3) Οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταὶ παρουσιάζουν ἁπλῆν ἐτησίαν κύμανσιν μὲ μέγιστον κατὰ Φεβρουάριον καὶ ἐλάχιστον κατὰ Ἰούνιον.

4) Ἡ συσχέτισις μεταξὺ θερμοκρασίας καὶ σχετικῆς ὑγρασίας παρουσιάζεται θετικὴ κατὰ τοὺς χειμερινοὺς μῆνας.

5) Ἡ ἐτησία πορεία τῶν συντελεστῶν συσχετίσεως ἐξηγεῖται, ἐὰν ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν αἱ καιρικαὶ καταστάσεις, αἱ ἐπικρατοῦσαι κατὰ τὰς διαφόρους ἐποχάς.

6) Αἱ τιμαὶ καὶ ἡ πορεία τῶν συντελεστῶν συσχετίσεως ἀποτελοῦν οὐσιώδη κλιματικὸν χαρακτηριστικὸν τῶν διαφόρων περιοχῶν.

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ.— **Προσδιορισμὸς μηχανικῶν χαρακτηριστικῶν ἠλεκτρικῶν μηχανῶν**, ὑπὸ ***Δανιὴλ Μ. Λέκκα****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασιλ. Αἰγινήτου.

Ἓν νέον μαθηματικὸν ἐργαλεῖον τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ σήμερον ἡ Φυσικὴ εἶναι ὁ τανυστικὸς λογισμός.

Οὗτος δὲν εἰσάγει τίποτε τὸ νέον εἰς τὴν ἐπιστήμην, ἀλλὰ γενικεύει καὶ ἁπλοποιεῖ τοὺς μαθηματικοὺς τύπους καὶ θέτει τάξιν εἰς τοὺς μαθηματικοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὰς μεθόδους ὑπολογισμοῦ. Ὁ μηχανικὸς δύναται νὰ τὸν χρησιμοποιήσῃ ἐπωφελῶς εἰς τὴν μηχανικήν, τὴν ἀντοχὴν τῶν ὑλικῶν, τὸν ἠλεκτρισμὸν κ.λ.π.

Ὁ πρῶτος ὅστις εἰσήγαγε τοὺς τανυστὰς εἰς τὴν ἠλεκτροτεχνίαν εἶναι ὁ Gabriel Kron, ὁ ὁποῖος παρουσίασε τῷ 1935, διὰ τὸ διεθνὲς βραβεῖον ἠλεκτρισμοῦ Montefiore (Λιέγης), ἀξιοσημείωτον διατριβὴν ὑπὸ τὸν τίτλον: «The application of Tensor Analyses to Electrical Engineering Problems». Ἐχρησιμοποίησα τὴν νέαν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Γαβριὴλ Κρὸν εἰς τὴν κατάστρωσιν τῶν ἐξισώσεων πλείστων ἠλεκτρικῶν μηχανῶν, ἕνα δὲ παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω μεθόδου ἔστειλα πρὸς δημοσίευσιν εἰς τὰ «Τεχνικὰ Χρονικά».

Εἰς τὴν παροῦσαν διατριβὴν διετύπωσα ἕνα γενικὸν τύπον ἐκφράζοντα τὴν ροπὴν Στρέψεως ὅλων τῶν ἠλεκτρικῶν μηχανῶν ἢ καὶ ὁμάδος μηχανῶν, ἰσχύοντα δι' οἱανδήποτε περίπτωσιν· τοῦτο δὲ τῇ βοηθείᾳ τανυστῶν, τῶν ὁποίων αἱ συνιστῶσαι εἶναι συναρτήσεις τῶν δεδομένων ἑκάστης ἠλεκτρικῆς μηχανῆς.

Κατωτέρω ἀναπτύσσεται ὁ τρόπος εὑρέσεως τοῦ τανυστικοῦ τούτου τύπου ὑπὸ τὰς ἀκολούθους προϋποθέσεις:

1) Ἡ διάταξις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τῆς μηχανῆς εἶναι ἡμιτονοειδής.

2) Ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς δεκτικότητος μ εἶναι σταθερός.

---

* DANIEL LECCAS: Détermination des caractéristiques mécaniques des Machines Electriques.

Ἐφόσον ὅμως θέλομεν νὰ μελετήσωμεν μηχανὴν εἰς τὴν ὁποίαν τὸ μ εἶναι αἰσθητῶς μεταβλητόν, τότε πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως δὲν θὰ μεταχειριζώμεθα τὰ συνήθη γράμματα διὰ τὰς διαφόρους ἀντιστάσεις, ἀλλὰ ἕτερα, ὡς Κ, κ, εἰς τὸ τέλος δὲ τῶν πράξεων θὰ φροντίζωμεν, εἰ δυνατόν, ὅπως μὴ ἐπεισέρχωνται εἰς τὸν τύπον.

Πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν πράξεων δεχόμεθα σιωπηλῶς τὴν παράλειψιν τοῦ συμβόλου Σ τῆς ἀθροίσεως, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξυπακούεται διὰ τοὺς δὶς ἐπαναλαμβανομένους ὁμοίους δείκτας (indices muets), π. χ. :

$$A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + \cdots\cdots + A_n B^n = \sum_{i=1\ldots n} A_i B^i = A_i B^i$$

(convention d'Einstein)

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι μία μερικὴ περίπτωσις ἑνὸς μιγαδικοῦ, ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων μιᾶς ἠλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι :

$$\begin{array}{l}
\overline{U}_1 = Z_{11} I^1 + Z_{12} \overline{I}^2 + \cdots\cdots + Z_{1n} \overline{I}^n \\
\overline{U}_2 = Z_{21} I^1 + Z_{22} \overline{I}^2 + \cdots\cdots + Z_{2n} \overline{I}^n \\
\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
\overline{U}_n = Z_{n_1} \overline{I}^1 + Z_{n_2} \overline{I}^2 + \cdots\cdots + Z_{nn} \overline{I}^n
\end{array}$$

(1, 2, 3, . . . η), δεῖκται)

οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τανυστικὴν ἐξίσωσιν:

$$\overline{U}_i = Z_{ik} \overline{I}^k \qquad (1)$$

ὅπου :

$\overline{U}_i$: μιγαδικὴ τανυστικὴ συνιστῶσα τῆς τάσεως (διὰ τὸ κύκλωμα ι)

$\overline{I}^k$: » » » τοῦ ρεύματος (διὰ τὸ Κ)

Z_{ik} τανυστὴς συνθέτου ἀντιστάσεως τῆς μηχανῆς.

U_i εἶναι τανυστὴς συμμεταβαλλόμενος* (covariant) 1ης τάξεως.

I^κ εἶναι τανυστὴς ἀντιμεταβαλλόμενος* (contrevariant) » »

Z_{ik} εἶναι τανυστὴς 2ας τάξεως δὶς συμμεταβαλλόμενος, ἄθροιμα δὲ τῶν τριῶν τανυστῶν :

$$Z_{ik} = R_{ik} + L_{ik} + G_{ik}\,\Omega$$

εἰς τρόπον ὥστε :

$R_{ik}\ I^k$: παριστᾷ τὰς ὠμίους πτώσεις τάσεως.

$L_{ik}\ I^\kappa$: παριστᾷ τὰς στατικὰς ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις.

$G_{ik}\,\Omega\,\overline{I}^k$: παριστᾷ τὰς δυναμικὰς ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις,

Ω οὔσης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τῆς μηχανῆς.

---

* Προτιμῶμεν τοὺς ὅρους τούτους ἀντὶ τῶν ὑπ' ἄλλων ἐρευνητῶν χρησιμοποιουμένων «συναλλοιωτὸς» καὶ «ἀνταλλοιωτός».

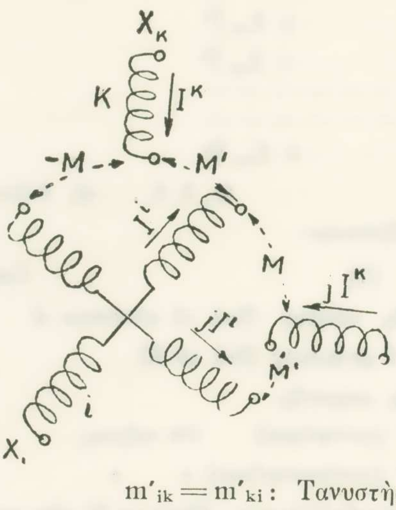
Α.) Ἄς ἐξετάσωμεν τοὺς τρεῖς τανυστὰς τῆς συνθέτου ἀντιστάσεως:

1) Εἶναι πρόδηλον ὅτι: $R_{ik} = \begin{cases} R_{ii} \text{ διὰ } i = k \; (R_{ii} \text{ πραγματικὸς ἀριθμὸς}) \\ O \quad \text{διὰ } i \neq k \end{cases}$

2) $L_{ik} = m_{ik} + jm'_{ik}$ εἰς τὴν γενικήν του μορφήν.

Διὰ τὰς κοινὰς βεβαίως περιπτώσεις ἔχομεν $L_{ik} = jm'_{ik}$, καὶ καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν ἠλεκτροτεχνίαν $m'_{ik} = m'_{ki}$· εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως ὅπου αἱ ἐξισώσεις (1) ἀναφέρονται εἰς περιστρεφόμενον πεδίον, τὸ L_{ik} ἔχει τὴν ὡς ἄνω γενικὴν μορφήν. Πράγματι ἔστωσαν δύο ζεύγη διφασικῶν πηνίων k (I^k, jI^k) καὶ i (I^i, jI^i)· ἵνα ἔχωμεν περιστρεφόμενον πεδίον τοποθετοῦμεν τὰ δύο πηνία k κάθετα μεταξύ των καθὼς καὶ τὰ δύο πηνία i, τῆς μαγνητικῆς ἀντιστάσεως οὔσης τῆς αὐτῆς διὰ κάθε διεύθυνσιν.

