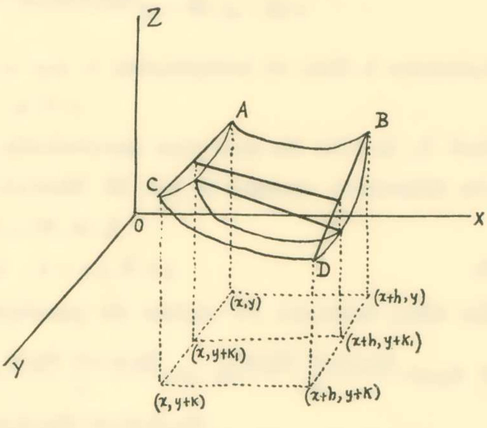
derjenigen der blaugrauen Tone und Mergel des Tortoniens und des Ostreensandsteins Albaniens, über welche Boué, Visquesnel und vor allem Nowack so wichtige Mitteilungen machten.

Diese Übereinstimmung kann übrigens bei der verhältnissmässig geringen räumlichen Entfernung zwischen den Verbreitungsgebieten beider Faunen nicht überraschen. Erstrecken wir nun die Vergleichung auch auf die anderen Vorkommnisse Italiens und des Wiener-Beckens, so ergibt sich in faunistischer Hinsicht, dass die Zusammensetzung der Molluskenfauna Akarnaniens fast identisch mit den tortonischen Formen Piemonts und des Wiener Beckens ist.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Sur les fonctions biconvexes***, *par* ***Th. Varopoulos.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Une fonction f(χ) de la variable réelle χ, est convexe lorsqu'un arc quelconque de la courbe qui représente la fonction n'a aucun de ses points au dessus de la corde qui joint ses extrémités. Ces fonctions ont été étudiées tout récemment par P. Montel dans son Mémoire «Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques» inséré au Journal de Mathématiques t VII-Fascicule I (1928), ainsi que dans son Mémoire «Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sousharmoniques» Praktika de l'Académie d'Athènes (novembre 1931)[1].



N. Criticos également a fait une étude de ces fonctions dans son article[2] «Περὶ τῆς συνεχείας μιᾶς κατηγορίας συναρτήσεων περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μετα-

* Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ. — Ἐπὶ τῶν διττῶς κυρτῶν συναρτήσεων. Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν 17 Δεκεμβρίου 1931.

[1] Consultez à ce sujet l'article de M. Galvani, t. 41, 1916, Circolo Math. di Palermo.

[2] A la suite de la lecture duquel j'ai posé la question à M. Montel (en juillet 1931) de savoir si les biconvexes f(χ,ψ) sont en effet continues aux points *interieurs* et *frontières* du domaine de definition de la fonction; on voit dans le memoire de M. Montel que la reponce n'est affirmative que pour les points intérieurs; pour les points frontières le resultat n'est pas exact.

βλητῶν» publié au Bulletin de la Société Mathematique de Grèce t IA, fasc. A, B—1930.

Par les quelques lignes qui suivent je me propose de simplifier la démonstration de P. Montel relative à une proposition seulement de son Mémoire, à savoir les fonctions $f(\chi,\psi)$ qui sont convexes en ψ, pour χ quelconque, et convexes en χ pour toute valeur de ψ.

Ces fonctions sont nécessairement continues par rapport à l'ensemble des deux variables (χ,ψ).

En effet je considère, avec Montel, les 4 points.

$$A(\chi,\psi,\ f(\chi,\psi)) \quad,\ B(\chi+h,\psi,\ f(\chi+h,\psi))$$
$$C(\chi,\psi+\varkappa,\ f(\chi,\psi+\varkappa)) \quad,\ D(\chi+h,\psi+\varkappa,\ f(\chi+h,\psi+\varkappa))$$

avec $o<h$, $o<\varkappa$

et son paraboloïde $P_{h,\varkappa}$ qui passe par ABCD et de plans directeurs XOZ, ΨOZ.

Envisageons son équation

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}(\Psi-\psi)$$
$$+(X-\chi)\ (\Psi-\psi)\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi+\varkappa)+f(\chi,\psi)}{h\varkappa}$$

Laissons h fixe, et remplaçons $\varkappa$ par $\varkappa_1$ tel que

$$o<\varkappa_1<\varkappa$$

Soit Z_1 la côte du nouveau paraboloïde P_{hk_1};

On démontre, comme le fait M. Montel, que

$$Z_1\,(X,\Psi)\leqslant Z\,(X,\Psi)$$

Si $\qquad \chi\leqslant X\leqslant \chi+h\ ,\ \psi\leqslant\Psi\leqslant\psi+\varkappa$

En effet, écrivons l'é.uation du paraboloïde

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}(\Psi-\psi)+(X-\chi)(\Psi-\psi)$$
$$\times\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi+\varkappa)+f(\chi,\psi)}{h\varkappa}$$

sous la forme

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+(\Psi-\psi)\left[\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}+\right.$$
$$\left.+(X-\chi)\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi+\varkappa)+f(\chi,\psi)}{h\varkappa}\right]$$

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+(\Psi-\psi)\left[\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}+\right.$$
$$\left.+(X-\chi)\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)}{h\varkappa}-(X-\chi)\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{h\varkappa}\right]$$

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+(\Psi-\psi)\Big[\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}\Big(1-\frac{X-\chi}{h}\Big)+$$
$$+(X-\chi)\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)}{h\varkappa}\Big]$$

ou bien[1]

$$Z-f(\chi,\psi)=\frac{f(\chi+h,\psi)-f(\chi,\psi)}{h}(X-\chi)+(\Psi-\psi)\Big[\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}\,\frac{\chi+h-X}{h}+$$
$$+(X-\chi)\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)}{h\varkappa}\Big]$$

Or les sections par $\chi=C^{te}$ sont convexes donc

$$\frac{f(\chi,\psi+\varkappa_1)-f(\chi,\psi)}{\varkappa_1}<\frac{f(\chi,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)}{\varkappa}$$
$$\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa_1)-f(\chi+h,\psi)}{\varkappa_1}<\frac{f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi+h,\psi)}{\varkappa}$$

d'autre part $X-\chi>o$, $\Psi-\psi>o$, $\chi+h-X>o$

donc $Z_1<Z$.

