ρικὸς Steven Runciman εἰς μικρὸν πρόλογον ἔγραψεν ὅτι εἴμεθα πολὺ ὑποχρεωμένοι εἰς τὸν συγγραφέα, διότι μᾶς ἔδειξε μὲ πλῆθος κειμένων καὶ μὲ τὴν μεγάλην εἰσαγωγὴν τοῦ πρώτου τόμου τὴν σημασίαν τοῦ μεσαιωνικοῦ κράτους τῆς Γενούης καὶ τῆς νήσου Χίου διὰ τὴν Μεσόγειον. Ἡ γνῶσις τῆς σημασίας τῆς Γενούης βοηθεῖ καὶ εἰς τὴν ἱστορικὴν κατανόησιν τῆς ἀντιπάλου Βενετίας.

Ὁ κ. Ἀργέντης ἀνήκει εἰς τὴν τετάρτην γενεὰν Χίων ποὺ ἐγκατεστάθησαν εἰς τὴν Ἀγγλίαν μετὰ τὸ 1822. Ἐσπούδασε κλασσικὴν φιλολογίαν εἰς ἀγγλικὸν πανεπιστήμιον καὶ διὰ τῆς φιλολογίας ἐγνώρισε καὶ ἐθαύμασε τὴν ἀρχαίαν Ἑλλάδα καὶ ἠθέλησε τότε νὰ γνωρίσῃ καὶ τὴν νέαν. Ἦλθεν εἰς τὴν Ἑλλάδα καὶ τὴν ὑπηρέτησε κατὰ τοὺς Βαλκανικοὺς πολέμους, ἔπειτα δ᾽ ἀφωσιώθη εἰς τὴν ἱστορίαν καὶ ὑπηρεσίαν τῆς Χίου. Σειρὰ μακρῶν μελετῶν καὶ ἐγγράφων ἐδημοσιεύθη ὑπ᾽ αὐτοῦ. Καμμία ἄλλη ἑλληνικὴ περιφέρεια δὲν ἐξηρευνήθη τόσον λεπτομερῶς ὅσον ἡ Χίος. Τὸ τρίτομον νεώτερον ἔργον αὐτοῦ περὶ τῆς Κατοχῆς τῆς Χίου ὑπὸ τῶν Γενοατῶν δὲν εἶναι τὸ τελευταῖον.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΑΡΧΑΙΟΛΟΓΙΑ.— Πότε καὶ ὑπὸ τίνων κατεστράφη τὸ βόρειον ἥμισυ τοῦ ἀνατολικοῦ ἀετώματος τοῦ «Θησείου», *ὑπὸ* ***Ἀναστ. Ὀρλάνδου.***

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Περὶ τῆς τάξεως στοιχείων μὴ Ἀβελιανῶν συμπλεγμάτων, *ὑπὸ* ***Παντ. Κ. Ρόκου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη**.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Ὁ κ. A. Chatelet διὰ τὴν ἀπόδειξιν βοηθητικῆς προτάσεως ὡρισμένου θεωρήματος τῶν p-συμπλεγμάτων τοῦ Sylow χρησιμοποιεῖ τὴν ἰσότητα:

$$(\alpha \times \beta)^{p'} = (\alpha^{p'}) \times (\beta^{p'})$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν σελ. 245 τοῦ I τόμου τοῦ βιβλίου τοῦ κ. Chatelet τὸ ὁποῖον φέρει τὸν τίτλον: Arithmétique et Algèble moderne (τὸ σύμβολον $\times$ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς πράξεως τοῦ συμπλέγματος).

---

* PANT. ROKOS, Des ordres des élements de groupes non Abelien.

** Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 12 Φεβρ. 1959.

Τὰ στοιχεῖα α καὶ β τοῦ συμπλέγματος δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικά, ἑπομένως ἡ ἰσότης αὕτη δὲν εὐσταθεῖ.

Ἡ παρατήρησις αὕτη μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὴν διατύπωσιν καὶ ἀπόδειξιν τριῶν θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 4.2, 4.4 καὶ 5.1 καὶ ἀφοροῦν τὴν τάξιν στοιχείων μὴ Ἀβελιανῶν συμπλεγμάτων.

Εἰς τὰς § 2 καὶ 3 ταξινομοῦνται καταλλήλως καὶ ἐξετάζονται διάφορα γνωστὰ θεωρήματα καὶ ὁρισμοὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου καὶ τοῦ συνενώματος συμπλόκων (complex) καὶ ὑποσυμπλεγμάτων, ἐπίσης γενικεύεται κατὰ κάποιον τρόπον ἐλαφρῶς ἡ πρότασις 2.6.2 διὰ τῆς προτάσεως 2.6.3, διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀκολούθως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀναφερθέντων θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ θέμα τῆς ἐργασίας ταύτης.

Ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης ἐπιθυμῶ νὰ εὐχαριστήσω ἰδιαιτέρως τὸν καθηγητὴν κ. Φ. Βασιλείου εἰς τὰς ὑποδείξεις τοῦ ὁποίου ὀφείλεται ἡ τελικὴ ἐμφάνισις τῆς μετὰ χεῖρας μελέτης.

§ = 2 Γινόμενον συμπλόκων.

