

ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 18^{ΗΣ} ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1979

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΑΙΣΑΡΟΣ ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ - ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ
ΡΥΠΑΝΤΩΝ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΥΔΡΟΣΦΑΙΡΑ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

Κ. ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Α. ΜΠΟΥΡΟΔΗΜΟΥ

A. ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τò θεωρητικό πλαίσιο τοῦ προβλήματός μας τίθεται στò ἐξῆς ἀναλυτικό τρίπτυχο :

Πρῶτο : Τί εἶναι τò πρόβλημα τῆς ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως στὴ φυσική του δομὴ καὶ στὴ μαθηματικὴ του διατύπωση ;

Δεύτερο : Πῶς καὶ γιατί ἔχουμε διάχυση οὐσιῶν καὶ διασπορά των στὴν ὑδρόσφαιρα ;

Ποιὲς οἱ ἀναλυτικὲς συνιστῶσες καὶ ποιὲς οἱ πρακτικὲς ἀπολήξεις τοῦ προβλήματος τῆς διαχύσεως καὶ ἀναμίξεως ;

Τρίτο : Γιατί χρειαζόμαστε νὰ μελετοῦμε σήμερα τὰ προβλήματα τῆς ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως καὶ διασπορᾶς ;

Ἡ συνολικὴ ἀπάντηση στò πρῶτο μας ἐρώτημα πὸν μπορεῖ νὰ διαγραφῆ καὶ νὰ ἀποτιμῆσαι ποιοτικά (καὶ ὄχι ποσοτικά) τò φαινόμενο τῆς διαχύσεως - διασπορᾶς ὡς διαδικασίας ἀναμίξεως - φαίνεται ἀπλῆ :

Εἶναι ἡ κίνηση μιᾶς οὐσίας μέσα σὲ μιὰ ἄλλη οὐσία.

Ἡ εἰδοποιὸς φυσικὴ διάταξη ὡς συνεχῆς δυναμικὴ διαδικασία τοῦ φαινομένου ἔχει σὰν ἀποτέλεσμα πῶς μιὰ οὐσία ἢ ἡ συγκέντρωση μιᾶς οὐσίας μάζης

(mass concentration) μικρῆς ποσότητος νὰ διαχυθῆ σ' ἓνα συγκεκριμένο χρονικὸ διάστημα καὶ χώρο (ἢ νὰ διαχέεται συνεχῶς καὶ θεωρητικῶς ἐπ' ἄπειρον) μὲ ἄμεση συνέπεια ὑποβιβασμὸ τῆς πυκνότητος ἢ τῆς ρυπαντικῆς ἰσχύος. Ἐνῶ ἡ ἄλλη — ὁ ὑποδεχόμενος φορεὺς ποὺ εἶναι μεγάλης ποσότητος — μιὰ λίμνη ἢ ἓνα ποτάμι — ἔχει τὴ δυνατότητα νὰ «ἀναδεχθῆ», νὰ «διαχύσῃ» τὴν οὐσίαν (ἢ τοὺς ρυπαντὰς) καὶ νὰ ἀδξήσῃ ἔτσι τὴ μικρὴ τοῦ πυκνότητα.

Ἔτσι ἐπιτυγχάνεται σὲ χώρο καὶ χρόνο μέσω τοῦ μηχανισμοῦ μιᾶς συνεχοῦς ροῆς μάζης (ἢ ροπῆς ἢ θερμότητος στὴ γενικώτερη θέση τοῦ προβλήματος) ἀπὸ «ὕψηλότερον» ἐπίπεδα δυναμικῶν (gradients) σὲ «χαμηλότερον», μιὰ τάση δυναμικῆς ἐξισορροπήσεως ποὺ ὀλοκληρώνεται θεωρητικὰ σὲ ἄπειρο χρόνο καὶ χώρο.

Ἡ ἐπακριβῆς ποσοτικὴ σὲ ἀριθμοὺς διάταξη τῆς φυσικῆς καὶ μαθηματικῆς δομῆς τοῦ προβλήματος λαμβάνει τὴ μορφή μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ποὺ συνιστοῦν τὸ μαθηματικὸ πρότυπο (model) ποὺ περιγράφει τὴ δυναμικὴ ὕψὴ τοῦ φαινομένου τῆς διαχύσεως στὴ μορφή συναρτησιακῶν σχέσεων τῶν μεταβλητῶν καὶ παραμέτρων, ὡς καὶ τῶν μεταβολῶν τῶν μεταβλητῶν καὶ παραμέτρων.

Στὸ δεῦτερο ἐρώτημα πῶς καὶ γιὰ τί ἔχουμε διάχυση οὐσιῶν καὶ συγκεντρώσεων οὐσιῶν στὴν ὑδρόσφαιρα ἢ ἀπάντηση στὴ μορφή μιᾶς — ὅσο εἶναι δυνατὴ — ποσοτικῆς διαγραφῆς εἶναι ἡ ἐξῆς: Διάχυση καὶ διασπορὰ οὐσίας μάζης ἢ ροπῆς (momentum) ἢ θερμότητος λαμβάνει χώραν πάντοτε, ὅταν δημιουργεῖται σ' ἓνα πεδίο ροῆς μία ἀπότομη («ὑψωση») τῆς ποσότητος καὶ δυναμικῆς ἢ ρυπαντικῆς ἰσχύος τῆς ὑπ' ὄψιν παραμέτρου αὐτὸ ποὺ λέμε στὴ Μηχανικῇ τῶν ρευστῶν (Mass Gradient ἢ Heat Gradient) ποὺ εἶναι πάντοτε τὸ «ἔναυσμα» κινήσεως, ἢ πηγὴ δυνάμεως καὶ δημιουργίας κινητικῆς ροῆς στὸν πεδιακὸ χώρο.