Εἶναι πρόδηλον ὅτι διὰ λόγους συμμετρίας αἱ ἐπαγωγικαὶ ἀντιστάσεις ἔχουν ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα.



Θεωροῦμεν τὰς στατικὰς Η. Ε. Δ.

1) Εἰς τὸ κύκλωμα k:

$jX_k\, I^k + jM'\, I^i - jM\,(jI^i)$

2) Εἰς τὸ κύκλωμα i:

$jX_i\, \overline{I^i} + jM'\, \overline{I^k} + jM\,(jI^k)$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν:

$L_{kk} = jX_k \qquad L_{ii} = jX_i$

$L_{ik} = M + jM' \qquad L_{ki} = -M + jM'$

καὶ βλέπομεν ὅτι ἔχομεν:

$m_{ik} = -m_{ki}$: Τανυστὴς δευτέρας τάξεως ἀντιμετρικός.

$m'_{ik} = m'_{ki}$: Τανυστὴς δευτέρας τάξεως συμμετρικός.

3) G_{ik} εἶναι οἱ συντελεσταὶ τοῦ Ω, ὅλων τῶν ὅρων τοῦ Z_{ik}, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὴν ταχύτητα Ω. Πολλὰς φορὰς ἡ ταχύτης δὲν ἐμφαίνεται εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), διότι περιέχεται εἰς τὸν ὅρον g^w (g: ὀλίσθησις)· πρέπει λοιπὸν νὰ προσέξωμεν ἵνα τὴν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας.

Β.) Πρωτοῦ ἐκφράσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἰσχύος, ἂς ἐξετάσωμεν δύο γινόμενα τὰ ὁποῖα ἐπεισέρχονται εἰς τὸν τύπον της:

1) Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\overline{I^i}.\overline{I^k}$ μᾶς δίδει τὰς συνιστώσας ἑνὸς συμμετρικοῦ τανυστοῦ δευτέρας τάξεως (ἀντιμεταβαλλομένου), πράγματι δὲ ἔχομεν:

$$I^i\, I^k \text{ συν } \widehat{I^i\, I^k} = I^k\, I^i \text{ συν } \widehat{I^k\, I^i} \text{ καὶ } \overline{I^i}.\overline{I^k} = \overline{I^k}.\overline{I^i}$$

2) Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $j\,\overline{\overline{I^i}.\,\overline{I^k}}$ μᾶς δίδει τὰς συνιστώσας ἑνὸς ἀντιμετρικοῦ τανυστοῦ δευτέρας τάξεως (ἀντιμεταβαλλομένου)· πράγματι ἔχομεν:

$$j\,I^i\,I^k\;\text{συν}\;j\,\widehat{I^i\,I^k} = -\,j\,I^k\,I^i\;\text{συν}\;j\,\widehat{I^k\,I^i}\;\text{καὶ}\;\overline{j\,\overline{I^i}.\,\overline{I^k}} = -\,\overline{j\,\overline{I^k}.\,\overline{I^i}}$$

Γ.) Ἡ ἰσχὺς μιᾶς ἠλεκτρικῆς μηχανῆς δίδεται διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐσωτερικῶν γινομένων: $\bar{U}_i\,.\,\bar{I}^i$, ἤτοι:

$$\bar{U}_i\,.\,\overline{I^i} = R_{ik}\,\overline{I^k}.\,\overline{I^i} + L_{ik}\,\dot{I}^k.\,I^i + \Omega\,G_{ik}\,\dot{I}^k.\,\overline{I^i}$$

Ἔχομεν:

1) $R_{ik}\,I^k.\,\overline{I^i} = R_{ii}\,I^{i^2}$ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς A1.

2) $L^{ik}\,I^k.\,\bar{I}^i = m_{ik}\,\overline{I^k}.\,\overline{I^i} + m'_{ik}\,j\,\overline{I^k}.\,I^i$

Γνωρίζοντες ὅτι εἷς ἀντιμεταβαλλόμενος τανυστὴς 2ας τάξεως πολλαπλασιαζόμενος μὲ ἕνα συμμεταβαλλόμενον τανυστὴν 2ας τάξεως καὶ ὁμοίων δεικτῶν, ὁ εἷς συμμετρικὸς καὶ ὁ ἕτερος ἀντιμετρικός, δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ μηδέν, καταλήγομεν εἰς:

$$L_{ik}\,\dot{I}^k.\,I^i = 0\;(\text{κατόπιν τῶν A2, B1. B2})$$

Σημείωσις: Τὸ ἀνωτέρω ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν: a_{mn} συμμετρικὸς συμμεταβαλλόμενος τανυστής.

b^{mn} ἀντιμετρικὸς ἀντιμεταβαλλόμενος τανυστής.

