ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 22ΑΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1988

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΜΕΡΙΚΑ

# Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTALS

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ Κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

*Κύριε Πρόεδρε,*
*Κύριοι Συνάδελφοι,*
*Κυρίες καὶ Κύριοι.*

*Ἡ σημερινὴ ὁμιλία σκοπὸ ἔχει νὰ περιγράψει ἢ καλύτερα νὰ σκιαγραφήσει, σὲ πολὺ γενικὲς γραμμές, μιὰ Νέα Γεωμετρία γιὰ τὴν ὁποία ὁλοένα καὶ περισσότερος λόγος γίνεται καὶ αὔξουσα δραστηριότητα παρατηρεῖται τὰ τελευταῖα ὀκτὼ ἢ δέκα χρόνια.*

*Θεμελιωτὴς τοῦ νέου αὐτοῦ κλάδου τῶν Μαθηματικῶν εἶναι ὁ Benoit B. Mandelbrot, ὁ ὁποῖος εἶναι IBM Fellow στὸ Thomas J. Waston Research Center ποὺ βρίσκεται στὸ York-town Heights τῆς Νέας Ὑόρκης τῶν USA. Ὁ Mandelbrot διετέλεσε ἐπίσης καθηγητὴς σὲ διάφορα ἀνώτατα ἐκπαιδευτικὰ ἱδρύματα τῶν USA καὶ τῆς Εὐρώπης*

*Ἐπειδὴ ὁ χρόνος ποὺ διαθέτω εἶναι περιορισμένος, τὸ δὲ ἀκροατήριο ἀνομοιογενές, θὰ περιορισθῶ μόνο σὲ γενικότητες. Στὸ κείμενο ποὺ θὰ δοθεῖ πρὸς δημοσίευση στὰ Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν θὰ ὑπάρχει ἡ σχετικὴ βιβλιογραφία, τὸ ἴδιο δὲ κείμενο θὰ ἀποτελέσει, ἐνδεχομένως, τὴν πρώτη σχετικὴ ἑλληνικὴ βιβλιογραφικὴ ἀναφορά. Ἐπίσης, προτοῦ προχωρήσω στὴν ὁμιλία μου, θὰ ἤθελα νὰ δηλώσω ὅτι τὸ ἐν λόγῳ θέμα δὲν ἐμπίπτει ἄμεσα στὰ ἐρευνητικά μου ἐνδιαφέροντα. Παρὰ ταῦτα προβαίνω στὴν παρουσίασή του γιὰ τοὺς ἑξῆς δύο λόγους:*

*1. Πρόκειται γιὰ ἕνα νέο κλάδο τῶν Μαθηματικῶν καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ παρουσίασή του ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ ἐπιβάλλεται.*

2. Ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals φαίνεται νὰ εἶναι πολὺ χρήσιμη καὶ νὰ ἔχει ἐφαρμογὲς καὶ σὲ ἄλλες ἐπιστῆμες ὅπως ἡ Ἀστρονομία, ἡ Φυσιολογία, ἡ Χημεία, ἡ Φυσικὴ κ.ἄ. Γιὰ τὸν λόγο αὐτό, ἐπειδὴ ἡ κύρια ἀποστολὴ τῆς Ἀκαδημίας εἶναι ἡ διασύνδεση τῶν εἰδικοτήτων ποὺ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τοὺς κατ' ἰδίαν ἀκαδημαϊκούς, μὲ σκοπὸ νὰ ἐπιτευχθεῖ μεγαλύτερη γονιμοποίηση τῆς σκέψης χάρις στὴν ἀμοιβαία ἀνταλλαγὴ ἀπόψεων ἀπὸ διαφορετικὲς πηγές, ἡ ἐν λόγῳ παρουσίαση κρίθηκε ἐπιβεβλημένη.

Καὶ τώρα ἐπὶ τοῦ θέματος.