Ἡ ροὴ στὴ μορφή κινήσεως ὑγρῶν μαζῶν ποὺ περιέχουν τὴ διαχεομένη οὐσία ἢ στὴ μορφή ἐσωτερικῆς κυκλοφορίας (circulation) καὶ ἐσωτερικῶν κυμάτων (internal waves) γίνεται πάντοτε ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ χώρου μὲ ὑψηλὸ δυναμικὸ (gradient) στὰ σημεῖα τοῦ πεδίου μὲ μικρότερο δυναμικὸ. Εἶναι ἐδῶ ἀκριβῶς μιὰ βαθύτερη ὁμοιότης μὲ τὸ νόμο τοῦ δευτέρου θερμοδυναμικοῦ ἀξιώματος σύμφωνα μὲ τὸν ὅποιο ἡ ἐνέργεια γενικώτερα (καὶ στὴ μορφή τῆς θερμότητος εἰδικώτερα) ὀδεύει πάντοτε στὸ χρόνο ἀπὸ πεδιακὰ σημεῖα ὑψηλῆς θερμοκρασίας σὲ πεδιακὰ σημεῖα χαμηλῆς θερμοκρασίας καὶ ὄχι ἀντίστροφα. Τοῦτο σημαίνει μιὰ συνεχῆ μείωση τῆς θερμοκρασιακῆς στάθμης τοῦ πεδίου τοῦ «κλειστοῦ» συστήματος (ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι μιὰ λίμνη ἀλλὰ καὶ τὸ ἡλιακὸ σύστημα) μὲ ταυτόχρονη ἀξίσηση

τῆς ἐντροπίας (*entropy*) τοῦ συστήματος, μιᾶς καταστάσεως χαοτικῆς καὶ τυχαίας (*random*). Ἡ μεγιστοποίηση τῆς ἐντροπίας ἐνὸς συστήματος ἀπὸ πλευρᾶς θερμοδυναμικῆς καὶ θεωρητικῆς φυσικῆς ὀδηγεῖ εἰς τὸ θερμικὸ θάνατο τοῦ συστήματος. Ἐτσι παραδείγματος χάριν, οἱ θεωρητικοὶ φυσικοὶ καὶ ἡ ἐπιστήμη τῆς θερμοδυναμικῆς προβλέπει τὸ θερμικὸ θάνατο τοῦ ἡλιακοῦ συστήματος μετὰ πάροδον τριῶν δισεκατομμυρίων ἐτῶν περίπου ἀπὸ σήμερον.

Δὲν ὑπάρχει ἀπάντηση στηριζομένη στὴ φυσικὴ στὸ ἐρώτημα γιατί ἡ ροὴ καὶ ἡ κίνηση λαμβάνει χώραν κατὰ μίαν μονοσήμαντη κατεύθυνση, ἀπὸ τοῦ ἰσχυροτέρου δυναμικοῦ (*gradient*) στὸ χαμηλότερο.

Τὸ θέμα ἀνάγεται στὴ βαθύτερη φιλοσοφικὴ ὑποδομὴ καὶ δόμηση τῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ συνιστᾷ ἓνα δύσκολο γνωσιολογικὸ καὶ ὄντολογικὸ πρόβλημα τῆς μεταφυσικῆς καὶ τῆς φιλοσοφίας.

Οἱ συνιστώσες τοῦ προβλήματος τῆς διαχύσεως εἶναι ἡ ταχύτης ροῆς τοῦ πεδίου, ἡ διαχεομένη οὐσία, ἡ συγκέντρωση μάζης, ὁ ὕγρὸς ἢ στερεὸς («διαχέων») ὑποδοχὴς (ἔχουμε καὶ διάχυση σὲ στερεὰ ὑλικά καὶ κρυστάλλους), οἱ δυναμικῆς τῶν σχέσεις καὶ ἀλληλοεξαρτήσεις, τέλος τὸ πολυσήμαντο πλέγμα τῶν ἀρχικῶν ἢ ὀριακῶν συνθηκῶν ποὺ συνθέτει ἡ γεωμετρία τοῦ φορέως - ὑποδοχέως ἢ συστήματος καὶ ἡ δομὴ τοῦ πεδίου ροῆς. Σὰν παράδειγμα μπορεῖ νὰ ἀναφεροῦν οἱ ποικίλες γεωμετρικὲς ὑποδοχέων ὅπως μιὰ λίμνη (ἢ Βεγορίτις λίμνη, παραδείγματος χάριν, ποὺ καταστρέφεται ἀπὸ τὰ λύματα τῆς πόλεως τῆς Πτολεμαῖδος, τοῦ Κρατικοῦ Ἐργοστασίου Διπασμάτων τῆς ΑΕΒΑΛ καὶ τῆς ΔΕΗ στὴν περιοχὴ Πτολεμαῖδος), ἓνας ποταμὸς — ὁ Πηνειὸς — ποὺ ἐπίσης δοκιμάζεται ἀπὸ μύριες ρυπάνσεις καὶ οἰκολογικὲς διαταραχές, μιὰ παραθαλάσσια ζώνη ὅπως ὁ Σαρωνικός, ὁ Θερμαϊκὸς — ποὺ ὅλα ἔχουν ὑποστῆ σοβαρὴ ρύπανση καὶ σοβαρὲς οἰκολογικὲς ὑποβαθμίσεις ἢ θραύσεις σὲ πλεῖστα σημεῖα — ἢ ὁ Κόλπος τῆς Καβάλας, ἢ ἓνα λεκανοπέδιο ὅπως τῶν Ἀθηνῶν ἢ μία περιοχὴ ὅπως τῆς Θεσσαλονίκης. Πολύπλοκο καὶ πολυδύναμο ἐπίσης μπορεῖ νὰ εἶναι τὸ πεδίου μιᾶς ποταμίας ροῆς, ἡ κίνηση τῶν θαλασσίων ρευμάτων ἢ ἀερίων ὄγκων τῆς ἀτμοσφαιράς καὶ κυρίως ὁ βαθμὸς καὶ ἡ δομὴ τῆς τυρβώδους ροῆς (*turbulent flow field and the structure of turbulence*). Ἡ μαθηματικὴ διάταξη καὶ ἀνάλυση τῶν φυσικῶν συνιστωσῶν τοῦ προβλήματος καὶ τῶν ἀρχικῶν καὶ ὀριακῶν συνθηκῶν ὀδηγεῖ στὴ σύνθεση ἐνὸς συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων ποὺ γενικὰ δύσκολα μπορεῖ νὰ ἐπιλυθῇ. Ὑπάρχουν σήμερα στὴν περιοχὴ τῶν προβλημάτων τῆς χημικῆς καὶ ὕδροδυναμικῆς διαχύσεως τόσα εἰδικὰ προβλήματα ὅσα καὶ οἱ ὀριακὲς καὶ ἀρχικὲς συνθήκες τῆς διαχύσεως.