ἔχομεν:
$$a_{mn}\,b^{mn} = \frac{1}{2}\left(a_{mn}\,b^{mn} + a_{nm}\,b^{nm}\right) = 0$$

διότι
$$a_{mn} = a_{nm},\quad b^{mn} = -\,b^{nm}$$

Τελικῶς ἡ ἔκφρασις τῆς ὁλικῆς ἰσχύος γίνεται:

$$\bar{U}_i\,.\,\bar{I}^i = R_{ii}\,I^{i^2} + \Omega\,G_{ik}\,\dot{I}^k\,I^i$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου ὅτι ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς μίας ἠλεκτρικῆς μηχανῆς, μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀπωλειῶν ἐντὸς τοῦ σιδήρου, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπωλειῶν joules καὶ τῆς μηχανικῆς ἰσχύος:

$$P = R_i\,I^{i^2} + C\,\Omega$$

ὅπου C ἡ ῥοπὴ στρέψεως τῆς μηχανῆς.

Συγκρίνοντες τοὺς δύο ὡς ἄνω τύπους τῆς ἰσχύος ἔχομεν:

$$C = G_{ik}\,\dot{I}^k\,I^i$$

Δ.) Σκοπὸς ἡμῶν εἶναι νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ῥοπὴν στρέψεως συναρτήσει τῶν δεδομένων τῆς μηχανῆς.

Τῆς γενικῆς μορφῆς τοῦ G_{ik} οὔσης:

$G_{ik} = g_{ik} + j\, g'_{ik}$ ὅπου g_{ik}, g'_{ik} πραγματικοὶ ἀριθμοί,

ἔχομεν:

$$C = g_{ik}\, \bar{I}^k \cdot \bar{I}^i + g'_{ik}\, j\, \bar{I}^k \cdot \bar{I}^i \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν ἀκολούθως τὰ I^k καὶ I^i μὲ τὰς τιμάς των ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), λαμβανομένων διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Cramer.

Θεωρῶντες τὸν πίνακα τῶν συντελεστῶν τῶν I:

$$\left|\begin{array}{cccccc} U_1 & Z_{11} & \cdots & Z_{1h} & \cdots & Z_{1n} \\ U_2 & Z_{21} & \cdots & Z_{2h} & \cdots & Z_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ U_n & Z_{n1} & \cdots & Z_{nh} & \cdots & Z_{nn} \end{array}\right| \qquad (\alpha)$$

ὁρίζομεν τὰ κάτωθι μεγέθη:

$\Delta = \delta + j\delta'$: Ὁρίζουσα ἐκ τοῦ πίνακος α δι' ἀφαιρέσεως τῆς στήλης τῶν U

$D^h = d^h + jd'^h$: » » » » α » » » » » Z_{ah}

$\Delta^h = \delta^h + j\delta'^h$: » » » » α » » » » » Z_{ah},

τῆς στήλης τῶν U καὶ τῆς πρώτης γραμμῆς.

$Z_{1i} = a_i + ja'_i$: συμμεταβαλλόμενον ἄνυσμα (τανυστὴς $1^{ης}$ τάξεως).

Λύομεν ὡς πρὸς I^h:

$$I^h = \frac{D^h(-1)^{h+1}}{\Delta}$$

ἐφόσον Δ ποσότης βαθμωτὴ (ἄνευ δείκτου), τὸ $D^h(-1)^{h+1}$ εἶναι ἓν ἀντιμεταβαλλόμενον ἄνυσμα (τῆς αὐτῆς μεταβολῆς τοῦ I^h).

$$I^h = \frac{d^h + jd'^h}{\delta + j\delta'}(-1)^{h+1} = \frac{(d^h + jd'^h)(\delta - j\delta')(-1)^{h+1}}{\delta^2 + \delta'^2} =$$

$$= \frac{(d^h\delta + d'^h\delta') + j(\delta d'^h - \delta' d^h)}{\delta^2 + \delta'^2}(-1)^{h+1}$$

καὶ τοῦτο δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ h.

Ἔχοντες τὰς τιμὰς τῶν I^i καὶ I^k ὑπολογίζομεν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα:

$$\text{I)}\quad I^k \cdot I^i = \frac{(d^k\delta + d'^k\delta')(d^i\delta + d'^i\delta') + (\delta d'^k - \delta' d^k)(\delta d'^i - \delta' d^i)}{(\delta^2 + \delta'^2)^2}(-1)^{i+k} =$$

$$= \frac{d^i d^k + d'^i d'^k}{\delta^2 + \delta'^2}(-1)^{i+k}$$

$$\text{II)}\ jI^{\kappa}_{\cdot} I^{i} = \frac{(\delta' d^{\kappa} - \delta d'^{\kappa})(d^{i}\delta + d'^{i}\delta') + (d^{\kappa}\delta + d'^{\kappa}\delta')(\delta d'^{i} - \delta' d^{i})}{(\delta^{2} + \delta'^{2})^{2}} (-1)^{i+\kappa} =$$

$$= \frac{d^{\kappa} d'^{i} - d^{i} d'^{\kappa}}{\delta^{2} + \delta'^{2}} (-1)^{i+\kappa}$$