Ὁρισμοί:

2.1 Ἄλγεβρα εἶναι ἕνα σύνολον ἐφωδιασμένον μὲ μίαν ἰσότητα καὶ πράξεις.

2.2 Σύμπλεγμα εἶναι μία ἄλγεβρα μὲ μίαν πρᾶξιν προσεταιριστικήν, μὲ μοναδικὸν οὐδέτερον στοιχεῖον καὶ μοναδικὸν ἀντίστροφον διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συμπλέγματος.

2.3 Σύμπλοκον εἶναι κάθε μὴ κενὸν ὑποσύνολον μιᾶς ἀλγέβρας.

2.4 Ὑποσύμπλεγμα ἑνὸς συμπλέγματος εἶναι ἕνα σύμπλοκον αὐτοῦ, ἀποτελοῦν καθ' ἑαυτὸ ἕνα σύμπλεγμα.

Εἰς τὰ ἑπόμενα αἱ ἄλγεβραι μὲ τὰς ὁποίας ἀσχολούμεθα εἶναι συμπλέγματα.

Παραδείγματα καὶ λεπτομέρειαι τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ὑπάρχουν εἰς τὸ [4] σελίδες 4 καὶ 5.

2.5 Γινόμενον δύο συμπλόκων A καὶ B, ἑνὸς συμπλέγματος Σ, ὀνομάζεται τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων $\alpha \times \beta$ ὅπου $\alpha \varepsilon A$ καὶ $\beta \varepsilon B$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $A \times B$ ($\times$ πρᾶξις τοῦ συμπλέγματος Σ).

2.5.1, ἤτοι τὸ γινόμενον $A \times B$, ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$\{\chi \varepsilon A \times B \rightleftarrows \chi = \alpha \times \beta,\ \alpha \varepsilon A,\ \beta \varepsilon B\}$$

Εἶναι δυνατὸν τὸ ἕνα τῶν συμπλόκων ν' ἀποτελῆται ἀπὸ ἓν μόνον στοιχεῖον π.χ. $A = \{\alpha\}$, ὁπότε γράφομεν $\alpha \times B$ ἁπλῶς καὶ ὄχι $\{\alpha\} \times B$ ([2] σελὶς 25).

Διὰ τὸ γινόμενον συμπλόκων εἶναι γνωσταὶ αἱ προτάσεις:

2.6.1 Τὸ γινόμενον δύο ὑποσυμπλεγμάτων A καὶ B ἑνὸς συμπλέγματος Σ εἶναι τότε καὶ μόνον ὑποσύμπλεγμα, ὅταν $A \times B = B \times A$

([2] εἰς τὴν §=8 καὶ [6] §=1.2.2. προτ. 7)

2.6.2 Τὸ γινόμενον ν ὑποσυμπλεγμάτων, A_1, A_2, ..., A_ν ἑνὸς συμπλέγματος Σ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, ὅταν τὰ ὑποσυμπλέγματα A_i εἶναι ἀνὰ δύο ἀντιμεταθετικά, ἤτοι $A_i \times A_k = A_k \times A_i$.

([6], §=1.2.2 προτ. 7).

Τὸ ἀντίστροφον τῆς προτάσεως αὐτῆς δὲν ἀληθεύει:

Παράδειγμα:

1) Ὁρίζομεν ἕνα σύμπλεγμα μὲ ὀκτὼ στοιχεῖα ὡς ἀκολούθως:

$\alpha^4=1$, $\beta^2=1$, $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha^3$ καὶ ἡ πρᾶξις τοῦ συμπλέγματος × εἶναι προσεταιριστική.

([1] σελὶς 247 ἄσκησις 5).

Τότε τὰ στοιχεῖα τοῦ συμπλέγματος εἶναι $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha\times\beta, \alpha^3\times\beta\}$ ἔχομεν δὲ $\beta\times\alpha=\alpha^3\times\beta$, $\beta\times\alpha^2=\alpha^2\times\beta$ καὶ $\beta\times\alpha^3=\alpha\times\beta$.

Ὑποσυμπλέγματα 2ας τάξεως εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

$$\Sigma_1=\{1, \beta\}, \Sigma_2=\{1, \alpha\times\beta\}, \Sigma_3=\{1, \alpha^2\times\beta\}$$
$$\Sigma_4=\{1, \alpha^3\times\beta\}, \Sigma_5=\{1, \alpha^2\}$$

Ὑποσυμπλέγματα 4ης τάξεως εἶναι τά:

$$S_1=\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\} \quad S_2=\{1, \alpha^2, \beta, \alpha^2\times\beta\}$$
$$S_3=\{1, \alpha^2, \alpha\times\beta, \alpha^3\times\beta\}$$

Ἔχομεν διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν:

$$\Sigma_1\times\Sigma_2=\{1, \alpha\times\beta. \beta, \alpha^3\}$$
$$\Sigma_2\times\Sigma_1=\{1, \beta, \alpha\times\beta, \alpha\}$$

ὅθεν $\Sigma_1\times\Sigma_2$ δὲν εἶναι ἴσον μὲ $\Sigma_2\times\Sigma_1$

$$\Sigma_1\times\Sigma_2\times\Sigma_5=\{1, \alpha\times\beta, \beta, \alpha^3, \alpha^2, \alpha^3\times\beta, \alpha^2\times\beta, \alpha\}=\Sigma$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου παρατηροῦμεν

1ον) ὅτι $\Sigma_1\times\Sigma_2$ δὲν εἶναι ὑποσύμπλεγμx καὶ ἔχομεν ὅτι $\Sigma_1\times\Sigma_2$ δὲν εἶναι ἴσον μὲ $\Sigma_2\times\Sigma_1$ (2.6.1) καὶ 2ον) ὅτι $\Sigma_1\times\Sigma_2\times\Sigma_3$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, χωρὶς νὰ ἰσχύῃ διὰ τὰ Σ_1, Σ_2, Σ_3 ἡ ἀντιμεταθετικότης.