Ἡ μεγάλη μας ἀπαντοχή, τὸ μεγάλο μας στήριγμα στὴν ἀντιμετώπιση, στὴ λύση τῶν προβλημάτων τῆς διαχύσεως, στὴ μορφὴ τῆς μοριακῆς διαχύσεως καὶ κυρίως τῆς τυρβώδους διασπορᾶς εἶναι ἡ μαθηματικὴ ἀριθμητικὴ ἀνάλυση (*numerical analysis*), ἡ κραταίωση τῆς στατιστικῆς θεωρίας τῆς τυρβώδους ροῆς (*statistical theory of turbulence*), οἱ μετρήσεις πεδίου (*Field measurements*), ἡ ἐργαστηριακὴ ἔρευνα (*Laboratory research*) καὶ τέλος ὁ πανίσχυρος πνευματικὸς βραχίονας τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Ἐὰς προστεθῆ ἔδῳ πὼς δὲν εἶναι μόνον δύσκολο στὴ μαθηματικὴ του δομὴ καὶ ἀνάλυση τὸ πρόβλημα τῆς ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως - διασπορᾶς. Εἶναι μαζὶ μιὰ σύνθεση μυστικῆς ἁρμονίας, τῶν νόμων, τῶν μαθηματικῶν συμβόλων, μιὰ ὠραία δυνατὴ πρόκληση τοῦ νοῦ, ἓνα γεγονός ἀλήθειας καὶ ὁμορφιάς. Εἶναι γιὰτὶ οἱ μηχανισμοὶ τῆς μοριακῆς διαχύσεως καὶ τῆς τυρβώδους διασπορᾶς συμπλέκονται σὲ μιὰ ἀνώτερη ποιοτικὴ δομὴ μὲ τοὺς πολυτροπους, τοὺς πολυδύναμους, τοὺς λεπτοὺς μηχανισμοὺς τῶν βιοφυσικῶν καὶ βιοχημικῶν κύκλων, ποὺ συνθέτουν τὴ διαδικασία τῆς ὁμοιοστασεως τῶν οἰκοσυστημάτων, τὸ θεμέλιο τῆς ἴδιας τῆς ζωῆς.

Σ' αὐτὴ τὴ βαθειὰ ρίζα τῶν βιοχημικῶν κύκλων, ὅπου ἡ μοριακὴ, ἡ χημικὴ διάχυση (οἱ ἐξισώσεις εἶναι πάντα οἱ ἴδιες) παίζει ἓνα πρωτεύοντα ρόλο, σπινθηροβόλησε γιὰ πρώτη φορὰ τὸ βαθὺ μυστήριό τῆς ζωῆς, ὄλων τῶν ζώντων ὀργανισμῶν.

Ἔτσι πιστεύω πὼς στοὺς βιοχημικοὺς κύκλους, ποὺ στηρίζονται σὲ ποικίλα εἰδικὰ μοντέλα διαχύσεων κάθε μορφῆς καὶ εἴδους, ἔκανε ὁ Θεὸς τὸ θαῦμα τῆς δημιουργίας ὅταν, «ἔλαβεν χοῦν ἀπὸ τῆς γῆς καὶ ἐνεφύσησεν εἰς τὸ πρόσωπον αὐτοῦ πνοὴν ζωῆς καὶ ἐγένετο ἄνθρωπος εἰς ψυχὴν ζῶσαν» (Γεν. Β' 7).

Ἔτσι νομίζω πὼς περιεμβαίνομε σὲ «Ἔργο τοῦ Θεοῦ» ὅταν μὲ τὶς «πράξεις» καὶ τὶς «παραλείψεις» μας ἀνατρέπουμε τοὺς νόμους τῆς χημικῆς μοριακῆς διαχύσεως τῶν φυσικοχημικῶν κύκλων καὶ τῶν ὁμοιοστατικῶν μηχανισμῶν, ποὺ ἐκφράζονται σὰν οἰκολογικὲς διαταραχές, σὰν οἰκολογικὴ ἀστάθεια (*Ecological Instability*), σὰν ρύπανση τοῦ περιβάλλοντος, σὰν μόλυνση τοῦ χώρου. Καὶ τὸ θαῦμα τῆς ζωῆς, τὸ θαῦμα τῆς ὁμορφιάς πάνω στὸν πλανήτη μας μπορεῖ νὰ ἐκλείψη βιολογικὰ στὴν ὅλη πολυειδία, ἰσορροπία καὶ ποικιλία τῶν οἰκοσυστημάτων, ἂν ἀνατραποῦν οἱ νόμοι τῆς διαχύσεως καὶ τῶν βιοχημικῶν κύκλων. Ὁ Urey, ὁ σύγχρονος μεγάλος χημικὸς καὶ βιοχημικὸς ἀτόχος βραβείου Nobel, ἔζησε λίγα χρόνια πρὶν στὸ Πανεπιστημιακὸ ἐργαστήριό τοῦ Σικάγου τὸ εἶδος, τὸ πρῶτο βαθύρριζο μήνυμα τῆς ζωῆς στοὺς πρώτους, τοὺς ἀκρογωνιαίους λίθους τῆς ζωῆς, ποὺ εἶναι ἡ δημιουργία ἐνόργανης ὕλης κι ὅλη ἡ κλίμακα τῶν βιολογικῶν μορφῶν

πὸν ἔχει ρίζα χημική καὶ βιοχημική, ἐκείνη ἀκριβῶς πὸν «γαλουχεῖ» ἓνα φάσμα πολυδύναμων χημικῶν καὶ μοριακῶν διαχύσεων κάθε ποιῶ.