III) Θέτομεν :

$$d^{ik} = (d^{i} d^{k} + d'^{i} d'^{k})(-1)^{i+k} :$$

ἀντιμεταβαλλόμενος συμμετρικὸς τανυστὴς $(d^{ik} = d^{ki})$

$$d'^{ik} = (d^{k} d'^{i} - d^{i} d'^{k})(-1)^{i+k} :$$

ἀντιμεταβαλλόμενος ἀντιμετρικὸς τανυστὴς $(d'^{i\kappa} = -d'^{\kappa i})$

Ἐκ συμμετρίας δὲ θέτομεν :

$\delta^{i\kappa} = (\delta^{i} \delta^{\kappa} + \delta'^{i} \delta'^{\kappa})(-1)^{i+\kappa}$: ἀντιμεταβαλλόμενος συμμετρικὸς τανυστής.

$\delta'^{i\kappa} = (\delta^{\kappa} \delta'^{i} - \delta^{i} \delta'^{\kappa})(-1)^{i+\kappa}$: ἀντιμεταβαλλόμενος ἀντιμετρικὸς τανυστής.

$a_{i\kappa} = a_{i} a_{\kappa} + a'_{i} a'_{k}$: συμμεταβαλλόμενος συμμετρικὸς τανυστής.

$a'_{i\kappa} = a_{i} a'_{\kappa} - a_{\kappa} a'_{i}$: συμμεταβαλλόμενος ἀντιμετρικὸς τανυστής.

Ἵνα εἴμεθα βέβαιοι διὰ τὴν μεταβολὴν τῶν $\delta^{i\kappa}$ καὶ $\delta'^{i\kappa}$ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ $D^{h} = \delta^{h} + j\,\delta'^{h}$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\Delta = (a_{i} + j\,a'_{i})(\delta^{i} + j\,\delta'^{i})(-1)^{i+1} \ \text{ἢ}\ \delta = (a_{i}\delta^{i} - a'_{i}\delta'^{i})(-1)^{i+1}$$

$$\delta' = (a_{i}\delta'^{i} + a'_{i}\delta^{i})(-1)^{i+1}$$

ἐφόσον τὰ a_{i}, a'_{i} συμμεταβαλλόμενα, τὰ δ^{i}, δ'^{i} δέον νὰ εἶναι ἀντιμεταβαλλόμενα, ἵνα τὸ Δ εἶναι βαθμωτὴ ποσότης (scalaire)· ἑπομένως καὶ οἱ $\delta^{i\kappa}$, $\delta'^{i\kappa}$ εἶναι ἀντιμεταβαλλόμενοι τανυσταί.

Ἂς ἐκφράσωμεν τὸ $\delta^{2} + \delta'^{2}$ διὰ τανυστῶν :

ἔχομεν :

$$\delta = (a_{i}\delta^{i} - a'_{i}\delta'^{i})(-1)^{i+1} \qquad \delta' = (a_{i}\delta'^{i} + a'^{i}\delta^{i})(-1)^{i+1}$$

καὶ

$$\delta^{2} = [a_{i} a_{\kappa} \delta^{i} \delta^{\kappa} + a'_{i} a'_{\kappa} \delta'^{i} \delta'^{\kappa} - (a_{i} a'_{\kappa} \delta^{i} \delta'^{\kappa} + a_{\kappa} a'_{i} \delta^{\kappa} \delta'^{i})](-1)^{\kappa+i}$$

$$\delta'^{2} = [a_{i} a_{\kappa} \delta'^{i} \delta'^{\kappa} + a'_{i} a'_{\kappa} \delta^{i} \delta^{\kappa} + (a_{i} a'_{\kappa} \delta'^{i} \delta^{\kappa} + a_{\kappa} a'_{i} \delta'^{\kappa} \delta^{i})](-1)^{\kappa+i}$$

$$\delta^{2} + \delta'^{2} = [(a_{i} a_{\kappa} + a'_{i} a'_{\kappa})(\delta^{i}\delta^{\kappa} + \delta'^{i}\delta'^{\kappa}) + (a_{i} a'_{\kappa} - a_{\kappa} a'_{i})(\delta^{\kappa}\delta'^{i} - \delta^{i}\delta'^{\kappa})](-1)^{\kappa+i}$$

λαμβανομένων δὲ ὑπ᾽ ὄψιν τῶν σχέσεων (ΔΙΙΙ) :

$$\delta^{2} + \delta'^{2} = a_{i\kappa}\delta^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\delta'^{i\kappa} \tag{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα (ΔΙ) καὶ (ΔΙΙ) εἰς τὸν τύπον (2), λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς σχέσεις (ΔΙΙΙ) καὶ (3), ἔχομεν :

$$C = \frac{g_{i\kappa} d^{i\kappa} + g'_{i\kappa} d'^{i\kappa}}{a^{i\kappa}\delta^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\delta'^{i\kappa}} \tag{4}$$

Ε.) Δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν ἀκόμη διὰ νὰ δείξωμεν τὴν ἁπλοποίησιν τὴν ἐπιτυγχανομένην διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν τανυστῶν.