Δίδομεν κατωτέρω μίαν γενίκευσιν τοῦ θεωρήματος 2.6.2.

Ἐὰν A_1, A_2, ..., A_ν εἶναι ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ, τὰ σύμπλοκα $\prod_{j=i}^{\nu} A_j$ διὰ $i=1,2,\ldots,\nu$ εἶναι τότε καὶ μόνον ὑποσυμπλέγματα τοῦ Σ ὅταν ἰσχύῃ ὅτι:

$$A_i\times\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j=\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j\times A_i \text{ διὰ } i=1,2,\ldots,\nu-1.$$

Ἡ συνθήκη εἶναι ἐπαρκής.

Πράγματι, διότι διὰ $\nu=2$ εἶναι ἡ πρότασις 2.6.1. Ἔστω τώρα ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu=k$, θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu=k+1$.

Ἐπειδὴ ἰσχύει ὁ προσεταιριστικὸς νόμος, ἔχομεν ὅτι $\prod_{i=1}^{k+1} A_j = A_1 \times \prod_{j=2}^{k+1} A_j$. Τὸ $\prod_{i=2}^{k+1} A_j$ ἀποτελεῖται ἀπὸ k συμπλέγματα διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ὑπόθεσις τοῦ θεωρήματος, ἄρα τὸ $\prod_{j=2}^{k+1} A_j$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ θεωρήματος ἔχομεν $A_1 \times \prod_{j=2}^{k+1} A_j = \prod_{j=2}^{k+1} A_j \times A_1$ ἔπεται ἐκ τῆς προτ. 2.6.1 ὅτι τὸ $\prod_{i=1}^{k+1} A_i$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία:

διὰ $\nu=2$ ἰσχύει καὶ εἶναι ἡ προτ. 2.6.1. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu=k+1$, δεχόμενοι ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu=k$.

Ἔχομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι $\prod_{i=1}^{k+1} A_i = A_1 \times \prod_{j=2}^{k+1} A_j$.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς τ. ἐπαγωγῆς τὸ $\prod_{j=2}^{k+1} A_j$, εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, ἑπομένως ἰσχύει ὅτι:

$$A_i \times \prod_{j=i+1}^{k+1} A_j = \prod_{j=i+1}^{k+1} A_j \times A_i \quad (1)$$

διὰ $i=2,3,\ldots, k$.

Ἀλλὰ τὸ $\prod_{i=1}^{k+1} A_i$, τὸ A_1 καὶ τὸ $\prod_{j=2}^{k+1} A_j$ εἶναι ὑποσυμπλέγματα τοῦ Σ, ὅθεν κατὰ τὴν προτ. 2.6.1 ἔχομεν ὅτι $A_1 \times \prod_{j=2}^{k+1} A = \prod_{j=2}^{k+1} A \times A_1$

ἄρα ἡ (1) ἰσχύει καὶ διὰ $i=1$.

2.6.4 ἡ συνθήκη $A \times B = B \times A$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν συνθήκην

$$A \times B C^{*}\, B \times A$$

([3] σελὶς 39).

2.7.1 Ἕνα ὑποσύμπλεγμα A, συμπλέγματος Σ, τὸ ὀνομάζομεν κανονικὸν (διακεκριμένον), ὅταν διὰ κάθε στοιχεῖον $\sigma \in \Sigma$ ἰσχύῃ ὅτι $\sigma \times A = A \times \sigma$.

Ἐκ τῶν θεωρημάτων τῆς § = 2.6 συνάγονται ἀμέσως αἱ προτάσεις:

2.7.2 Τὸ γινόμενον δύο ὑποσυμπλεγμάτων A καὶ B ἑνὸς συμπλέγματος Σ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι κανονικόν, εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, διότι, ὅταν ἔχωμεν

---

* Τὸ C εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ περιέχεσθαι.

$\beta\times A = A\times\beta$ διὰ κάθε στοιχεῖον $\beta\varepsilon B$, συνάγεται κατὰ μείζονα λόγον, ὅτι $A\times B = A\times B$.

2.7.3 Ἂν A καὶ B εἶναι κανονικὰ ὑποσυμπλέγματα τοῦ συμπλέγματος Σ, τότε καὶ τὸ $A\times B$ εἶναι κανονικὸν ὑποσύμπλεγμα αὐτοῦ. Διότι ἰσχύει $A\times B = B\times A$.