Ἡ χημική, μοριακή ἢ ἡ τυρβώδης «διάχυση» σὲ συνδυασμὸ μὲ κάθε μορφῆς «κύματα» μεταφορᾶς ἐνεργείας καὶ ὕλης, ἀπὸ ἐκεῖνα τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τοῦ μικροκόσμου μέχρι τῶν μηχανικῶν ταλαντώσεων τοῦ μακροκόσμου, ἀποτελοῦν τὶς βασικὰς διαδικασίαις μεταφορᾶς καὶ ἀλλαγῆς ἐνεργείας καὶ ὕλης. Ἐκεῖ εἶναι οἱ ρίζες, οἱ ἀκροδέκτες τῶν συνθετωτέρων φαινομένων τῆς ζωῆς καὶ ἀκόμη τοῦ μεγαλειώδους φαινομένου τῆς σκέψεως καὶ τῆς συνειδήσεως.

Θὰ κλείσουμε τὸ θέμα μ' ἓνα ἀπλὸ παράδειγμα : Εἶναι ἡ συνδυασμένη χημική καὶ ὑδροδυναμική διάχυση πὸν λαμβάνει χώρα στὴν κυκλοφορία τοῦ αἵματος τοῦ ἀνθρωπίνου ὄργανισμοῦ. Ἐκεῖ ὑπάρχει μιὰ συνεχῆς, μιὰ ἀπέρριπτη διαδικασία διαχύσεως ὀξυγόνου, στοιχείων τροφικῶν καὶ διοξειδίου τοῦ ἀνθρακος στὴ μορφὴ «εἰσροῶν - ἐκροῶν», σ' ἓνα πεδίο ροῆς αἵματος, ἐνὸς μὴ νευτωνείου ὑγροῦ διπλῆς φάσεως (two phase flow), ὅπως εἶναι τὸ αἷμα στοὺς ἐλαστικὸς ἀρτηριακοὺς σωλήνες.

Ἡ πρωτανέουσα αὐτὴ μηχανικὴ διαδικασία τῆς καθαρῆς χημικῆς καὶ ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως στὸ αἷμα τοῦ ἀνθρωπίνου ὄργανισμοῦ ἀποτελεῖ τὴ βάση ἀλληλεξαρτήσεως μὲ τὴ λειτουργία τοῦ ἔγκεφάλου.

Τὰ ἐγκεφαλικά κύτταρα — τὸ πιὸ τέλειο ἴσως καὶ πιὸ εὐγενικὸ ἀναβλάστημα τῆς δημιουργίας — δὲν μποροῦν νὰ διατηρηθοῦν, («νὰ ζήσουν») πέραν τῶν ἑπτὰ λεπτῶν χωρὶς τὴν παρουσία αἵματος ἐμπλουτισμένου σὲ ὀξυγόνο κυρίως, πὸν εἶναι ἡ θεμελιακὴ λειτουργία ἐπανοξυγονώσεως τῆς διαχύσεως. Ἔτσι ἡ ὕψιστη μαρμαρυγὴ τοῦ ἀνθρωπίνου στοχασμοῦ ξεκινάει ἀπὸ τοὺς μηχανισμοὺς διαχύσεως. Νὰ γιατί διαγράψαμε πῶς τὸ φαινόμενο διαχύσεως - διασπορᾶς εἶναι φαινόμενο — process αἰσθητικὰ ὕψηλὸ καὶ πνευματικὰ μεγάλο.

Γιατὶ κρύβει τὴν μοναδικότητα ἐνὸς φυσικοῦ αἰτιοκρατικοῦ νόμου καὶ μαζὶ μιὰ νομοτέλεια ἐνδελέχειας τελολογικῆς πὸν εἶναι τὸ θαμπωτικὸ μυστήριον καὶ ἡ ἀρμονία τῆς ζωῆς.

Τὸ τρίτο καὶ τελευταῖο μας ἐρώτημα εἶναι τοῦτο : Γιατί μελετοῦμε, γιατί πρέπει νὰ μελετοῦμε σήμερον τὰ προβλήματα τῆς ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως ; Ποίος ὁ πρακτικὸς λόγος καὶ ποιά ἡ θεωρητικὴ της δικαίωση ; Ἡ ἀπάντηση εἶναι διπλῆ : Τὸ πρῶτο σκέλος της εἶναι : Πρέπει νὰ γνωρίζουμε τὴν ἐπιστημονικὴν βάση, τὴν μαθηματικὴν δομὴν καὶ τὶς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς τῆς διαδικασίας, τῆς διασπορᾶς, ἀναμίξεως καὶ περαιτέρω ὀξειδώσεως καὶ ἀφομοιώσεως τῶν ρυπαντῶν καὶ τῶν ἄλλων οὐσιῶν στὴν ὑδρόσφαιρα, γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ σχεδιάσουμε μὲ ἀκρίβεια, νὰ

προγραμματίζουμε σωστά εναλλακτικές λύσεις σάν : α) τή φόρτιση τοῦ χώρου τῶν ὑγρῶν ἢ ἀερίων ὑποδοχέων με λύματα ἢ καυσάερια ἢ β) τήν ὀλική ἀπαγόρευση ρυπαντικῆς φορτίσεως ἢ γ) τή φόρτιση με λύματα ὑφιστάμενα βιολογικό, φυσικό ἢ χημικό καθαρισμό ἔτσι πού ἡ ρυπαντική των ἰσχὺς νὰ μειωθῆ καὶ ἡ ρύπανση - μόλυνση καὶ οἰκολογική διαταραχή νὰ ἀποφευχθῆ.

Τοῦτο με βάση τις ἀρχές μεγιστοποιήσεως τοῦ ἀποτελέσματος, καὶ ἐλαχιστοποιήσεως τῆς δαπάνης ὡς καὶ τήν ἀποφυγὴ διαταραχῆς τῆς κανονικῆς λειτουργίας τοῦ ὑποδοχέως—φορέως—καὶ ἐπέκεινα ἀποφυγῆς (καταστροφῆς ἢ ἀνατροπῆς) τῆς ἰσορροπίας (*stability*) καὶ «ποικιλίας» (*diversity*) τῶν οἰκοσυστημάτων—ὁδηγεῖ στή θέσπιση λυσιτελοῦς καὶ ἀκριβοῦς προγράμματος διαθέσεως καὶ διαχείρισεως λυμάτων καὶ ρυπαντῶν (ὑγρῶν, στερεῶν καὶ ἀερίων).