Ὁρίζομεν τοὺς ἀκολούθους τανυστάς:

1) $$\gamma_{i\kappa} = \frac{1}{2}\,[g_{i\kappa} + g_{\kappa i}] \text{ συμμετρικὸς } (\gamma_{i\kappa} = \gamma_{\kappa i})$$

διὰ τὸν ὁποῖον ἔχομεν :

$$\gamma_{i\kappa}\, d^{i\kappa} = \frac{1}{2}\,[g_{i\kappa}\, d^{i\kappa} + g_{\kappa i}\, d^{\kappa i}] = g_{i\kappa}\, d^{i\kappa} \text{ (διότι } d^{i\kappa} = d^{\kappa i})$$

2) $$\gamma'_{i\kappa} = \frac{1}{2}\,[g'_{i\kappa} - g'_{\kappa i}] \text{ ἀντιμετρικὸς } (\gamma'_{i\kappa} = -\gamma'_{\kappa i})$$

διὰ τὸν ὁποῖον ἔχομεν:

$$\gamma'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} = \frac{1}{2}\,[g'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} + g'_{\kappa i}\, d'^{\kappa i}] = g'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} \quad \text{(διότι } d'^{i\kappa} - d'^{\kappa i})$$

ἤτοι ἔχομεν :

$$g_{i\kappa}\, d^{i\kappa} + g'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} = \gamma_{i\kappa}\, d^{i\kappa} + \gamma'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa}$$

Θέτομεν δέ :

$$\Gamma_{i\kappa} = \gamma_{i\kappa} + \gamma'_{i\kappa},\quad D^{i\kappa} = d^{i\kappa} + d'^{i\kappa},\quad A_{i\kappa} = a_{i\kappa} + a'_{i\kappa},\quad \Delta^{i\kappa} = \delta^{i\kappa} + \delta'^{i\kappa}$$

σχηματίζομεν τὰ γινόμενα:

$$\Gamma_{i\kappa}\, D^{i\kappa} = \gamma_{i\kappa}\, d^{i\kappa} + \gamma'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} + \gamma_{i\kappa}\, d'^{i\kappa} + \gamma'_{i\kappa}\, d^{i\kappa} = \gamma_{i\kappa}\, d^{i\kappa} + \gamma'_{i\kappa}\, d'^{i\kappa}$$

$$A_{i\kappa}\, \Delta^{i\kappa} = a_{i\kappa}\, \delta^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\, \delta'^{i\kappa} + a_{i\kappa}\, \delta'^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\, \delta^{i\kappa} = a_{i\kappa}\, \delta^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\, \delta'^{i\kappa}$$

λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σημειώσεως Γ2.

Κατόπιν τῶν ὡς ἄνω σχέσεων (Ε) ὁ τύπος (4) γράφεται :

$$C = \frac{\Gamma_{i\kappa}\, D^{i\kappa}}{A_{i\kappa}\, \Delta^{i\kappa}} \tag{5}$$

ΣΤ.) Εἰδικὴ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ μηχανὴ συνδέεται εἰς ἓν καὶ μόνον δίκτυον.

Ἡ ὡς ἄνω περίπτωσις οὖσα πολὺ συνήθης ἀξίζει ἰδιαιτέρας ἐξετάσεως.

Εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) ἐπεισέρχεται μόνον μία τάσις U, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν :

$$U_1 = U \qquad U_2 = U_3 = - - - - - = U_n = 0$$

Ἀναπτύσσοντες τὸ D^h ὡς πρὸς τὴν πρώτην στήλην ἔχομεν :

$$D^h = U\,\Delta^h \quad \text{ἢ} \quad d^h = U\,\delta^h \qquad d'^h = U\,\delta'^h$$

ἀντικαθιστῶντες τὰ d^h καὶ d'^h διὰ τῶν ὡς ἄνω τιμῶν των εἰς τὰς σχέσεις (ΔΙΙΙ) λαμβάνομεν :

$$d^{i\kappa} = U^2\,\delta^{i\kappa} \qquad d'^{i\kappa} = U^2\,\delta'^{i\kappa} \qquad \text{καὶ} \qquad D^{i\kappa} = U^2\,\Delta^{i\kappa}$$

