ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1927

ΠΡΟΕΔΡΙΑ Κ. ΖΕΓΓΕΛΗ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΦΙΛΟΛΟΓΙΑ.— *Περὶ τοπωνυμιῶν τῆς Τήνου ὑπὸ κ. Σ. Μενάρδου.**

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Ὁ Γ. Γραμματεὺς παρουσιάζει τὴν πρώτην ἰαπωνιστὶ γραφεῖσαν γραμματικὴν τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης. Εἶναι ἔργον τοῦ καθηγητοῦ τοῦ ἐν Κιότῳ Πανεπιστημίου κ. Τάνακα. Ὁ κ. Μενάρδος ἐξαίρει τὸν φιλελληνισμὸν τοῦ συγγραφέως, ὅστις μεταφράζει ἰαπωνιστὶ τὸν Ὅμηρον, σκοπεῖ δὲ νὰ μεταφράσῃ καὶ τοὺς τραγικούς, τοὺς ἱστορικούς, τοὺς φιλοσόφους καὶ τοὺς ῥήτορας. «Τί ἄλλο νὰ εὐχηθῶμεν, (εἶπεν ὁ κ. Μενάρδος) εἰς τὸν ἐνθουσιώδη φιλέλληνα τῆς Ἀπωτάτης Ἀνατολῆς ἢ νὰ ζήσῃ μέχρις οὗ συμπληρώσῃ ὅ,τι ὁ ἴδιος ἀποκαλεῖ *μέγα ἔργον τῆς ζωῆς του*».

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—**Sur la vitesse des fonctions croissantes***.
Note de M. ***Spuridion Sarantopoulos.*** Présentée par M. G. Rémoundos.

1.—M. Borel dans son Mémoire sur les fonctions entières (Acta Mathematica t. XX 1897) a démontré que si $\sigma(x)$ est une fonction (continue) croissante quelconque et α et η deux nombres positifs finis, arbitraires l'inégalité

$$\sigma\left[x+\frac{1}{[\log\sigma(x)]^{\eta}}\right]<\sigma(x)^{1+\alpha} \tag{1}$$

a lieu à partir d'une valeur de x, sauf peut-être dans une suite d'intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

---

* Θὰ δημοσιευθῇ εἰς ἑπόμενον τεῦχος.

* ΣΠ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ. — Περὶ τῆς ταχύτητος τῶν αὐξουσῶν συναρτήσεων.

Ce théorème, très utile à plusieurs applications snr les fonctions entières, a subi des differentes extentions par la demonstration d'inégalités plus précises[1] que (1). Nous avons cependant démontré, qu'en général on ne peut pas donner des inégalités plus précises au délà d'un certain point[2] à cause de la présence d'intervalles exceptionnels dont l'étendue totale n'est pas finie; ces intervalles peuvent même occuper tout l'intervalle $(x \ldots . + \infty)$. M. O. Blumenthal[3] a fourni les fonctions-types qui satisfont à l'inégalité (1) partout. M. G. Rémoundos[4] a introduit une fonction q(r) qui satisfaisant à quelques conditions a pour but d'éviter les intervalles exceptionnels. Sous ce point de vue, nous aussi, nous avons écrit, dans un travail rélatif, «sur quelques précisions des fonctions entières et des fonctions croissantes[5]».

Bien que l'inégalité (1) suffit dans des différentes applications, bien qu'on peut utiliser les fonctions-types, ou la fonction q(r), pourtant la recherche de la relation existante entre les quantités qui se présentent dans l'inégalité (1), d'une manière plus rigoureuse excluant les intervales exceptionnels, a beaucoup d'interêt. Ces intervalles s'excluent évidemment si l'on considère l'égalité

$$\sigma\left[x+\frac{1}{[\log \sigma(x)]^{\eta}}\right]=\sigma(x)^{1+\alpha},$$

η étant une fonction $\eta(x)$ convenable, ou d'une façon plus simple l'égalité

$$\sigma(x+\varepsilon)=\sigma(x)^{1+\alpha}. \tag{2}$$

Cette dernière égalité nous a servi comme point de départ à des recherches importantes. Nous nous contenterons de communiquer ici quelques résultats intéressants. Un mémoire relatif à ces recherches paraîtra bientôt.

2.—Considérons l'égalité (2). Le nombre α s'appellera régulateur (διευθέτης). Alors nous appelons vitesse (analytique) de la fonction $\sigma(x)$ à un point x pour un régulateur α, la quantité ε qui satisfait à l'égalité (2). La limite

---

[1] Thèse de M. Sp. Sarantopoulos soutenue à l'Université de Strasbourg pour obtenir le titre de docteur, 23 Mars 1923.

[2] Thèse de M. Sp. Sarantopoulos pag. 17.

