, l. c. p. 365).

nous permettrons de déterminer la quantité de mouvement et le moment de la quantité de mouvement du corpuscule. Il en résulte finalement, après quelques calculs élémentaires:

$$\frac{1}{c} P_\alpha = m u_\alpha + 2\dot{\Pi}_\nu u^\nu u_\alpha - \dot{\Pi}_\alpha - 2\dot{\tilde{N}}_{\alpha\nu} u^\nu + 2\ddot{Y}_\nu u^\nu u_\alpha - \ddot{Y}_\alpha + \dot{Y}_\nu u^\nu \dot{u}_\alpha = \text{const}, \quad (32_\alpha)$$

$$J_{\alpha\beta} = c\ (u_\alpha \Pi_\beta - \Pi_\alpha u_\beta - 2\tilde{N}_{\alpha\beta} + u_\alpha \dot{Y}_\beta - \dot{Y}_\alpha u_\beta) + X_\alpha P_\beta - P_\alpha X_\beta = \text{const}. \quad (32_\beta)$$

Remarquons que les grandeurs Π_α et $\tilde{N}_{\alpha\beta}$ entrent dans ces formules exactement de la même manière que les grandeurs P_α et $\tilde{\eta}_{\alpha\beta}$ dans les formules (12) et (15) du corpuscule mono-bipolaire. Nous arrivons ainsi au résultat, que les deux grandeurs quadripolaires $n'_{\lambda\mu\alpha}$ et $P_{\lambda\mu}$ conduisent à des corpuscules isomorphes, au point de vue de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement, au corpuscule mono-bipolaire. Mais cela n'est plus le cas pour la grandeur Y_λ, qui conduit, même à ce point de vue spécial à un corpuscule essentiellement nouveau.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Σωμάτια μὲ πολυπολικὴν δομὴν ἐν τῇ εἰδικῇ σχετικότητι.

Εἰς τὸν Lubański ὀφείλεται μία ἰδιαιτέρα μέθοδος διὰ τὴν ἔρευναν — ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῆς εἰδικῆς σχετικότητος — τῶν σωματίων, τῶν ὁποίων ἡ ἐσωτερικὴ δομὴ δὲν δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ἁπλῶς μὲ ἕνα πόλον μάζης, ἀλλὰ ἀπαιτοῦνται πρὸς τοῦτο καὶ διπολικὰ μεγέθη. Τὸ ἐνδιαφέρον ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως τοῦ *πολοδιπόλου* αὐτοῦ συνίσταται εἰς τὸ ὅτι, ὅπως προέκυψεν ἀπὸ μίαν σειρὰν ἐργασιῶν τῶν Hönl καὶ Παπαπέτρου, θὰ πρέπει αὐτὸ νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κλασσικὸν πρότυπον τοῦ μαγνητικοῦ ἠλεκτρονίου.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν δίδεται κατὰ πρῶτον μία ἁπλοποίησις τῶν ὑπολογισμῶν, ἰδιαιτέρως χρήσιμος διὰ τὴν μελέτην γενικωτέρων πολικῶν σωματίων. Κατόπιν ἀποδεικνύεται ἡ ἑξῆς γενικὴ ἰδιότης τοῦ πολοδιπόλου. Διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν δύο χαρακτηριστικῶν μεγεθῶν τῆς πολοδιπολικῆς δομῆς, τοῦ ἀνύσματος P_α καὶ τοῦ ἀντισυμμετρικοῦ τανυστοῦ $n_{\alpha\beta}$ δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς σωμάτιον κινούμενον ἐπὶ *δεδομένης* τροχιᾶς καὶ μὲ *προκαθωρισμένας* τιμὰς ποσότητος κινήσεως καὶ κινητικῆς ροπῆς.

Τέλος ἐξετάζεται ἐν συντομίᾳ σωμάτιον, τὸ ὁποῖον ἐκτὸς τοῦ πόλου μάζης καὶ διπολικῶν μεγεθῶν περιέχει ἐπίσης καὶ *τετραπολικὰ* στοιχεῖα, μὲ τὰ ἑξῆς ἀποτελέσματα: Τὸ σωμάτιον αὐτὸ περιέχει τρία ἀνεξάρτητα ἀλλήλων χαρακτηριστικὰ μεγέθη. Ἐξ αὐτῶν ὅμως τὰ δύο πρῶτα ὁδηγοῦν κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ποσότητος κινήσεως καὶ τῆς κινητικῆς ῥοπῆς εἰς παραστάσεις τῆς ἰδίας ἀκριβῶς μορφῆς πρὸς τὰς ἰσχυούσας διὰ τὸ πολοδίπολον. Μόνον δὲ τὸ τρίτον ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ ὁδηγεῖ εἰς σωμάτιον, τὸ ὁποῖον δὲν παρουσιάζει ὁμοιότητά τινα πρὸς τὸ πολοδίπολον.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **La structure intérieure des corpuscules à constitution mono-bipolaire*** *par A. Papapétrou*, presentée par C. Maltézos.

1. Pendant ces dernières années on a étudié un corpuscule, dont la structure intérieure n'est pas caractérisée tout simplement par un pôle de masse, mais comprend en outre des grandeurs bipolaires [1]. L'intérêt de l'étude de ce corpuscule consiste en ce que celui-ci fournit une image des propriétés de l'électron magnétique jusqu'à des détails très poussés, de sorte qu'il doit être considéré comme le modèle classique de celui-ci [2]. Dans l'étude générale du corpuscule mono-bipolaire on rencontre deux grandeurs indépendantes, le vecteur à 4 dimensions p_α et le tenseur antisymétrique $n_{\alpha\beta}$, tous deux orthogonaux avec la vitesse u_α du corpuscule:

$$p_\alpha u^\alpha = 0 \ , \quad n_{\alpha\beta} u^\alpha = 0 \ . \qquad (1)$$

Une discussion détaillée nous montre [3], que le vecteur p_α décrit un couple de masses égales et de signe contraire, $\pm M$, se trouvant à une distance respective très petite: Le corpuscule avec $p_\alpha \neq 0, n_{\alpha\beta} = 0$ résulte par superposition d'un pôle de masse et d'un couple $\pm M$. Pour le tenseur $n_{\alpha\beta}$ il n'a pas encore été donné une représentation détaillé analogue; on a remarqué seulement [3], que cette grandeur représente en principe un tourbillon de quantité de mouvement. Le présent travail a pour objet l'étude plus détaillée de la signification physique de la grandeur $n_{\alpha\beta}$.

---

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ, Ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς δομῆς τῶν πολοδιπολικῶν σωματίων.

[1] *M. Mathison*, Acta Physica Polonica, 6 (1937), p. 167; *J. Lubański*, Acta Physica Polonica 6 (1937), p. 356; *H. Hönl* et *A. Papapétrou*, ZS. f. Phys. 112 (1939), p. 512; 114, (1939), p. 478; 116 (1940), p. 153. Les trois derniers travaux seront cités dans la suite comme I, II, III.

[2] Voir particulièrement III.

[3] II, chap. 1 et 2.