De même pour $o<h_1<h$.

Pour un point fixe (X,Ψ), $Z_{h\varkappa}$ est une fonction décroissante de h et $\varkappa$; on en déduit que, lorque h et $\varkappa$ tendent vers zéro $Z_{h\varkappa}$ a une limite $Z_0(X,\Psi)$ qui représente la côte d'un paraboloïde limite P_0.

La surface donnée $z=f(\chi,\psi)$ est comprise pour $h>o$, $\varkappa>o$ ente P_0 et $P_{h\varkappa}$, donc $f(\chi+h,\psi+\varkappa)$ a une limite $f(\chi,\psi)$ lorsque h et $K\to o$, ce qui démontre la continuité de la fonction $f(\chi,\psi)$ par rapport à l'ensemble des variables (χ,ψ).

Le théorème est faux pour les points-frontières du domaine d'existance de la fonction considerée $f(\chi,\psi)$[2].

2. On pourrait établir la continuité de la fonction $f(\chi,\psi)$ en partant des deux relations

$$f(\chi-h,\psi)+f(\chi+h,\psi)\geqslant 2\,f(\chi,\psi)\;;\quad f(\chi,\psi)\ \text{convexe en}\ \chi$$
$$f(\chi,\psi-\varkappa)+f(\chi,\psi+\varkappa)\geqslant 2\,f(\chi,\psi)\;;\quad f(\chi,\psi)\ \text{convexe en}\ \varkappa$$

et en déduire

$$|\,f(\chi+h,\psi+\varkappa)-f(\chi,\psi)\,|<\varepsilon$$

3. Je signale en terminant que les fonctions convexes sont continues; elles admettent une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sauf au plus

[1] C'est l'équation $Z=z+\frac{\Delta_h}{h}(X-\chi)+\frac{\Psi-\psi}{h}\Big[[\chi+h-X]\frac{\Delta_\varkappa f(\chi,\psi)}{\varkappa}+(X-\chi)\frac{\Delta_\varkappa f(\chi+h,\psi)}{\varkappa}\Big]$ de M.P. Montel

[2] P. MONTEL loc. cit.

pour un ensemble dénombrable de points[1]. La continuité d'une fonction convexe se trouve établie aussi dans l'article cité de N. Criticos.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὸν τόμον ΙΑ, τεῦχος Α, Β — 1930 τοῦ *Δελτίου τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας*, ὁ Ν. Κριτικὸς εἰς τὸ ὑπόμνημά του «Περὶ τῆς συνεχείας μιᾶς κατηγορίας συναρτήσεων περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν» μελετᾷ τὰς συναρτήσεις f(χ,ψ) κυρτὰς ὡς πρὸς χ καὶ κυρτὰς ὡς πρὸς ψ καὶ δεικνύει ὅτι αὗται εἶναι συνεχεῖς ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν (χ,ψ). Ἡ δὲ ἀπόδειξίς του στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀκολουθιῶν.

Ὁ ἀνακοινῶν θεωρήσας τὴν ὡς ἄνω ἀπόδειξιν πολύπλοκον καὶ διερωτηθεὶς ἂν ἡ πρότασις ἀληθεύει ἢ μὴ καὶ διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς (frontière) τοῦ τόπου Τ τῆς ὑπάρξεως τῆς f(χ,ψ), ἔθεσε τὸ ζήτημα τῆς συνεχείας ἢ μὴ τῆς f(χ,ψ) ὑπ' ὄψει τοῦ Γάλλου Μαθηματικοῦ P. Montel.

Ἡ ἀπάντησις ἦτο βεβαιωτικὴ διὰ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τόπου Τ καὶ ἀπορριπτικὴ διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς (frontière).

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν παρουσιάζεται ὑπὸ ἁπλῆν καὶ διδακτικὴν μορφὴν ἡ ἀπόδειξις τῆς συνεχείας τῆς f(χ,ψ) ἐντὸς τοῦ τόπου Τ συμφώνως πρὸς τὴν μέθοδον τὴν ἀκολουθουμένην ὑπὸ τοῦ Montel.

Ἐπὶ πλέον καθίσταται γνωστὸν ὅτι ἡ συνέχεια τῶν κυρτῶν συναρτήσεων εἶναι ἀποδεδειγμένη κατόπιν τῶν ἀναφερομένων ὑπομνημάτων τῶν Jensen, (1906) Galvani, (1916), Montel (1928), καὶ ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς § 4 σελ. 24 τοῦ ὑπομνήματος τοῦ Κριτικοῦ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ἀνισότητος

$$\varphi(\chi) \leqslant \frac{1}{2}\left[\varphi(\chi-h)+\varphi(\chi+h)\right]$$

καθ' ἃ προκύπτει ἐκ τῆς § 1, τοῦ ὡς ἄνω μνημονευθέντος ὑπομνήματος τοῦ Montel εἰς τὸ *Journal de Mathématiques* (1928).

[1] Voir le Mémoire de P. MONTEL cité ci-dessus du *Journal de Mathématiques*, 1928 ainsi que les articles de JENSEN, 7, 1, (*Acta Mathematica*, 30, 1906) et de L. GALVANI, Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque, *Circolo Matematico di Palermo*, 41, 1916.

Κ. Α. Κς