Ἔτσι βάσει ἐιδικῶν μοντέλων ὑδροδυναμικῆς διασπορᾶς με καθολικὴ θεώρηση τοῦ συνόλου τῶν παραμέτρων (οἰκολογικῶν, οἰκονομικῶν, τεχνικῶν καὶ κοινωνικῶν) με λεπτομερειακὴ ἐπαλήθευση (*verification*)—εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι ἀληθινὰ «μοντέλα προβλέψεων» (*predictive models*)—μποροῦμε νὰ ἔχουμε τὸ ἀσφαλέστερο ὄργανο ὑγειονομικοῦ σχεδιασμοῦ μέσα στὰ πλαίσια οἰκολογικοῦ προγραμματισμοῦ τῆς χώρας, ὡς προϋποθέσεως ἐθνικῆς μας ἀναπτύξεως. Ἐνδεικτικὰ ἄς ἀναφερθοῦν πῶς τέτοια μοντέλα ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως ρυπαντῶν εἶναι ἀναγκαῖα σήμερα γιὰ τὰ συστήματα Σαρωνικοῦ - Ἐλευσίνος, Θερμαϊκοῦ, Παγασητικοῦ, Πατραϊκοῦ - Κορινθιακοῦ καὶ Ἀμβρακικοῦ Κόλπου, ὡς καὶ τοῦ Κόλπου τῆς Καβάλας - Θάσου - ἰδία, ἐν ὄψει ἐξορύξεως ἀργοῦ πετρελαίου.

Τὸ δεύτερο σκέλος τῆς ἀπαντήσεώς μας στὸ ἐρώτημα γιὰτί πρέπει νὰ μελετοῦμε τήν ὑδροδυναμικὴ διάχυση καὶ διασπορά, ἐγγίζει τὸ περιγράμμα, τὸ θεμέλιο τοῦ οἰκοδομήματος τῆς ἐπιστήμης στὰ νεώτερα χρόνια : στὰ χρόνια τῆς Ἀναγεννήσεως καὶ τῆς θεμελιώσεως τῆς Ἐπιστήμης, ὅταν ὁ ἀριστοτελικὸς λόγος γίνεται ὄργανο τῆς ἐπιστημονικῆς μεθόδου. «Ὁ μὲν γὰρ λόγος τοῦ καθ' ὄλον, ἡ δὲ αἴσθησις τοῦ κατὰ μέρος», γιὰτί «... ἄνευ τοῦ καθ' ὄλου οὐκ ἔστιν ἐπιστήμη λαβεῖν...». Εἶναι ἀκόμη ἡ ἀνάγκη «ἀπόκρισῆς» μας στήν καταλυτικὴ ἔγνοια τοῦ «πῶς» καὶ «γιατί». Εἶναι ὁ βαρὺς κληρὸς τοῦ ἐπιστήμονος καὶ τοῦ ἐρευνητοῦ. Καὶ τῆς Ἐπιστήμης ἡ εὐλογία καὶ τὸ γέρας εἶναι ἡ ἀναζήτηση τῆς Ἀλήθειας. Τῆς ἀλήθειας πὸν μπορεῖ νὰ μᾶς σώση... Τῆς ἀλήθειας διὰ τοῦ Λόγου, διὰ τῆς Γνώσεως, διὰ τῆς Πράξεως. Τῆς ἐπιστημονικῆς ἀλήθειας πὸν μπορεῖ νὰ κάνη «τὴν ζωὴν ἀγαθὴν τε καὶ ἔμφορα»—ὅπως τὴν συνέλαβε ὁ Πλάτων στήν «Πολιτεία» του.

Εἶναι τέλος ἡ ἔγνοια τοῦ «γιατί», ἡ περηφάνεια, ἡ μοῖρα τοῦ «στοχαζόμενου» ἀνθρώπου, ὁ τραχὺς ἀγώνας, ἡ προμηθεϊκὴ ἀγωνία τοῦ πνεύματος.

B. ΠΟΣΟΤΙΚΗ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ:
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΩΝ
ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ — ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΗΣΗ — ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ (VERIFICATION)

I. Εισαγωγικά παρατηρήσεις.

Ἡ μαθηματικὴ διατύπωση τοῦ νόμου τῆς ὑδροδυναμικῆς διαχύσεως - διασπορᾶς (*Diffusion - Dispersion*), δηλ. τὸ πρότυπο (*Model*) τῆς διαδικασίας διαχύσεως οἰασδήποτε οὐσίας ἢ σωματιδίων (οὐσίας ὀργανικῆς, ἀνοργάνου ἢ νετρονίων) λαμβάνει τὴν μορφήν δευτεροβαθμίου μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (*Partial Differential Equation*), παραβολικῆς μορφῆς, γραμμικῆς ἢ μῆ.

Ὁ νόμος τῆς διαχύσεως - διασπορᾶς ἀποτελεῖ τμῆμα τῆς θεωρίας πεδίου (*field theory*) τῆς Θεωρητικῆς Φυσικῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλες οἱ φυσικὲς διαδικασίες (*processes*) καθορίζονται ἀπὸ πεδιακὰ μεγέθη (*field quantities*) ποὺ ἔχουν μιὰ καθορισμένη τιμὴ εἰς οἰονδήποτε σημεῖο τοῦ πεδιακοῦ χώρου ποὺ εἶναι κατὰ κανόνα συνάρτηση τοῦ χρόνου. Παρέπεται, ὡς ἐκ τούτου, ὅτι τέσσαρες ἀνεξάρτητες μεταβλητές, x, y, z, t (τρεῖς καρτεσιανὲς συντεταγμένες καὶ ὁ χρόνος) ὑπεισέρονται εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου. Τοῦτο ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν θεμελίωση τῶν νόμων τῆς Κλασσικῆς Νευτωνεῖου Μηχανικῆς, ἐπὶ μιᾶς μόνον ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἦτοι τοῦ χρόνου t , ἐκφραζομένων διὰ κανονικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (*Ordinary Differential Equations*).