οἱ δὲ τύποι (4) καὶ (5) γράφονται :

$$C = U^2\,\frac{g_{i\kappa}\,\delta^{i\kappa} + g'_{i\kappa}\,\delta'^{i\kappa}}{a_{i\kappa}\,\delta^{i\kappa} + a'_{i\kappa}\,\delta'^{i\kappa}} \tag{4'}$$ (6 τανυσταὶ ἀντὶ 8)

$$C = U^2 \frac{\Gamma_{i\kappa}\ \Delta^{i\kappa}}{A_{i\kappa}\ \Delta^{i\kappa}} \qquad (5') \quad (3 \text{ τανυσταὶ ἀντὶ } 4)$$

Ὁ γενικὸς τύπος τῆς ῥοπῆς στρέψεως:

$$\boxed{C = \frac{\Gamma_{i\kappa}\ D^{i\kappa}}{A_{i\kappa}\ \Delta^{i\kappa}}}$$

δεικνύει εἰς ἡμᾶς τὴν ἀξιοσημείωτον σύνθεσιν, ἣν ὁ τανυστικὸς λογισμὸς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάνωμεν εἰς τοὺς κλασσικοὺς τύπους τοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Ὁ μηχανικὸς δύναται οὕτω μὲ ἕνα μόνον τύπον νὰ ἐκφράσῃ ὅλας τὰς μηχανικὰς χαρακτηριστικὰς τῶν ἠλεκτρικῶν μηχανῶν.

Ὁ τύπος οὗτος δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν ἔχει τυχὸν ἄλλος μαθηματικὸς τύπος, δυνάμεθα δὲ μᾶλλον νὰ τὸν ὀνομάσωμεν μέθοδον παρὰ τύπον καθόσον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀκολουθητέαν πορείαν διὰ τὴν κατάστρωσιν μιᾶς ἐξισώσεως. Ἔχοντες τὴν ἀκολουθητέαν πορείαν (σχηματισμὸς τανυστῶν, ἐξωτερικὰ γινόμενα κ.λπ.) προχωροῦμεν μὲ τάξιν καὶ καταλήγομεν μὲ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν, διὰ κάθε μηχανήν, εἰς τὸ ἐπιδιωκόμενον ἀποτέλεσμα. Δηλαδὴ τὸ πολύπλοκον τῆς μηχανῆς εἶναι εἰς ἡμᾶς ἀδιάφορον.

Ὁ τανυστικὸς λογισμὸς δὲν εἶναι μία μέθοδος ὑπολογισμοῦ, ἀλλ' ἁπλῶς *ἓν μέσον τοῦ νὰ θέσῃ τις ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεων ἓν δεδομένον πρόβλημα.*

Δίδομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω μεθόδου. Ὅπως μὴ ἀναφέρωμεν δι' ἑκάστην περίπτωσιν τὰς χρησιμοποιουμένας μονάδας θὰ ἐκφράσωμεν τὰ διάφορα μεγέθη πάντοτε διὰ τῶν αὐτῶν μονάδων: Ὤμ, Βὸλτ καὶ Ἀμπέρ, ὅτε ἡ ῥοπὴ στρέψεως ἡ ἐμφαινομένη εἰς τοὺς τύπους θὰ πρέπῃ νὰ διαιρεθῇ διὰ 9,81, ἵνα ἐκφράζηται εἰς χιλιογραμμόμετρα ($C = 9{,}81\ C_{\text{kgm}}$).

Παράδειγμα 1ον). ***Ἀσύγχρονος πολυφασικὸς κινητήρ.***

Ἐνταῦθα ἔχομεν τὰς κάτωθι ἐξισώσεις:

$$\bar{U} = (R + jX)\,\bar{I}_1 + jM\,\bar{I}_2$$

$$O = jgM\,\bar{I}_1 + (R_r + jgX_2)\,\bar{I}_2 \qquad \text{ὅπου:}$$

$$X = L\omega,\ M = m\omega,\ X_2 = L_2\omega$$

Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον (5), εὑρίσκομεν:

$$\boxed{C = \frac{U^2 p g m^2 \omega R_2}{(R^2 + X^2)\ (R_2^2 + g^2 X_2^2) - 2g^2 X X_2 M^2 + g^2 M^4 + 2gRR_2M^2}} \quad \text{ἀκριβὴς τύπος.}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τὸν κατὰ προσέγγισιν τύπον:

$$C = \frac{pn_2^2 \Phi^2 R_2 g\omega}{R_2^2 + l_2^2 g^2 \omega^2} 10^{-16}$$

μηδενίζοντες τὴν ἀντίστασιν R καὶ τὰς μαγνητικὰς ἀπωλείας, εἰς τὸν ὡς ἄνω τύπον, τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ πρωτεῦον, ἤτοι:

$$X = \frac{n_1}{n_2} M \qquad X_2 = l_2\omega + \frac{n_2}{n_1} M \qquad \left(\frac{U\,10^8}{n_1\,\omega} = \Phi\right)$$