[3] Principes de la théorie des fonctions entière d'ordre infini, par O. Blumenthal, 1910.

[4] Le module et les zéros des fonctions analytiques, Note de M. G. Rémoundos, Comptes rendus du Congrès de Strasbourg.

[5] Bulletin de la Société Mathématique de Grèce t. VI 1925, et t. VII 1, 2, 1926.

de $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, s'il existe, pour $\lim\alpha=0$ s'appellera vitesse momentanée de $f(x)$ au point x, ou vitesse à un instant donné.

Dans ces difinitions il y a quelques analogies avec les définitions connues données en Mécanique. Nous pouvons imaginer que x est l'intervalle parcouru par un point, que α désigne le temps qui se coule quand le mobile se déplace de la place $M(x)$ à une autre $M(x+\varepsilon)$ et que $\sigma(x)$ représente la force qui produit le mouvement. Alors la vitesse à un instant donné du mobile sera $v=\lim\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\frac{\varepsilon}{\alpha}$, c'est-à-dire elle coincide avec la vitesse momentanée de la fonction.

La liaison par la rélation (2) entre les différents éléments ci-dessus, qui se présentent dans le monvement d'un mobile, suggère la question suivante:

Quelles sont les fonctions croissantes qui désignant une force peuvent satisfaire à une rélation (2), ε désignant le déplacement du mobile entre le temps t et $t+\alpha$, c'est-à-dire la vitesse analytique de la force pour un régulateur donné?

Soit m la masse du mobile. Alors les fonctions, qui repondent à la question posée, sont le résultat de l'élimination de t entre les deux équations

$$x=ct+c_1+\int dt\int(mA)^{(1+\alpha)^{\frac{t}{\alpha}}}dt \quad \text{et} \quad \Delta=(mA)^{(1+\alpha)^{\frac{t}{\alpha}}},$$

c, c_1 et A étant constants quelconques.

3.—En ce qui concerne la vitesse momentanée des fonctions croissantes on peut énoncer les théorèmes suivants:

I. La vitesse momentenée d'une fonction croissante $\sigma(x)$ est égale à l'inverse de la dérivée de $l_2\sigma(x)$.

II. Si deux fonctions croissantes ont des vitesses momentanées égales à tout point (de l'axe x), l'une d'elles est une puissance de l'autre (à exposant constant).

4.—Relativement à la vitesse (analytique) des fonctions croissantes on peut énoncer plusieurs propositions intéressantes. Nous allons en donner quelques unes, les suivantes:

I. Si deux fonctions croissantes $\sigma(x)$ et $f(x)$ ont des vitesse égales à tout point pour deux régulateurs différents α et β, l'une des nombre $1+\alpha$ et $1+\beta$ sera une puissance de l'autre ayant pour exposant un nombre rationnel.

Nous ne pouvons donner ici que quelques indications sur la démonstration de cette proposition intéressante. Cette démonstration se répose sur les deux faits suivants:

α′) Écrivons $f(x)=\sigma(x)^{\nu}$

et formons des intervalles successifs, à partir d'une valeur quelconque x_1 de x, en utilisant la relation (2). Soit

$$\sigma(x_1+\varepsilon_1)=\sigma(x_1)^{1+\alpha},\ \sigma(x_2+\varepsilon_2)=\sigma(x_2)^{1+\alpha},\ \ldots\ \sigma(x_\mu+\varepsilon_\mu)=\sigma(x_\mu)^{1+\alpha},$$

étant posé $x_1+\varepsilon_1=x_2$, $x_2+\varepsilon_2=x_3,\ldots$, et ainsi de suite. Dans chaque intervalles (x_1, x_2), $(x_2, x_3),\ldots$, l'exposant ν n'étant pas constant prend les mêmes valeurs et dans le même ordre.

β′) On peut former des intervalles successifs à partir de la même valeur x, à l'aide du régulateur β (c'est-à-dire moyennant l'égalité $\sigma(x+\eta)=\sigma(x)^{1+\beta}$). Soit (x_1, y_2), $(y_2, y_3),\ldots$ ces intervalles. On démontre qu'il existe d'autres intervalles successifs à partir de x_1, les (x_1, z_1), $(z_1, z_2),\ldots$ qui se forment à l'aide d'un autre régulateur γ. Chaque intervalle $(x_\varkappa, x_{\varkappa+1})$ se décompose à un nombre λ, toujours le même, d'intervalles (x_1, z_1), $(z_1, z_2)\ldots$. Aussi chacun de (y_1, y_2) est la somme d'un nombre $\varkappa$, plus petit, mais constant, de tels intervalles (x_1, z_1), $(z_1, z_2),\ldots$.