II. Θεμελίωση μαθηματικῶν μοντέλων.

Ἡ μαθηματικὴ θεμελίωση μιᾶς φυσικῆς διαδικασίας (*process*) μὲ σχέσεις συναρτήσεων καὶ παραγῶγων συναρτήσεων ἐκφράζει κατὰ κανόνα τὸν νόμον τῆς αἰτιότητος (*Causality Law*) εἰς μαθηματικὸν συμβολισμόν τῆς σχέσεως μιᾶς φυσικῆς καταστάσεως (*State*) καὶ τῆς ἀμέσως γειτονικῆς της, τῆς «ἀπειροστικῆς γειτονικῆς» της.

Ἡ πληρεστέρα μορφή διαδικασίας διαχύσεως - διασπορᾶς ποὺ ἀνταποκρίνεται στὴ φυσικὴ πραγματικότητα εἶναι ὁ συνδυασμὸς κύματος (κυματικῆς) ταλαντώσεως (*Wave*) καὶ διαχύσεως - διασπορᾶς χημικῆς οὐσίας ἢ ρυπαντῶν (ἢ ἐπαγωγῆς θερμότητος — *Heat conduction*) εἰς τὴν ὑδροσφαιραν (ἢ εἰς οἰονδήποτε πεδίο), τὸ ὁποῖον περιέχει «πηγὰς» ἐν ἐνεργείᾳ — (θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς).

Ἡ θεμελιακὴ αὐτὴ ἐξίσωση τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς εἶναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = C_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g(x, y, z, t) \quad (1)$$

Ἐνθα : $\Phi(x, y, z, t)$, εἶναι ἀλγεβρική (ἢ διανυσματικὴ) συνάρτηση τῆς μεταβαλλομένης εἰς χρόνον καὶ χῶρον παραμέτρου, C_1 καὶ C_2 πραγματικαὶ σταθεραὶ ἐκφράζουσαι τοὺς συντελεστὰς τῆς κυματικῆς διαδικασίας ὡς καὶ τῆς διαδικασίας διασπορᾶς καὶ $g(x, y, z, t)$ ἡ συναρτησιακὴ ἔκφραση τῶν πηγῶν.

Ἡ ἐξίσωση διαδικασίας διαχύσεως - διασπορᾶς ἄνευ οἰασθήποτε ἄλλης συμπαρομαρτούσης ροῆς ἢ κινήσεως εἰς πεδίον ἄνευ πηγῶν λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = C_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2)$$

Ἐνθα C_2 παριστᾷ τὸν συντελεστὴν μοριακῆς διαχύσεως (*molecular diffusion*) ἢ τυρβώδους διαχύσεως (*Turbulent Diffusion - Dispersion, Coefficient*).

Τὰ ὡς ἄνω μαθηματικὰ μοντέλα εἰς τὴν μορφήν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀντιπροσωπεύουν ἓνα γενικὸ νόμο μιᾶς φυσικῆς διαδικασίας καὶ ὅχι ἓνα εἰδικὸ πρόβλημα. Τὸ εἰδικὸ φυσικὸ ἢ πρακτικὸ πρόβλημα καθορίζεται διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς γενικῆς λύσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως καὶ τῆς εφαρμογῆς τῶν ἀρχικῶν ἢ ὁριακῶν συνθηκῶν (*Initial and / or Boundary Conditions*) διὰ τὸν ἐπακριβῆ καθορισμὸ τῶν σταθερῶν τῆς ὀλοκληρώσεως (*Boundary Value Problems*). Βεβαίως τὰ ἀκριβῆ μαθηματικὰ μοντέλα ὡς διαγράφονται ὑπὸ διαφορικῶν ἐξισώσεων δὲν μποροῦν νὰ ἀποδώσουν μὲ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν τὸ ἀνάγλυφο τοῦ πεδίου ροῆς (ποταμοῦ, λίμνης, ἀκτῆς ἢ ἐδάφους εἰς περίπτωσιν ἀερολυμάτων), ἥτοι τὴ γεωμετρία τοῦ φορέως καὶ τὴ δομὴ τοῦ πεδίου ροῆς (*flow field*), τὰ ὁποῖα κατὰ κανόνα δὲν ἀκολουθοῦν τὴν ἐξιδανικευμένη μορφή τῶν μαθηματικῶν ἐξισώσεων καὶ συνθηκῶν. Ἐδῶ ὑπείσχεται ἡ ἀνάγκη κατασκευῆς (καὶ ἐπαληθεύσεως) φυσικῶν ὁμοιωμάτων (*models*) ὑπὸ κλίμακα εἰς τὸ πειραματικὸ ἐργαστήριον. Τόσον τὰ μαθηματικὰ ὁμοιώματα (*Διαφορικὰ ἐξισώσεις - Boundary Value Problems*), ὅσον καὶ τὰ φυσικὰ ὑδροδυναμικὰ ὁμοιώματα ἀέρος-ἀέρος καὶ ἀέρος-ὑδατος (πρωτότυπον - ὁμοίωμα) καταστρώνονται καὶ θεμελιοῦνται ἀκριβέστερον μὲ μετρή-

σεις τοῦ πραγματικοῦ πεδίου, εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνει χώραν ἡ διαδικασία διαχύσεως - διασπορᾶς.