Ἡ Γεωμετρία τῶν Fiactals δὲν εἶναι ἁπλῶς μιὰ νέα μαθηματικὴ θεωρία. Προέκυψε ἀπὸ μιὰ πολὺ προσεκτικὴ μελέτη τῆς Φύσης. Πολλὰ σχήματα στὴ Φύση εἶναι τόσο ἀκανόνιστα, ἡ μορφή τους εἶναι τόσο ἀνώμαλη, ποὺ ἂν τὰ συγκρίνομε μὲ ἐκεῖνα ποὺ μελετᾶ ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία θὰ παρατηρήσομε ὅτι ἡ Φύση παρουσιάζει μιὰ εἰκόνα πολὺ πιὸ πολύπλοκη καὶ διαφορετικῆς ὑφῆς: Ἕνα σύννεφο δὲν εἶναι σφαίρα, ἕνα βουνὸ δὲν εἶναι κῶνος, οἱ θαλάσσιες ἀκτὲς μιᾶς χώρας δὲν εἶναι τόξα κύκλων, οὔτε καὶ ἡ τροχιὰ μιᾶς ἀστραπῆς εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἡ ὕπαρξη τῶν πολυπλόκων αὐτῶν σχημάτων στὴ Φύση, καὶ τὰ ὁποῖα ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία παραλείπει νὰ ἐξετάσει ὡς στερούμενα συγκεκριμένης μορφῆς, ὑπῆρξε ἡ αἰτία ποὺ ὁδήγησε στὴ διερεύνηση τῆς μορφολογίας τοῦ «ἀμόρφου». Ἔτσι ἡ Νέα Γεωμέτρία ἀσχολεῖται μὲ τὴ μελέτη μιᾶς μεγάλης κατηγορίας τῶν ἀνωμάλων, τῶν ἀκανονίστων ἀντικειμένων ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, τὰ ὁποῖα ὁ Benoit Mandelbrot ἀποκαλεῖ fractals.

Ἡ λέξη fractal προέρχεται ἀπὸ τὸ λατινικὸ ἐπίθετο fractus. Τὸ ἀντίστοιχο ρῆμα εἶναι frangere ποὺ σημαίνει «σπάζω δημιουργώντας ἀκανόνιστα κομμάτια». Μέχρι ἐξευρέσεως δοκίμου ἑλληνικοῦ ὅρου θὰ περιορισθοῦμε στὴ λέξη fractal.

Ἡ λέξη fractal μπορεῖ νὰ τεθεῖ ὡς ἐπικεφαλίδα σὲ μιὰ μεγάλη κλάση ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα ἔπαιξαν ἱστορικὸ ρόλο στὴν ἀνάπτυξη τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν. Μιὰ μεγάλη ἐπανάσταση ἰδεῶν διαχωρίζει τὰ κλασικὰ Μαθηματικὰ τοῦ 19ου αἰώνα ἀπὸ τὰ σύγχρονα Μαθηματικὰ τοῦ 20οῦ αἰώνα. Οἱ ρίζες τῶν κλασικῶν Μαθηματικῶν εὑρίσκονται στὶς κανονικὲς γεωμετρικὲς μορφὲς τοῦ Εὐκλείδη καθὼς καὶ στὴ συνεχῶς ἐξελισσόμενη Δυναμικὴ τοῦ Newton. Τὰ σύγχρονα, τὰ μοντέρνα Μαθηματικά, ξεκίνησαν μὲ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων, τοῦ Cantor, καὶ τὴν καμπύλη τοῦ Peano ἡ ὁποία ἔχει γραφικὴ παράσταση ποὺ καταλαμβάνει τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου. Ἡ ἐπανάσταση αὐτὴ τῶν ἰδεῶν ἐπεβλήθη δι' ἐκείνων τῶν μαθηματικῶν ἀνακαλύψεων οἱ ὁποῖες δὲν μποροῦσαν πλέον νὰ ἐνταχθοῦν στὶς προδιαγραφὲς τοῦ Εὐκλείδη καὶ τοῦ Newton. Οἱ νέες αὐτὲς δομὲς θεωρήθηκαν τότε ὡς «παθολογικὲς» καὶ ὅτι ἀποτελοῦσαν μιὰ κατηγορία «τεράτων». Κάτι ἀνάλογο συνέβη ἐξάλλου ὅταν, περίπου τὴν ἴδια ἐποχή, ἐμφανίσθηκε «ὁ Κυβισμὸς» στὴ ζωγραφικὴ καὶ ὁ ὁποῖος θεωρήθηκε ὅτι διετάρασσε τὰ καθιερωμένα ἕως τότε κριτήρια τῆς «καλῆς Τέχνης».