Διὰ κάθε $\sigma\varepsilon\Sigma$ καὶ $\alpha\times\beta\varepsilon A\times B$ ἔχομεν: $\sigma^{-1}\times\alpha\times\beta\times\sigma = \sigma^{-1}\times\alpha\times\sigma\times\sigma^{-1}\times\beta\times\sigma$, ἀλλ' ἐπειδὴ A καὶ B εἶναι κανονικὰ ὑποσυμπλέγματα τοῦ Σ ἔχομεν ὅτι $\sigma^{-1}\times\alpha\times\sigma\varepsilon A$ καὶ $\sigma^{-1}\times\beta\times\sigma\varepsilon B$ ὅθεν $\sigma^{-1}\times\alpha\times\beta\times\sigma\varepsilon A\times B$ ὥστε τὸ $A\times B$ εἶναι κανονικὸν ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ.

2.7.4 Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον $A\times B$ δύο ὑποσυμπλεγμάτων A καὶ B ἑνὸς συμπλέγματος Σ, περιέχει ἕκαστον τούτων. δλδ.

$$A \subset A\times B \quad \text{καὶ} \quad B \subset A\times B.$$

§ = 3. Πλῆρες συνένωμα.

3.1 Δίδονται δύο ὑποσυμπλέγματα A, B τοῦ συμπλέγματος Σ. Τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ A ἢ εἰς τὸ B λέγεται συνολοσυνένωμα αὐτῶν καὶ τὸ συμβολίζομεν διὰ τῆς παραστάσεως (A, B).

(Εἰς τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἡ διάζευξις διὰ τοῦ ἢ δὲν ἀποκλείει τὴν σύνδεσιν).

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ *συνολοσυνενώματος* ἐκφράζεται καὶ διὰ τῆς ἰσοδυναμίας:

3.1.1 $\{\chi\varepsilon(A, B) \rightleftarrows \chi\varepsilon A \text{ ἢ } \chi\varepsilon B\}$

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως 2.7.4 συνάγεται ὅτι:

3.1.2 Τὸ (A, B) περιέχεται εἰς τὸ γινόμενον $A\times B$ ἤτοι $(A, B) \subset A\times B$.

3.2 Τὸ πλῆρες *συνένωμα* δύο ὑποσυμπλεγμάτων A καὶ B ἑνὸς συμπλέγματος Σ εἶναι τὸ ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ συνενώματος (A, B).

Δηλ. τὸ πλῆρες συνένωμα τῶν A καὶ B περιέχει ὄχι μόνον τὰ στοιχεῖα τῶν A καὶ B ἀλλὰ καὶ κάθε στοιχεῖον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ γινομένου στοιχείων οἱωνδήποτε λαμβανομένων ἐκ τῶν A καὶ B.

Παρίσταται τὸ *πλῆρες* συνένωμα τῶν A καὶ B οὕτω $\overline{(A, B)}$.

([1] σελὶς 54).

8.2.1 Εἶναι φανερόν, ἀπὸ τὸν προηγούμενον ὁρισμόν, ὅτι δὲν ἰσχύει πάντοτε $\overline{(A, B)} \subset A\times B$.

Παράδειγμα:

Εἰς τὸ συμμετρικὸν σύμπλεγμα τῶν ἀντικαταστάσεων τριῶν ἀντικειμένων τὸ S_3, τὸ ὁποῖον εἶναι τάξεως 6 δηλ. ἔχει 6 στοιχεῖα τὰ

$$\{(1), (12), (13), (23), (123) \text{ καὶ } (132)\}$$

θεωροῦμεν δύο ὑποσυμπλέγματα:

$$S' = \{(1), (12)\} \text{ καὶ } S'' = \{(1), (13)\}$$

Τὸ πλῆρες συνένωμα αὐτῶν εἶναι τὸ

$$S_3 = \overline{(S', S'')}$$

Τὸ γινόμενον αὐτῶν S′ S″ εἶναι τὸ σύνολον:

$$\{(1), (12), (13), (123)\}$$

Τὸ $S' \times S''$ δὲν ἀποτελεῖ ὑποσύμπλεγμα τοῦ S_3.

Παρατηροῦμεν δέ:

1) $(S', S'') = \{(1), (12), (13)\} \subset S' \times S''$

ὅπως παρετηρήσαμεν εἰς τὴν § 3.1.2.

2) Δὲν ἰσχύει $\overline{(S', S'')} \subset S' \times S''$

ὅπως προηγουμένως ἐλέχθη.

Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ πλῆρες συνένωμα δύο ὑποσυμπλεγμάτων ἑνὸς συμπλέγματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν;

Τὸ κάτωθι θεώρημα δίδει ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο.

3.3 Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα $\overline{(A, B)} = A \times B$, (ὅπου A, B ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ) εἶναι τὸ γινόμενον $A \times B$ νὰ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία: διότι τὸ $\overline{(A, B)}$ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ 3.2 εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ, ἄρα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸ $A \times B$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα αὐτοῦ.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή:

α) ἀποδεικνύομεν ὅτι $A \times B \subset \overline{(A, B)}$, διότι διὰ κάθε $\chi \in A \times B$ ἔχομεν $\chi = \alpha \times \beta$ ὅπου $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$, ὅθεν $\alpha \in (A, B)$ καὶ $\beta \in (A, B)$ ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 3.2 τὸ $\alpha \times \beta \in \overline{(A, B)}$.