III. Πρακτικαὶ περιπτώσεις - ἐφαρμογαί.

Ὡς περιπτώσεις διαχύσεως συγκεντρώσεως μάζης (mass concentration) ἢ θερμότητος (heat diffusion) ἢ ροπῆς (momentum turbulent diffusion) ἐνδεικτικῶς ἀναφέρονται :

- α. Διάχυση - Διασπορὰ οὐσιῶν μὴ συντηρητικῶν (non-conservatives) ὅπως τὸ βιοχημικῶς ἀπαιτούμενον Ὄξυγόνον (BOD = Biochemical Oxygen Demand) ποὺ εἶναι εἰς τῶν κυρίων δεικτῶν ρυπαντικῆς ἰσχύος λύματος. (Μὴ συντηρητικαὶ οὐσίαι εἶναι ἐκεῖναι εἰς τὰς ὁποίας ὁ βαθμὸς συγκεντρώσεως - πυκνότητος («μάξης») μειοῦται μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου).
- β. Διαλελυμένον Ὄξυγόνον (DO = Dissolved Oxygen).
- γ. Θάνατος βακτηριδίων (Die-off). Ὑποβιβασμὸς βαθμοῦ συγκεντρώσεως μικροβίων - βακτηριδίων εἰς τὴν ὑδρόσφαιραν.
- δ. Ἀπομάκρυνση (Removal) ὀργανικῆς καὶ κυρίως ἀνοργάνου οὐσίας διὰ καθιζήσεως (Sedimentation).
- ε. Ἀπομάκρυνση ὀργανικῆς οὐσίας ρυπαντῶν διὰ βιολογικῆς ὀξειδώσεως.
- στ. Διάχυση νετρονίων.
- ζ. Διάλυση - διάχυση ἄλατος θαλασσίου ὕδατος (οὐσία συντηρητική).

IV. Μαθηματικὰ μοντέλα εἰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς διαδικασιῶν διαχύσεως - διασπορᾶς ρυπαντῶν εἰς ὑδρόσφαιραν.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωση ταυτοχρόνου μεταφορᾶς (κινήσεως μὲ διάνυσμα ταχύτητος πεδίου ροῆς \bar{q} (U, V, W) καὶ διαχύσεως - διασπορᾶς ρυπαντῶν σὲ οἰονδήποτε ὑδάτινο φορέα (convection and diffusion), εἰς τὸν ὁποῖον αἱ διαδικασίαι ἀναπνοῆς (respiration) τῶν φυσικῶν καὶ ζωικῶν ὀργανισμῶν λαμβάνουν χώραν ἐν συνδυασμῶ μὲ βιολογικὰς διαδικασίας «δημιουργίας ἢ μεταλλαγῆς» μάζης - ὕλης τοῦ οἰκοσυστήματος, εἶναι :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} - U c \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} - V c \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} - W c \right) - \Phi c + \Psi(t) \quad (3)$$

ξνθα: (i) $D_x D_y D_z$ οί συντελεσται μοριακῆς ἢ τυρβώδους διαχύσεως — πὸν πρέπει *a priori* νὰ καθορισθοῦν διὰ πειραματικῶν μετρήσεων ἢ μετρήσεων πεδίου.

(ii) $C(x, y, z, t) =$ ἡ συνάρτηση «συγκεντρώσεως» ρυπαντοῦ [*sewage (substance) concentration*] (ἢ θερμοκρασίας) ὡς συνάρτηση χωρο-χρονική.

Ἐὰν οἱ συντελεσται διαχύσεως διασπορᾶς («ὑποτεθοῦν») ἢ («ἀποτιμηθοῦν») διὰ τὸν εἰδικὸν ὑδάτινον φορέα καὶ τὰς εἰδικὰς συνθήκας ροῆς καὶ γεωμετρικοῦ σχήματος) ὡς σταθεραί, ἢ ὡς ἄνω διαφορική ἐξίσωση εἶναι γραμμική. Ἐὰν οἱ συντελεσται διαχύσεως διασπορᾶς ὑποτεθοῦν ὡς συναρτήσεις τοῦ χώρου-χρόνου, τὸ πρόβλημα εἶναι μὴ γραμμικὸν καὶ ἐξόχως δυσχερές. Εἰς οἵανδήποτε περίπτωσιν ἢ ἀποτίμηση τῶν συντελεστικῶν διαχύσεως πρὸ τῆς ἀναλυτικῆς θεωρήσεως τοῦ προβλήματος εἶναι *sine qua non* προϋπόθεσις λύσεως.

Εἰς περίπτωσιν τυρβώδους ροῆς (*turbulent flow field*) οἱ συντελεσται διασπορᾶς - διαχύσεως ἔχουν τιμὰς πολλαπλασίας ἐκείνων τῶν συντελεστικῶν μοριακῆς διαχύσεως (100 - 200 πλάσιαι). Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς οἱ συντελεσται μοριακῆς διαχύσεως καὶ ἡ συμβολή των εἰς τὴν ὅλην διαδικασίαν τῆς διασπορᾶς μίξεως μπορεῖ νὰ ἀγνοηθῇ. Τὸ ὄλο πρόβλημα εἶναι τότε θέμα τυρβώδους διαχύσεως καὶ τυρβώδους μίξεως - διασπορᾶς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τυρβώδους ροῆς, ἡ τυρβώδης ροὴ μάζης οὐσίας (πυκνότητος ρ) κατὰ ἐπιφανειακὴν ὁμάδα εἶναι $= \rho(u'C'_A)$, εἶναι ἀνάλογοι συμφῶνως πρὸς τὸν νόμον *Fick* (*Fick's First Law*) διὰ μοριακὴν ροὴν μέ :

$$\overline{\rho u' C'_A} = - \rho D_x \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial x}, \quad \overline{\rho v' C'_A} = - \rho D_y \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial y} \quad \text{and} \quad \overline{\rho w' C'_A} = - \rho D_z \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial z}$$

ὅπου $\bar{C}_A =$ ἡ μέση (μὲ βάση τὸν χρόνον) τιμὴ συγκεντρώσεως οὐσίας ρυπαντοῦ καὶ u', v', w' αἱ διακυμάνσεις (*fluctuations*) τῆς ταχύτητος \bar{q} (U, V, W) ἀπὸ τὴν μέσην (μὲ βάσιν τὸν χρόνον) τιμὴν i.e. $U = \bar{U} + u'$ καὶ D_x, D_y, D_z , οἱ συντελεσται τυρβώδους διαχύσεως - διασπορᾶς.