Παράδειγμα 2ον). ***Μονοφασικὸς κινητὴρ μὲ συλλέκτην (ἐν σειρᾷ).***

Ἐνταῦθα ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\bar{U} = (R + jX - pm\Omega \text{ ἡμ } \alpha)\, \bar{I}_1$$

$$O = \bar{I}_2$$

ὅπου R ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις ($R = R_s + R_r$) καὶ X ἡ ὁλικὴ ἐπαγωγικὴ ἀντίστασις ($X = X_s + X_r + 2\,M$ συν α), ἐὰν α ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ἀξόνων τῶν ψηκτρῶν καὶ τῶν πόλων.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (5) εὑρίσκομεν:

$$\boxed{C = \frac{-\,p\,U^2 m \text{ ἡμ } \alpha}{(R_s + R_r - pm\Omega \text{ ἡμ } \alpha)^2 + (X_s + X_r + 2\,M \text{ συν } \alpha)^2}}$$

Παράδειγμα 3ον. ***Σύγχρονος κινητήρ.***

Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\bar{U}_1 = (R + jX)\, I_1 + E$$

$$U_2 = r\, I_2$$

Αἱ ὡς ἄνω ἐξισώσεις ἀναφέρονται εἰς τὰ περιστρεφόμενα πεδία, τὰ ὁποῖα εἰς τὸν στάτωρα ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα Ω, ἑπομένως δύνανται νὰ παρασταθοῦν ἀνυσματικῶς εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν:

$\alpha U_1 = U_2$ συν θ, $\alpha' U_1 = U_2$ ἡμ θ καὶ $\bar{U}_2 = \bar{U}_1(\alpha - j\alpha')$ ὅπου: $\theta = \widehat{U_1 U_2}$

ἐὰν δὲ θέσωμεν ἐπίσης:

$$A = \frac{r\alpha}{\alpha^2 + \alpha'^2} \qquad A' = \frac{r\alpha'}{\alpha^2 + \alpha'^2}$$

λαμβάνομεν:

$$\bar{U}_1 = \frac{r}{\alpha - j\alpha'} \bar{I}_2 = (A + jA')\bar{I}_2$$

καὶ

$$\bar{U}_1 = (R + jX)\, \bar{I}_1 + K\Omega \bar{I}_2$$

$$U_2 = \qquad (A + jA')\bar{I}_2$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν:

$$C = \frac{KU_1^2[A'X + R(A - K\Omega)]}{(R^2 + X^2)(A^2 + A'^2)} = \frac{E(XU_1 \text{ ἡμ } \theta + RU_1 \text{ συν } \theta - RE)}{(R^2 + X^2)\Omega}$$

$$\boxed{C = \frac{E[U_1 X \text{ ἡμ } \theta + R(U \text{ συν } \theta - E)]}{(R^2 + X^2)\Omega}}$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὸν ὡς ἄνω ἀκριβῆ τύπον $R = O$, εὑρίσκομεν τὸν γνωστὸν κατὰ προσέγγισιν τύπον:

$$C = \frac{U_1 E}{X\Omega} \text{ ἡμ } \theta$$

Παράδειγμα 4ον. ***Πολυφασικὸς κινητὴρ μὲ συλλέκτην** (Shunt)*.

Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\bar{U} = (R_1 + jX_1)\,\bar{I}_1 + (jM \text{ συν } a - M \text{ ἡμ } a)\,\bar{I}_2$$

$$\bar{U} = (j\,gM \text{ συν } a + gM \text{ ἡμ } a)\,\bar{I}_1 + (R_2 + j\,gX_2)\,\bar{I}_2$$

ὅπου a ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν ψηκτρῶν καὶ τοῦ ἄξονος τῶν πόλων.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν, κατόπιν πράξεων:

(θέτομεν $\sigma X_1 X_2 = X_1 X_2 - M^2$)

$$\boxed{C = \frac{pmU^2[M(gR_2 - R_1) - (R_1 R_2 + \sigma g X_1 X_2) \text{ ἡμ } \alpha + (gX_2 R_1 - X_1 R_2) \text{συν } \alpha]}{(g\sigma X_1 X_2 - R_1 R_2)^2 + (g R_1 X_2 + X_1 R_2)^2}}$$

RÉSUMÉ

Mr. Gabriel Kron, Ingénieur Amèricain, s'est servi le premier du calcul tensoriel pour exprimer la loi d'Ohm généralisée, la loi la plus principale de l'électricité.

Dans cet ordre d'idées en ne doit pas chercher, dans une étude originale, le developpement d'une théorie mathématique, mais une application d'un calcul bien connu en électricité : «L'établissement d'une formule tensorielle générale exprimant le couple mécanique de toute machine électrique».

L'expression classique du couple de chaque machine se déduit de cette formule générale par des opérations tensorielles élementaires, qui sont indiquées par quelques exemples, qui ont d'ailleurs pour but de vérifier la formule.