β) ὅτι $\overline{(A, B)} \subset A \times B$ φαίνεται ἐκ τούτου κάθε $\chi \in \overline{(A, B)}$ εἶναι γινόμενον πεπερασμένων στοιχείων τῶν A καὶ B καὶ ἀφοῦ ἰσχύει ὅτι $A \times B = B \times A$ κατὰ τὴν προτ. 2.6. τὸ χ τελικῶς θὰ γράφεται $\chi = \alpha \times \beta$ ὅπου $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$, ὅθεν $\chi \in A \times B$.

3.3.1 Ἡ γενίκευσις τῆς προηγουμένης προτάσεως γίνεται οὕτω: Τὸ πλῆρες συνένωμα μιᾶς οἰκογενείας ὑποσυμπλεγμάτων $\{A_i, i \in I\}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὅταν τὰ A_i εἶναι ἀνὰ δύο *ἀντιμεταθετά*, ἤτοι:

$$A_i \times A_\kappa = A_\kappa \times A_i \text{ διὰ } \iota \text{ καὶ } \kappa \in I$$

$$([6]\ \S = 1.2.2.\ \text{προτ. } 7)$$

§=4. Τάξις στοιχείων συμπλεγμάτων μὴ Ἀβελιανῶν.

4.1 Θεωροῦμεν ἕνα σύμπλεγμα Σ, τοῦ ὁποίου τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον καλοῦμεν e. Τάξις τ ἑνὸς στοιχείου $\alpha \in \Sigma$, λέγεται ὁ μικρότερος φυσικὸς ἀριθμὸς τ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἰδιότητα: $\alpha^\tau = e$.

4.1.1 Ἓν σύμπλεγμα Σ λέγεται πεπερασμένον, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του εἶναι πεπερασμένον, ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων του λέγεται τάξις τοῦ συμπλέγματος.

Ἐὰν ἡ τάξις ἑνὸς συμπλέγματος εἶναι ν καὶ ἡ τάξις ἑνὸς στοιχείου α ε Σ εἶναι τ, τότε, ὡς γνωστόν, ἔχομεν ὅτι:

$$\nu \equiv 0\ (\tau)$$

ὁμοίως, διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μ, διὰ τὸν ὁποῖον ἔχομεν:

$$\alpha^{\mu} = e$$

προκύπτει ὅτι: $$\mu \equiv 0\ (\tau)$$

4.2 Θεώρημα: Ἂν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ, τοιαῦτα ὥστε

$\alpha_i \times \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j \times \alpha_i$ διὰ κάθε $\alpha_i \varepsilon A_i$ καὶ $i = 1, 2, \ldots, \nu-1$ τότε ἰσχύει ὅτι:

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\varkappa = \alpha_\iota^\varkappa \times \beta_1 \text{ διὰ } \beta \text{ καὶ } \beta_1 \ \varepsilon \prod_{j=\iota+1}^{\nu} A_j$$

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Διὰ $\varkappa = 1$ ἰσχύει, διότι $(\alpha_\iota \times \beta)^1 = \alpha_\iota \times \beta$.

Δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει διὰ $\varkappa = \nu - 1$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει διὰ $\varkappa = \nu$.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι:

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\nu = (\alpha_\iota \times \beta)^{\nu-1} \times \alpha_\iota \times \beta \tag{1}$$

καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

$$(\alpha_\iota \times \beta)^{\nu-1} = \alpha_\iota^{\nu-1} \times \beta'$$

ὁπότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\nu = \alpha_\iota^{\nu-1} \times \beta' \times \alpha_\iota \times \beta \tag{2}$$

κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ θεωρήματος ἔχομεν:

$$(\beta' \times \alpha_\iota = \alpha_\iota \times \beta''$$

ἡ ἰσότης (2) μετασχηματίζεται τότε εἰς τὴν ἰσότητα:

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\nu = \alpha_\iota^{\nu-1} \times \alpha_\iota \times \beta'' \times \beta \tag{3}$$

ἀλλὰ $\beta' \times \beta'' = \beta_1 \varepsilon B$ καὶ ἡ ἰσότης (3) γίνεται

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\nu = \alpha_\iota^\nu \times \beta_1$$

Τομὴ ὑποσυμπλεγμάτων.

4.3. Ἐὰν Α, Β εἶναι ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ, τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Σ τὰ ὁποῖα ἀνήκουν καὶ εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β ὀνομάζεται τομὴ αὐτῶν καὶ σημειοῦται ΑΛΒ ἢ [Α, Β].

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς συμβολικὰ γράφεται:

4.3.1. $\{\chi \ \varepsilon\ [A, B] \rightleftarrows \chi \ \varepsilon\ \Sigma$ καὶ $\chi \ \varepsilon\ A$ καὶ $\chi \ \varepsilon\ B\}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, προφανῶς, προκύπτει ὅτι τὸ [Α, Β] εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ.