Π Ι Ν Α Κ

Ειδικοί πρακτικοί εφαρμογαι Διαχύσεως	Διαφορική εξίσωση (Μοντέλο)	Δύση εξισώσεως και τύπος πρακτικής εφαρμογής
1. Μονοδιάστατη, Διάχυση - Διαστορά εις Υδάτινον Υποδοχέα χωρίς κίνηση-ροή ($m = \text{μάζα μετά στιγμιαίας απόρριψης}$)	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ One - Dimensional Diffusion - No convection	$C = \left(\frac{m}{\sqrt{4\pi D_x t}} \right) e^{-\frac{x^2}{4D_x t}}$ Στιγμιαία απόρριψη m (instantaneous release) εις χρόνον $t=0$ και τόπον $x=0$
2. Μονοδιάστατη Διάχυση - Διαστορά εις Υποδοχέα χωρίς κίνηση-ροή ($m = \text{μάζα}$ συνεχώς απόρριπτομένη)	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ One - Dimensional Diffusion - No Convection - Continuous release	$C = \frac{m\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D_x}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D_x t}\right] -$ $-\frac{mx}{2D_x} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_x t}}\right)$
3. Μονοδιάστατη Διάχυση και Κίνηση-Ροή εις την ιδίαν κατεύθυνσιν (Convection along x) Στιγμιαία απόρριψη m	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x}$ Convection along x	$C = \frac{m}{\sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4D_x t}\right]$ Instantaneous release m
4. Μονοδιάστατη Διάχυση και Κίνηση-Ροή (Convection along x) Συνεχής απόρριψη m	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U \frac{\partial c}{\partial x}$	$C = \left[\frac{m}{\sqrt{4\pi D_x t}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \cdot \right.$ $\left. \cdot \left[\exp\left(-\frac{[x-U(t-t')]^2}{4D_x(t-t')}\right) \right] dt' \right]$

(Συνέχεια του πίνακος)

Ειδικά πρακτικά εφαρμογών Διαχύσεως	Διαφορική εξίσωση (Μοντέλο)	Λύση εξίσωσης και τύπος πρακτικής εφαρμογής
5. Διδιάστατη Διάχυση - Διασπορά χωρίς κίνηση - ροή Στηγμιαία απόρριψη συντηρητικής ουσίας εις ποσότητα m κατά μονάδα βάθους	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$	$C = \frac{m}{4\pi\sqrt{D_x D_y t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right]$
6. Διδιάστατη Διάχυση - Διασπορά και ροή - κίνηση εις διεύθυνση x Στηγμιαία απόρριψη	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial c}{\partial y} - U \frac{\partial c}{\partial x}$	$C = \frac{m}{4\pi\sqrt{D_x D_y t}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right]$
7. Διδιάστατη Διάχυση - Διασπορά χωρίς ροή Συνεχής απόρριψη συντηρητικής ουσίας εις χρόνον $t = 0$ και $x = 0$ εις ποσότητα m κατά μονάδα βάθους ύποδοχώς και μονάδα χρόνου	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$ Διά συμμετρικών περιπτώσεων $D_x = D_y = 0$	$C = \frac{m}{4\pi D} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\theta^2} d\theta$ · Η εν λόγω λύση θεωρητικώς σημαίνει ότι η συγκεντρωση της ουσίας (συντηρητικής) θα αυξηθῆ «ἀπειρώς» με την πάροδον του χρόνου.
8. Διδιάστατη Διάχυση - Διασπορά - Ροή και Κίνηση εις διεύθυνση x Συνεχής απόρριψη συντηρητικής ουσίας (two Dimensional Diffusion Convection along x axis).	$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - U \frac{\partial c}{\partial x}$ Συμμετρική περίπτωση $D_x = D_y = 0$	$C = \frac{m}{2\pi D} \exp\left[-\frac{Ux}{2D}\right] K_0\left(\frac{Ur}{2D}\right)$ όπου K_0 είναι η συνάρτηση Bessel (Modified Bessel function of the Second Kind of order Zero).

V. Διευκρινιστικά Παρατηρήσεις.

5. 1. Διασπορά μη - συντηρητικών ούσιων (BOD, Sewage).

Εἰς τὰς περιπτώσεις συνεχοῦς ἀπορρίψεως συντηρητικῶν οὐσιῶν εἰς πεδία τυρβώδους ροῆς χωρὶς κίνηση (*turbulent field with no convection*) ὑψηλαὶ (ἀπέειρος ὑψηλαὶ θεωρητικῶς) συγκεντρώσεις οὐσίας ρυπαντῶν θὰ λάβουν χώραν.

Εἰς περιπτώσεις ἀπορρίψεως μὴ συντηρητικῶν οὐσιῶν (BOD) μὲ ὑποβάθμιση τῆς οὐσίας ἀνάλογον πρὸς kc (ὅπου k ὁ συντελεστὴς ὑποβαθμίσεως), ὅλαι αἱ ὡς ἄνω λύσεις θὰ πρέπει νὰ πολλαπλασιασθοῦν μὲ τὸν συντελεστὴν e^{-kt} .

5. 2. Ἐνδειγμένη Πορεία Ἐρεύνης καὶ Ἐπαληθεύσεως (Verification).

Εἰς περιπτώσεις θεωρητικῆς καὶ ἐργαστηριακῆς ἐρεύνης ἐπὶ θεμάτων ὑδροδυναμικῆς κυκλοφορίας καὶ διασπορᾶς ρυπαντῶν (*pollutant dispersion and circulation*) ἡ ὀρθὴ πορεία ἐρεύνης καὶ σημασιολογήσεως τῶν φαινομένων εἶναι «παλινδρομικὴ» καὶ ἀμφιμονοσήμαντη· ἤτοι ἀπὸ τὰ φυσικὰ ὁμοιώματα τοῦ Ἐργαστηρίου στὰ μαθηματικὰ μοντέλα καὶ τοὺς ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστὰς κατὰ τὸ σχῆμα:

Φυσικὰ ὁμοιώματα (*models*) Ἐργαστηρίου + μετρήσεις πεδίου \rightleftarrows μαθηματικὰ μοντέλα + *computer simulation models*.