Ἀντιθέτως οἱ μαθηματικοὶ ποὺ δημιούργησαν τὰ «τέρατα» αὐτὰ τὰ θεώρησαν σπουδαῖα, διότι ἀποτελοῦσαν ἀπόδειξη ὅτι ὁ κόσμος τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν περιελάμβανε ἕνα πλοῦτο δυνατοτήτων οἱ ὁποῖες ξεπερνοῦσαν κατὰ πολὺ τὶς μέχρι τότε ἁπλούστερες δομὲς ποὺ εἶχαν παρατηρηθεῖ στὴ Φύση. Τὰ μαθηματικὰ τοῦ 20οῦ αἰώνα ἀναπτύχθηκαν μὲ τὴν πεποίθηση ὅτι τὰ μέχρι τότε παρατηρηθέντα ἐμπόδια εἶχαν ὑπερβληθεῖ. Καὶ τώρα ἡ Γεωμετρία τῶν fractals ἔρχεται νὰ ἐπιβεβαιώσει ὅτι οἱ ἴδιες «παθολογικὲς» δομὲς ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω εἶναι παροῦσες σὲ ὅλα τὰ γνωστὰ ἀντικείμενα ποὺ εὑρίσκονται γύρω μας. Ἡ Νέα Γεωμετρία ἐπιβεβαιώνει ἐπίσης καὶ τὸ ὀρθὸν τῆς παρατηρήσεως ποὺ εἶχε κάνει ὁ Blaise Pascal: «L'imagimation se lassera plutôt de concevoir que la Nature de fournir». Ποὺ σημαίνει: «Ἡ φαντασία θὰ κουρασθεῖ νὰ ἐπινοεῖ πρὶν ἀπὸ τὴ Φύση, ἡ ὁποία (Φύση) θὰ ἐξακολουθήσει νὰ προσφέρει».

Πάντως ἡ Γεωμετρία τῶν fractals δὲν εἶναι ἄμεση ἐφαρμογὴ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ 20οῦ αἰώνα. Εἶναι ἕνας νέος κλάδος ποὺ γεννήθηκε μετὰ τὴν κρίση τῶν Μαθηματικῶν ποὺ ἀναφέραμε, καὶ ἡ ὁποία ἄρχισε ὅταν ὁ du Bois Reymond, πρῶτος τὸ 1875, ἔκανε μιὰ ἀνακοίνωση σχετικὴ μὲ τὴν κατασκευὴ ἀπὸ τὸν Weirstrass ἑνὸς ἐκ τῶν «τεράτων» ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, τὴν κατασκευὴ δηλαδὴ μιᾶς μὴ παραγωγίσιμης συνεχοῦς συναρτήσεως, ἤτοι τὴν κατασκευὴ συνεχοῦς καμπύλης ἡ ὁποία νὰ μὴν ἐπιδέχεται ἐφαπτομένη σὲ κανένα σημεῖο της.

Κατὰ τὸν Mandelbrot ἡ Γεωμετρία τῶν fractals παρέχει λύσεις σὲ ἕνα σύνολο προβλημάτων στὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μερικὰ πολὺ παλαιά.

Ἂς ἐξετάσομε ὅμως ἀπὸ πιὸ κοντὰ τὴν ἔννοια fractal. Εἴπαμε προηγουμένως ὅτι τὰ fractals εἶναι μιὰ κατηγορία ἀντικειμένων μὲ ἀκανόνιστα ἀνώμαλα σχήματα. Μιὰ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν fractals εἶναι ὅτι ἐξεταζόμενα μὲ ὁλοένα ἰσχυρότερους μεγεθυντικοὺς φακοὺς ἀποκαλύπτουν, σὲ κάθε φάση, καὶ περισσότερες λεπτομέρειες. Ἐπιπλέον ἡ δομὴ ποὺ παρουσιάζουν ὅταν ἡ παρατήρηση γίνεται ὑπὸ μικρὴ κλίμακα εἶναι ἡ ἴδια μὲ ἐκείνη ποὺ παρουσιάζουν ὅταν ἡ παρατήρηση γίνεται ὑπὸ μεγαλύτερη κλίμακα. Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ θὰ γίνει καλύτερα ἀντιληπτὴ στὰ παραδείγματα fractals ποὺ θὰ δώσομε παρακάτω. Μιὰ δεύτερη ἰδιότητα τῶν fractals εἶναι ὅτι ὁ βαθμὸς κανονικότητάς τους μετριέται μὲ στατιστικὲς μεθόδους. Γιὰ τεχνικοὺς λόγους δὲν θὰ σχολιάσομε περαιτέρω τὴν ἰδιότητα αὐτή.