4.3.2. Ὁμοίως ὁρίζεται ἡ τομὴ μιᾶς οἰκογενείας ὑποσυμπλεγμάτων A_i, $i \varepsilon I$ ἑνὸς συμπλέγματος Σ, ὡς τὸ σύνολον τῶν κοινῶν στοιχείων τῶν A_i, δηλ. ἂν παραστήσωμεν τὴν τομὴν τῶν A_i διὰ τοῦ ΛA_i ἔχομεν ὅτι:

$$\chi \varepsilon \underset{\iota \varepsilon I}{\Lambda A_i} \rightleftarrows \chi \varepsilon \Sigma \text{ καὶ } \chi \varepsilon A_i \text{ διὰ κάθε } \iota \varepsilon I$$

4.4 Θεώρημα: Ἂν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ, τοιαῦτα ὥστε

$$\alpha_\iota \times \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j \times \alpha_\iota$$

διὰ κάθε $\alpha_i \varepsilon A_i$

$$\text{καὶ } [A_i, \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j] = e \text{ διὰ } \iota = 1,2,\ldots,\nu-1$$

Κάθε στοιχεῖον $\alpha_\iota \times \beta$ (ὅπου $\alpha_i \varepsilon A_i$ καὶ $\beta \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$) ὑψούμενον εἰς μίαν δύναμιν $\varkappa$ μᾶς δίδει ὡς ἐξαγόμενον στοιχεῖον τοῦ $\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$ τότε καὶ μόνον, ὅταν ἡ τάξις τοῦ α_ι εἶναι διαιρέτης τοῦ $\varkappa$.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή, διότι κατὰ τὸ θεώρημα 4.2 ἔχομεν:

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\varkappa = \alpha_\iota^\varkappa \times \beta_1 \tag{1}$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha_\iota^\varkappa = e$ (§=4.1.1) ὁπότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\varkappa = \beta_1 \text{ καὶ } \beta_1 \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$$

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία:

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ στοιχεῖον

$$(\alpha_\iota \times \beta)^\varkappa \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$$

ἐπειδὴ δὲ ἰσχύει καὶ ἡ ἰσότης (1) ἔχομεν ὅτι:

$$\alpha_\iota^\varkappa \times \beta = (\alpha_\iota \times \beta)^\varkappa = \beta', \ \beta' \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j \tag{2}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ὑπόθεσίν μας καὶ τὸ θεώρημα 2.6.3 τὸ $\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοῦ Σ ὁπότε ἡ ἰσότης (2) γίνεται

$$\alpha_\iota^\varkappa = \beta' \times \beta^{-1} \tag{3}$$

καὶ τότε τὸ στοιχεῖον $\alpha_\iota^\varkappa$ εἶναι στοιχεῖον τοῦ A_i καὶ τοῦ $\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$

ἄρα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ θεωρήματος

$$\alpha_\iota^\varkappa = e \tag{4}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος καὶ τῶν ὁρισμῶν 4.1.1 προκύπτει ὅτι $\varkappa \equiv 0$ (τ) (ὅπου τ ἡ τάξις τοῦ α_ι).

4.4.1 Παράδειγμα: Ἔστωσαν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ κανονικὰ ὑποσυμπλέγματα, ἑνὸς συμπλέγματος Σ, καὶ ὅτι $[A_i, \prod\limits_{j \neq i}^{\nu} A_j] = e$.

Ἐπειδὴ ἰσχύει $A_\iota \times A_\varkappa = A_\varkappa \times A_i$ (§ = 2.7.3), θὰ ἔχωμεν ὅτι $\prod\limits_{\iota=1}^{\nu} A_i$ εἶναι ὑποσύμπλεγμα τοὺ T (§=2.6.2) καὶ τὸ ὀνομάζομεν A. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς τὸ $\prod\limits_{\iota=1}^{\nu} A_i$ εἶναι εὐθὺ ἄθροισμα τῶν A_i ([1] σελὶς 158 §=15 τόμ. I).

Κάθε στοιχεῖον $\alpha \varepsilon A$ τίθεται τότε ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_\nu$ (ὅπου $\alpha_i \varepsilon A_i$), καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον.

Κάθε στοιχεῖον $\alpha \varepsilon A$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha_\iota \times \beta$ ὅπου $\alpha_\iota \varepsilon A_i$ καὶ $\beta \varepsilon \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j$ τότε καὶ μόνον ὅταν $\alpha_\varkappa = e$ διὰ $\varkappa$ i.

καὶ $\beta = \alpha_{i+1} \times \alpha_{\iota+2} \times \ldots . \times \alpha_\nu$.

Ἔχομεν ἐπίσης $\alpha^\varkappa = \alpha_1^\varkappa \times \alpha_2^\varkappa \times \ldots . \times \alpha_\nu^\varkappa$.

(διότι ἡ σύνθεσις διὰ τῆς πράξεως $\times$ γίνεται διὰ τῆς συνθέσεως τῶν ἀντιστοίχων συνιστωσῶν). Ὑπὸ αὐτὰς τὰς προϋποθέσεις, ἂν $\alpha = \alpha_\iota \times \beta$ τὸ $\alpha^\varkappa \varepsilon \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j$, τότε καὶ μόνον, ὅταν $\alpha_\iota^\varkappa = e$ δηλ. ὅταν $\varkappa \equiv 0$ (τ_i) (ὅπου τ_i ἡ τάξις τοῦ στοιχείου α_i).

Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τοῦ θεωρήματος 4.4 δηλ. $\alpha_i \times \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j \times \alpha_i$, ἀφοῦ τὸ $\prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j$ εἶναι κανονικὸν ὑποσύμπλεγμα τοῦ A.