En combinant ces deux faits on arrive aux relations

$$1+\alpha=(1+\gamma)^{\lambda} \text{ et } 1+\beta=(1+\gamma)^{\varkappa}$$

d'où l'on obtient

$$1+\alpha=(1+\beta)^{\frac{\lambda}{\varkappa}} \tag{3}$$

II. Si deux fonctions $\sigma(x)$ et $f(x)$ ont la même vitesse à tout point x, pour deux régulateurs α, β, qui ne satisfont pas à une relation de la forme (3), l'une d'elles est une puissance de l'autre à éxposant constant.

III. On a la même conclusion dans le cas où $f(x)$ et $\sigma(x)$ ont la même vitesse à tout point, pour un régulateur α et pour une infinité d'autres β qui sont liés avec lui par la relation $(1+\beta)^{\mu}=1+\alpha$, μ etant entier.

5. On peut examiner des différentes autres questions. Par exemple, trouver la forme des fonctions croissantes dont la vitesse, pour un régulateur constant α, soit une fonction de x donnée d'avance. Même problème, dans les cas où le régulateur α n'est pas constant, mais une fonction quelconque, de préference décroissante.

Dans le cas où la vitesse et le régulateur α sont constants, les fonctions qui y s'attachent sont de la forme

$$\left[A^{(1+\beta)}\right]^{\varphi(x)},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction périodique qui admet une période ε, et α étant lié avec la vitesse ε par la relation $1+\alpha=(1+\beta)^{\varepsilon}$.

Ces fonctions satisfont à la formule:

$$\int_x^{x+\varepsilon}\left[\sigma(x)+\sigma(x)^{1+\alpha}+\sigma(x)^{(1+\alpha)^2}+\ldots+\sigma(x)^{(1+\alpha)^{\mu}}\right]dx=\int_x^{x+(\mu+1)\varepsilon}\sigma(x)\,dx$$

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

῾Ο γάλλος μαθηματικὸς καὶ ἀκαδημαϊκὸς κ. BOREL ἔχει ἀποδείξει, ὅτι, ὅταν μία συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς καὶ αὔξουσα, ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα

$$(1) \qquad \sigma\left[x+\frac{1}{[\log\sigma(x)]^{\eta}}\right]<\sigma(x)^{1+\alpha}$$

ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἐφεξῆς παντοῦ, πλὴν ἐξαιρετικῶν τινων διαστημάτων ὁλικοῦ μήκους μικροτέρου ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς πλείστας ἐφαρμογάς. ῾Η παρουσία ὅμως τῶν ἐξαιρετικῶν διαστημάτων ἐγένετο ἀφετηρία διαφόρων ἐρευνῶν. ῾Ο γερμανὸς μαθηματικὸς κ. OTTO BLUMENTHAL, ὁ κ. Γ. ΡΕΜΟΥΝΔΟΣ, ὁ κ. Σπ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ κλπ. ἠργάσθησαν σχετικῶς.

῾Ο κ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ θέλων ν' ἀποφύγῃ τὴν παρουσίαν τῶν ἐξαιρετικῶν διαστημάτων χρησιμοποιεῖ εἰς νέας του ἐρεύνας, ὧν τὰ πορίσματα ἀνακοινοῖ ἐνταῦθα, οὐχὶ τὴν ἀνισότητα (1), ἀλλὰ τὴν ἰσότητα $\sigma(x+\varepsilon)=\sigma(x)^{1+\alpha}$. Ἔχων ὡς βάσιν τὴν ἰσότητα ταύτην εἰσάγει μίαν νέαν ἔννοιαν τὴν τῆς ἀναλυτικῆς ταχύτητος τῶν αὐξουσῶν συναρτήσεων, ἥτις παρουσιάζει ποιάν τινα ἀναλογίαν μὲ τὴν ταχύτητα κινητοῦ κινουμένου τυχοῦσαν (εὐθύγραμμον) κίνησιν καὶ ἀποδεικνύει διαφόρους προτάσεις ἐνδιαφερούσας, οἷαι αἱ κάτωθι:

1. ῾Η ταχύτης μιᾶς αὐξούσης συναρτήσεως $\sigma(x)$ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ ἀντιστρόφου τῆς παραγώγου τῆς $l_2\sigma(x)$.

2. Ἐὰν δύο συναρτήσεις αὔξουσαι ἔχουσι ταχύτητας ἴσας εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος x, ἡ μία τούτων εἶναι δύναμις τῆς ἄλλης.

3. Ἐὰν δύο συναρτήσεις αὔξουσαι $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$ ἔχουσι ταχύτητας ἴσας εἰς πᾶν σημεῖον διὰ δύο διαθέτας α καὶ β, ὁ ἕτερος τῶν ἀριθμῶν $1+\alpha$ καὶ $1+\beta$ θὰ εἶναι δύναμίς τις τοῦ ἄλλου μὲ ἐκθέτην σύμμετρον, κλπ.