Ὁ αὐστηρὸς μαθηματικὸς ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας fractal κάμνει χρήση τῆς *ἐννοίας τῆς διαστάσεως ἑνὸς συνόλου κατὰ Hausdorff-Besicovitch. Προτοῦ δώσω τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ θὰ προσπαθήσω νὰ προλειάνω κάπως τὸ ἔδαφος γιὰ τοὺς μὴ μαθηματικούς.*

*Εἶναι γνωστὸ ὅτι σὲ κάθε σύνολο τοῦ Εὐκλειδείου χώρου (τοῦ φυσικοῦ χώρου ποὺ μᾶς περιβάλλει), ὁσοδήποτε «παθολογικὸ» καὶ ἂν εἶναι αὐτὸ τὸ σύνολο, ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος καλεῖται ἡ «τοπολογικὴ διάσταση» τοῦ συνόλου καὶ σημειώνεται* $D_T$. *Ἡ τοπ. διάσταση π.χ. ἑνὸς σημείου εἶναι 0, ἡ τοπ. διάσταση ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι 1, ἡ τοπ. διάσταση ἑνὸς τριγώνου εἶναι 2, ἡ τοπ. διάσταση μιᾶς σφαίρας εἶναι 3. Στὸ ἴδιο σύνολο ἀντιστοιχεῖ ἐπίσης καὶ ἕνας δεύτερος ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος καλεῖται ἡ διάσταση τοῦ συνόλου κατὰ Hausdorff-Besicovitch (1919) καὶ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα D.*

*Φυσικὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναπτύξω ἐδῶ τὴ θεωρία τῆς διαστάσεως κατὰ Hausdorff-Besicovitch. Θὰ ἀρκεσθῶ μόνο σὲ μερικὰ σχετικὰ σχόλια. Ἡ πρώτη (φευγαλέα) σκέψη ὅτι ἡ γενικὴ ἔννοια τοῦ ὄγκου καὶ γενικότερα ἡ ἔννοια τοῦ μεγέθους εἶναι ἀπαραίτητη στὴ διερεύνηση τοῦ θέματος ποὺ ἀφορᾶ τὶς διαστάσεις τῶν συνεχῶν συνόλων ὀφείλεται στὸν Cantor. Ἡ ἰδέα αὐτὴ προωθήθηκε σημαντικὰ ἀπὸ τὸ μεγαλοφυὴ Ἕλληνα μαθηματικὸ Κωνσταντίνο Καραθεοδωρῆ (1914). Εἶναι γνωστὸ στὴ μαθηματικὴ ἀνάλυση τὸ «μέτρο τοῦ Καραθεοδωρῆ». Ὁ Hausdorff προχώρησε περισσότερο ἀπὸ τὸν Καραθεοδωρῆ καὶ εἰσήγαγε τὸ γνωστὸ καὶ εὐρέως χρησιμοποιούμενο «μέτρο τοῦ Hausdorff». Τέλος μὲ τὴ σοβαρὴ συμβολὴ τοῦ Besicovitch εἰσήχθη ἡ ἔννοια τῆς κατὰ Hausdorff-Besicovitch διαστάσεως ἡ ὁποία παίζει θεμελιώδη ρόλο στὴ Γεωμετρία τῶν Fractals.*

*Ἀμφότερες οἱ διαστάσεις* $D_T$ *καὶ D εἶναι μὴ ἀρνητικὲς καὶ δὲν ὑπερβαίνουν τὴν Εὐκλείδεια διάσταση τοῦ χώρου ὅπου ἀνήκει τὸ θεωρούμενο σύνολο.*

*Ἡ διάσταση* $D_T$ *εἶναι πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐνῶ ἡ διάσταση D, ποὺ λέγεται ἐπίσης καὶ «fractal διάσταση» δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος ἀριθμός, ἰσχύει δὲ πάντοτε ἡ ἀνισότητα* $D \geqq D_T$.

*Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δίνομε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό:*

*«Καλεῖται Fractal κάθε σύνολο τοῦ ὁποίου ἡ κατὰ Hausdorff-Besicovitch διάσταση εἶναι αὐστηρῶς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τοπολογική του διάσταση:* $D > D_T$*».*

*Στὴ συνέχεια τῆς ὁμιλίας, ἀποφεύγοντας κατὰ τὸ δυνατὸν τὶς ἑκάστοτε παρουσιαζόμενες τεχνικὲς δυσκολίες θὰ ἐξετάσομε καὶ θὰ σχολιάσομε μερικὰ παραδείγματα fractals, ἀναφερόμενα στὰ καθαρὰ Μαθηματικὰ καθὼς καὶ σὲ ἄλλες ἐπιστῆμες, τὰ ὁποῖα παραδείγματα, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὰ μέχρι τώρα ἐκτεθέντα, σκοπὸ ἔχουν, συγχρόνως, νὰ βοηθήσουν τὸν ἀκροατὴ νὰ σχηματίσει μιὰ ἀμυδρὴ* ἔστω εἰκόνα τῶν μέσων ποὺ χρησιμοποιεῖ καὶ τῶν στόχων πρὸς τοὺς ὁποίους ἀποβλέπει ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals, καθόσον εἶναι προφανὲς ὅτι μιὰ συστηματικὴ καὶ πλήρης παρουσίαση τοῦ θέματος, ἐδῶ, εἶναι ἀδύνατος.