καὶ $[A_i, \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j] = e$ διότι τοῦτο εἶναι ἀναγκαία συνέπεια τῆς ὑποθέσεως

$$[A_i, \prod_{j \neq i} A_j] = e$$

5. Ἀκολούθως ἀποδεικνύεται ἕνα θεώρημα τὸ ὁποῖον εἶναι γενίκευσις τῆς γνωστῆς προτάσεως: αν α, β εἶναι στοιχεῖα Ἀβελιανοῦ συμπλέγματος τάξεων ἀντιστοίχως $\varkappa$, λ τότε τὸ $\alpha \times \beta$ εἶναι στοιχεῖον τοῦ αὐτοῦ συμπλέγματος τάξεως $(\varkappa, \lambda)$.

(Μὲ τὸ $(\varkappa, \lambda)$ συμβολίζομεν τὸ Ε.Κ.Π. τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\varkappa$ καὶ λ).

5.1. Θεώρημα: Ἂν $A_1, A_2, \ldots ., A_\nu$ εἶναι ὑποσυμπλέγματα ἑνὸς συμπλέγματος Σ καὶ ἔχομεν $\alpha_\iota \times \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j \times \alpha_i$ διὰ κάθε $\alpha_i \varepsilon A_i$ εἶναι δὲ $[A_i, \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j] = e$ καὶ $A_\iota \times \beta = \beta \times A_i$ διὰ $\beta \varepsilon \prod\limits_{j=i+1}^{\nu} A_j$ διὰ $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Τότε ἡ τάξις τοῦ στοιχείου $\alpha=\prod_{\iota=1}^{\nu}\alpha_i$ εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἀριθμὸν $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$ ὅπου τ_ι εἶναι ἡ τάξις τοῦ α_i.

Κατ' ἀρχὰς ἀποδεικνύομεν ὅτι ἂν τ εἶναι ἡ τάξις τοῦ στοιχείου α τότε ἔχομεν ὅτι $\tau\equiv 0$ $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)$.

Πράγματι ἂν $\nu=2$ ἔχομεν ὅτι:

$\alpha=\alpha_1\times\alpha_2$ ὅθεν, ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $(\alpha_1\times\alpha_2)^\tau=e$ συνάγεται ὅτι $\tau\equiv 0$ (τ_1) προτ. 4.4 (1) κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\alpha_1\times\alpha_2=\alpha_2\times\alpha_1{}'$ ὅθεν ἐκ τῆς ἰσότητος $(\alpha_2\times\alpha_1{}')=e$

$$\text{προκύπτει ὅτι } \tau\equiv 0\ (\tau_2) \tag{2}$$

ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγεται $\tau\equiv 0$ (τ_1, τ_2).

Δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει ἡ πρότασις διὰ $\nu-1$ ὑποσυμπλέγματα καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει διὰ ν.

Πράγματι ἔχομεν $\alpha=\alpha_1\times\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i$

ἐπειδὴ δὲ $\alpha=\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\times\alpha_1{}'$ $\alpha_1{}'$ ε A_1 καὶ ἔχομεν

$$e=\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\times\alpha_1{}'\right)^\tau=\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau\times\alpha_1{}'' \tag{3}$$

$\alpha_1{}''$ ε A_1 κατὰ τὸ θεώρημα 4.2 ἐκ τῆς ἰσότητος (3) ἡ ὁποία γράφεται $\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau=\alpha_1{}''^{-1}$ συνάγεται ὅτι τὸ $\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau$ ε A_1 καὶ $\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau$ ε $\prod_{\iota=2}^{\nu}A_j$ ἄρα κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ θεωρήματος τὸ $\left(\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau=e$ ὅθεν κατὰ τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῆς τ. ἐπαγωγῆς συνάγεται ὅτι:

$$\tau\equiv 0\ (\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_\nu) \tag{4}$$

ἀλλὰ καὶ $\left(\alpha_1\times\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\right)^\tau=e$ ὅθεν

$$\tau\equiv 0\quad(\tau_1) \tag{5}$$

ἄρα ἐκ τῆς (4) καὶ (5) συνάγεται

$$\tau\equiv 0\ (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu) \tag{6}$$

Κατόπιν θ' ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$\alpha^{(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu)}=e$$

Διὰ $\nu=2$ ἔχομεν $\alpha=\alpha_1\times\alpha_2$

ὅθεν ἀφοῦ τὸ $(\tau_1, \tau_2)\equiv 0$ (τ_1)

ἐκ τῆς προτ. 4.4 συνάγεται ὅτι τὸ

$$\alpha^{(\tau_1, \tau_2)}\ \varepsilon\ A_1$$

ἐπειδὴ δὲ $\alpha=\alpha_2\times\alpha_1'$ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν θὰ ἔχωμεν ὁμοίως ὅτι

$$\alpha^{(\tau_1,\ \tau_2)}\ \varepsilon\ A_2 \text{ ἀφοῦ } (\tau_1,\ \tau_2)\equiv 0\ (\tau_2)$$

ἄρα $\alpha^{(\tau_1,\ \tau_2)}=e$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ ν ὑποσυμπλέγματα ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu-1$.