Ὡς πρῶτο παράδειγμα ἂς θεωρήσομε ἕνα τμῆμα τῆς γραμμῆς ποὺ σχηματίζει ἡ παραλιακὴ ἀκτὴ κάποιας χώρας. Εἶναι ἕνα fractal. Πρόκειται γιὰ μιὰ πολὺ ἀνώμαλη καμπύλη τὸ μῆκος τῆς ὁποίας εἶναι, προφανῶς, μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα της. Ἂν τώρα, χρησιμοποιώντας κάποια ἀπὸ τὶς πολλὲς ὑπάρχουσες μεθόδους, ἐπιχειρήσομε νὰ ὑπολογίσομε τὸ «ἀκριβὲς» μῆκος τῆς θεωρούμενης ἀκτῆς, θὰ παρατηρήσομε ὅτι αὐτὸ εἶναι παρὰ πολὺ μεγάλο καὶ τόσο ἀκαθόριστο ὥστε εἶναι προτιμότερο νὰ τὸ θεωρήσομε ἄπειρο! Γιὰ ὅσους εἶναι ἐξοικειαμένοι μὲ τὴν μαθηματικὴ ὁρολογία, πρόκειται ἐδῶ γιὰ μιὰ μὴ εὐθυγραμμίσιμη καμπύλη. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ κλασικὴ ἔννοια τοῦ μήκους εἶναι ἀκατάλληλη γιὰ νὰ συγκρίνομε ποσοτικὰ τὶς διάφορες παραλιακὲς ἀκτὲς μεταξύ τους. Ὅμως ἡ σύγκριση αὐτή, καθὼς καὶ ἄλλες παρομοίας φύσεως, πρέπει νὰ γίνει, καὶ ἐδῶ ἀκριβῶς ἡ ἔννοια τῆς fractal διάστασης παρουσιάζεται ὡς σανίδα σωτηρίας. Ἡ ὄντως εὐφυεστάτη ἰδέα προέρχεται ἀπὸ τὸν Felix Hausdorff. Ἂς τὸν ἀκολουθήσομε στὶς πρῶτες του σκέψεις: Γιὰ νὰ μετρήσομε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἑνὸς πολυγώνου προσθέτομε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ἀφοῦ πρῶτα ὑψώσομε τὸ κάθε μῆκος στὴ δύναμη 1 (ὅπου 1 εἶναι ἡ διάσταση τῆς εὐθείας στὸν Εὐκλείδειο χῶρο). Ἡ ὕψωση αὐτὴ στὴ δύναμη 1 δὲν μεταβάλλει τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ διαδικασία αὐτὴ τῆς ὑψώσεως στὴ δύναμη 1 φαίνεται παιδαριώδης καὶ τελείως περιττή. Θὰ δοῦμε σὲ λίγο ὅτι εἶναι ἐνδεικτικὴ τῆς πορείας ποὺ θὰ ἀκολουθήσομε. Ὁμοίως παρατηροῦμε ὅτι γιὰ νὰ ὑπολογίσομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν λόγῳ κλειστοῦ πολυγώνου διαιροῦμε αὐτὸ σὲ μικρὰ τετραγωνίδια καὶ προσθέτομε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀφοῦ πρῶτα κάθε μῆκος τὸ ὑψώσομε στὴ δύναμη 2 (ὅπου 2 εἶναι ἡ Εὐκλείδεια διάσταση τοῦ ἐπιπέδου). Καὶ τώρα ἂς κάνομε τὴν ἀκόλουθη σπουδαία παρατήρηση: ἂν κατὰ τὶς διαδικασίες ποὺ περιγράψαμε παραπάνω ὑψώναμε τὰ μήκη σὲ δυνάμεις διαφορετικὲς τοῦ 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως, τότε δὲν θὰ λαμβάναμε τὰ ἐπιθυμητὰ ἀποτελέσματα ὡς πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Σὲ λίγο θὰ δοῦμε πῶς καὶ ποῦ χρησιμοποιήθηκε ἡ ἰδέα αὐτὴ στὸν ὑπολογισμὸ τῆς ftactal διάστασης.

Ἂς ἐπανέλθομε τώρα στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ μήκους τῆς ἀκτῆς μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς συνήθεις τρόπους. Ἂς φαντασθοῦμε ὅτι διατρέχομε τὴν ἀκτὴ μὲ βήματα σταθεροῦ μήκους, ἔστω αὐτὸ ε, καὶ ἔστω ὅτι χρειάσθηκαν Β βήματα γιὰ νὰ τὴν διατρέξομε. Τότε ἕνα κατὰ προσέγγιση μῆκος τῆς ἀκτῆς εἶναι τὸ γινόμενο Βε. Ἂν τώρα διατρέξομε πάλι τὴν ἀκτὴ μὲ μικρότερο βῆμα, ἔστω τὸ μῆκος αὐτοῦ $\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon$) θὰ ἀπαιτηθεῖ ἕνας ἀριθμὸς βημάτων $B_1$, ὁπότε ἔχομε ἕνα δεύτερο κατὰ προσέγγιση μῆκος τῆς ἀκτῆς, τὸ $B_1\varepsilon_1$, εἶναι δὲ τὸ δεύτερο μῆκος μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πρῶτο: $B_1\varepsilon_1 > B\varepsilon$. Ἂν συνεχίσομε νὰ μικραίνομε τὸ μῆκος τοῦ βήματός μας τότε προκύπτουν ἀριθμοὶ ὁλοένα καὶ μεγαλύτεροι, ἡ δὲ ἀκολουθία αὐτῶν τείνει στὸ ἄπειρο. Ἡ ἔννοια τῆς fractal διάστασης βρίσκεται κρυμμένη σὲ μιὰ παρατήρηση ποὺ ἔκανε ὁ Lewis Fry Richardson (1881-1953), σὲ ἀνύποπτο χρόνο, καὶ ἡ ὁποία βρέθηκε στὶς σημειώσεις του τὸ 1961, μετὰ δηλαδὴ τὸ θάνατό του. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἰδέα περὶ μέτρου, τοῦ Hausdorff, μᾶς ὁδηγοῦν στὸ ἐπιθυμητὸ ἀποτέλεσμα. Οἱ μετρήσεις ποὺ ἔκανε ὁ Richardson βεβαιώνουν ὅτι γιὰ νὰ προσεγγίσομε τὸ μῆκος τῆς θεωρούμενης παραλιακῆς ἀκτῆς ἀπαιτοῦνται $F\varepsilon^{-D}$ βήματα, ὅπου F καὶ D εἶναι δύο σταθερὲς καὶ ε εἶναι τὸ μῆκος τοῦ βήματος. Ἂν τώρα τὸ πλῆθος τῶν βημάτων $E\varepsilon^{-D}$ πολλαπλασιασθεῖ ἐπὶ ε, τότε λαμβάνομε τὴν προσέγγιση $F\varepsilon^{-D}\cdot\varepsilon = F\varepsilon^{1-D}$, ἡ ὁποία μᾶς ὁδηγεῖ, ὅπως καὶ προηγουμένως, στὸ ἴδιο ἀδιέξοδο, διότι ὅταν τὸ ε τείνει στὸ μηδέν, τὸ $F\varepsilon^{1-D}$ τείνει στὸ ἄπειρο, διότι τὸ D εἶναι μικρότερο τοῦ 1. Ἂν ὅμως ἀκολουθώντας τὴν προαναφερθείσα ἰδέα τοῦ Hausdorff, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσομε τὸ πλῆθος τῶν βημάτων $F\varepsilon^{-D}$ κατ' εὐθεῖαν ἐπὶ ε, τὸ πολλαπλασιάσομε ἐπὶ $\varepsilon^D$ (ὅπως κάτι παρόμοιο κάναμε στὴν περίπτωση τοῦ πολυγώνου), τότε λαμβάνομε τὸν ἀριθμὸ $F\varepsilon^{-D}.\varepsilon^D = F$ ὁ ὁποῖος προφανῶς δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ βήματός μας ε. Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ D εἶναι ἡ fractal διάσταση τῆς καμπύλης ποὺ σχηματίζει ἡ θεωρούμενη ἀκτὴ καὶ ἰσοῦται περίπου μὲ 3/2, εἶναι δηλαδὴ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν τοπολογικὴ διάστασή της ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ 1. Εἶναι φυσικὸ νὰ ποῦμε ὅτι τὸ μῆκος τῆς παραλιακῆς ἀκτῆς στὴ διάσταση $D$ ἰσοῦται περίπου μὲ $F$.