$$\text{τὸ } \alpha=\alpha_1\times\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i \tag{7}$$

ἀλλὰ τότε $\alpha^{(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)}\ \varepsilon\ A_1$ ἀφοῦ

$$(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)\equiv 0\ (\tau_1) \text{ (Θεώρ. 4.4)}$$

ἡ (7) γράφεται

$$\alpha=\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i\times\alpha_1'$$

ἄρα $\alpha^{(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)}\ \varepsilon\ \prod\limits_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i$

ἀφοῦ $(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)\equiv 0\ (\tau_2,\ \tau_3,\dots,\ \tau_\nu)$.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν δὲ τῆς τ. ἐπαγωγῆς

$$\prod_{\iota=2}^{\nu}\alpha_i \text{ εἶναι τάξεως } (\tau_2,\ \tau_3,\dots,\ \tau_\nu)$$

ὥστε ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι $\alpha^{(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)}=e$.

5.1.2 Παραδείγματα:

1) Ἂν $A=A_1\times A_2\times\dots\times A_\nu$ τὸ A δηλ. εἶναι εὐθὺ γινόμενον τῶν ὑποσυμπλεγμάτων $A_1,\ A_2,\dots,\ A_\nu$ τότε αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 5.1 ἰσχύουν καὶ ἔχομεν ὅτι ἂν $\alpha=\Pi\alpha_i$ ἡ τάξις τοῦ α εἶναι τ καὶ $\tau=(\tau_1,\ \tau_2,\dots,\ \tau_\nu)$ δηλ. τὸ Ε.Κ.Π. τῶν τάξεων τῶν A_i. (εὐθὺ γινόμενον [5] σελὶς 144).

2) Ἂν A_i εἶναι κυκλικὰ συμπλέγματα ἕκαστον τάξεως ρ, τότε ἡ τάξις παντὸς στοιχείου τοῦ εὐθέος γινομένου αὐτῶν,

$A=A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ καὶ διαφόρου τοῦ e εἶναι ἐπίσης τάξεως ρ.

([1] σελὶς 236 καὶ §=46).

ΣΗΜ. Αἱ συνθῆκαι τοῦ θεωρήματος ἐξασφαλίζουν τὸ ὅτι ἡ Ἄλγεβρα $\prod\limits_{\iota=1} A_i$ εἶναι εὐθὺ γινόμενον τῶν A_i καὶ συνεπῶς τὸ θεώρημα προφανῶς εἶναι ἀληθές.

$$\text{διότι } \alpha=\|\,\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_n\,\| \text{ καὶ}$$

$$\alpha^\mu=\|\,\alpha_1^\mu,\ \alpha_2^\mu,\dots,\ \alpha^\mu\,\|.$$

RÉSUMÉ

Dans cette étude nous introduisons et démontrons trois propositions, qui concernet l'ordre des éléments de groupes non - Abeliem.

Ces théorèmes sont les suivantes:

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont des sous-groupes d'un groupe Σ, et

$$a_i \times \prod_{j=i+1} A_j = \prod_{j=i+1} A_j \times a_i$$

pour tout $a_i \varepsilon A_i$ $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ alors nous avons

$(a_i \times b)^k = a_i^k \times b_1$ pour $a_i \varepsilon A_i$, b & $b_1 \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$ (et K = entier positif).

2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont sous-groupes d'un groupe Σ, et

$$a_i \times \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j \times a_i$$

pour tout $a_i \varepsilon A_i$ et

$[A_i, \prod_{j=i+1} A_j] = e$ pour $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ tout élément $a_i \times b$,

$a_i \varepsilon A_i$ & $b \varepsilon \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$ élevé à une puissance K nous donne un élément appartenant à $\prod_{j=i+1}^{\nu} A_j$ si et seulement si l'ordre de l'élément a_i est un diviseur de K.

3. Sous les condition du N° 2 et la supposition que

$$b \times A_i = A_i \times b \text{ pour chaque élément } b \text{ e } \prod_{j=i+1} A_j$$

l'ordre de chaque élément $a = \prod_{i=1}^{\nu} a_i$ & $a_i \varepsilon A_i$ est égal à la P.P.C.M. des ordres des éléments a_i.

Pour demontrez ces théorémes dessus, nous généralisons d'abord une proposition connue sous la proposition:

Si $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ sont sous-groupes d'un groupe Σ, les complexes $\prod_{j=i}^{\nu} A_j$ pour $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ sont des sous groupes de Σ, si et seulement si la condition $A_i \times \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j = \prod_{j=i+1}^{\nu} A_j \times A_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, est valable pour ces sous-groupes.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. CHATELET A., Arithmétique et Algèbre modernes. Paris 1954.
2. B. L. Van der WAERDEN, Moderne Algebra. Berlin 1937.
3. DUBREIL P., Algèbre, 1946.
4. ΡΟΚΟΣ ΠΑΝΤ., Γενικεύσεις θεωρημάτων ὁμομορφισμοῦ καὶ ἰσομορφισμοῦ εἰς γενικὰς ἀλγέβρας καὶ ἀλγεβροδακτυλίους, 1954.
5. JACOBSON N., Lectures in Abstract Algebra. N. York, 1951.
6. SPECHT, Gruppen (Erlagen 1953).