Ὅπως κάναμε στὴν περίπτωση τοῦ πολυγώνου, θὰ παρατηρήσομε καὶ ἐδῶ ὅτι, ἂν θελήσομε νὰ ὑπολογίσομε τὸ κατὰ προσέγγιση μῆκος τῆς ἀκτῆς σὲ κάποια ἄλλη διάσταση, $d$, μικρότερη ἢ μεγαλύτερη τῆς $D$, τότε ἡ ἀπόσταση ποὺ θὰ βροῦμε θὰ τείνει στὸ μηδὲν ἢ στὸ ἄπειρο ἀντιστοίχως ὅταν τὸ ε θὰ τείνει στὸ μηδέν. Ἡ ἐπιθυμητὴ συμπεριφορὰ τῆς ἀποστάσεως ἐπιτυγχάνεται τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν $d = D$.

Ὡς δεύτερο παράδειγμα ἑνὸς fractal θὰ ἀναφέρομε τὸ σύνολο τοῦ Cantor τὸ ὁποῖο κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς [Σχ. 1]: Θεωροῦμε τὸ κλειστὸ διάστημα [0,1], τὸ διαιροῦμε σὲ τρία ἴσα μέρη καὶ ἀφαιροῦμε τὸ μεσαῖο ἀνοικτὸ διάστημα (1/3, 2/3). Ἐν συνεχείᾳ διαιροῦμε τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἐναπομείναντα δύο διαστήματα σὲ τρία ἴσα μέρη καὶ ἀφαιροῦμε τὰ μεσαῖα ἀνοικτὰ διαστήματα (1/9, 2/9), (7/9, 8/9) κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. Τὸ ἐναπομένον στὸ διάστημα [0,1] σύνολο καλεῖται «σύνολο τοῦ Cantor» ἢ «τὸ ἀσυνεχὲς τοῦ Cantor», καὶ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα C.

Ἐπειδὴ τὸ C εἶναι ἕνα σύνολο πλήρως μὴ συνεκτικό, ἡ τοπολογική του διάσταση εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴση μὲ μηδέν, ἔχομε $D_T=0$. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν fractal διάσταση τοῦ C ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους 1 καὶ τὸ χωρίζομε σὲ $N=b$ ἴσα ὑποδιαστήματα μήκους $r=1/b$. Ὁμοίως θεωροῦμε ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 1 καὶ τὸ διαιροῦμε σὲ $N=b^2$ ἴσα μεταξύ τους τετράγωνα πλευρᾶς $r=1/b$. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ὁ λόγος $\log N/\log(1/r)$, ἰσοῦται μὲ τὴν τοπολογικὴ διάσταση τοῦ ἀντιστοίχου συνόλου, ἤτοι μὲ 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως. Μὲ βάση τὴν παρατήρηση αὐτή, ἐπειδὴ στὴν περίπτωση τοῦ συνόλου C κάθε φορὰ μετὰ τὴν ἀφαίρεση τοῦ μεσαίου διαστήματος παραμένουν $N=2$ διαστήματα, κάθε δὲ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ 1/3 τοῦ διαστήματος ἀπὸ τὸ ὁποῖο προέκυψε, εἶναι δηλαδὴ $r=1/3$, λαμβάνομε ὡς fractal διάσταση τοῦ συνόλου C τὸν ἀριθμὸ $D=\log 2/\log 3=0.6309...$

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἤθελα νὰ προσθέσω ὅτι τὸ ὡς ἄνω σύνολο τοῦ Cantor (τὸ ὁποῖο ὅπως τονίσαμε εἶναι ἕνα fractal) ὀνομάζεται τριαδικὸ σύνολο τοῦ Cantor διότι προέκυψε διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ μεσαίου τρίτου τοῦ διαστήματος [0,1]. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν καὶ ἄλλα σύνολα τοῦ Cantor ἀφαιρώντας ὄχι τὸ μεσαῖο τρίτο, ἀλλὰ διαστήματα μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τοῦ 1/3 τοῦ προηγουμένου. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ μὲν τοπολογικὴ διάσταση τοῦ προκύπτοντος συνόλου τοῦ Cantor θὰ εἶναι πάντα 0, ἡ fractal διάστασή του ὅμως θὰ εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ 0.6309...

Ἕνας τρόπος γιὰ νὰ γίνει διαισθητικὰ ἀντιληπτὴ ἡ ἔννοια τῆς μὴ ἀκεραίας διαστάσεως ἑνὸς συνόλου εἶναι ὁ ἀκόλουθος. Παρατηροῦμε ὅτι στὴν περίπτωση τοῦ συνόλου τοῦ Cantor ἡ fractal διάσταση εἶναι μεγαλύτερη τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερη τοῦ 1. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ εἶναι εὐεξήγητο ἂν θεωρήσομε τὸ σύνολο τοῦ Cantor ὡς μιὰ φυσικὴ δομὴ μὲ μάζα, ὡς ἑξῆς. Ὑποθέτομε ὅτι τὸ διάστημα [0,1] εἶναι μιὰ ράβδος ἀποτελούμενη ἀπὸ κάποιο ὑλικό. Μετὰ τὴν ἀφαίρεση τοῦ μεσαίου διαστήματος κατανέμομε τὴν ἀφαιρεθεῖσα μάζα στὰ ἐναπομένοντα δύο διαστήματα κ.ο.κ. Τελικὰ ἡ ὅλη μάζα τῆς ράβδου εὑρίσκεται κατανεμημένη στὰ σημεῖα τοῦ συνόλου C, τὸ ὁποῖο θεωρούμενο κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο ὡς μία φυσικὴ ὀντότητα, εἶναι κάτι λιγότερο ἀπὸ ἕνα συνεχὲς εὐθύγραμμο τμῆμα καὶ περισσότερο ἀπὸ ἕνα μηδενιζόμενο σημειοσύνολο. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι φυσικὸ νὰ δεχθοῦμε ὅτι ἡ fractal διάσταση τοῦ C εἶναι κάποιος ἀριθμὸς μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 1.

Ἀναφερόμενος στὸ σύνολο τοῦ Cantor, ὁ Mandelbrot κάνει τὸ ἑξῆς σχόλιο: Εἶχε κατ' ἀρχὰς νομισθεῖ ὅτι ὁ πλανήτης Κρόνος, ὁ 6ος σὲ ἀπόσταση ἀπὸ τὸν Ἥλιο, εἶχε περὶ ἑαυτὸν ἕνα μόνο δακτύλιο. Ἀργότερα ἀνακαλύφθηκε ἕνα κενό, ἕνα «σπά-

*σιμο» στὸν δακτύλιο αὐτό, μετὰ ἀνακαλύφθηκαν δύο κενά, τελευταίως δὲ τὸ διαστημόπλοιο VOYAGER 1 διεπίστωσε ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ κενῶν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον λεπτοῦ πάχους. Διαπιστώθηκε ἐπίσης ἀπὸ τὸ VOYAGER 1 ὅτι τὰ κενὰ αὐτὰ εἶναι διαφανή, ἀφήνουν νὰ περνάει τὸ ἡλιακὸ φῶς, ἡ δὲ διάταξή τους θυμίζει τὴν κατασκευὴ τοῦ συνόλου τοῦ Cantor. Γιὰ τοὺς ἀκροατὲς ποὺ εἶναι ἐξοικειωμένοι μὲ τὴ μαθηματικὴ ὁρολογία πρόκειται ἐδῶ γιὰ τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο ἑνὸς συνόλου τοῦ Cantor μὲ ἕνα κύκλο.*

*Σὲ σχέση πάντα μὲ τὸ σύνολο τοῦ Cantor ὁ Mandelborot προσθέτει: Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες φιλόσοφοι ἐπίστευαν ὅτι γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπ' ἄπειρον ὑποδιαίρεση ἑνὸς σώματος, πρέπει τὸ σῶμα αὐτὸ νὰ εἶναι συνεχές. Δὲν εἶχαν ὑπόψη τους τὸ σύνολο τοῦ Cantor.*

*Στὴ συνέχεια δίνομε καὶ ἄλλο παράδειγμα τὸ ὁποῖο βοηθάει ἐπίσης στὸ νὰ γίνει περισσότερο κατανοητὴ ἡ ἔννοια τῆς μὴ ἀκεραίας διαστάσεως ἑνὸς συνόλου.*

*Θεωροῦμε μιὰ κατανομὴ σημείων-μαζῶν σὲ ἕνα σφαιρικὸ ὄγκο. Μὲ τὸν ὅρο σημεῖο-μάζα ἐννοοῦμε μιὰ ἀδιαίρετη μονάδα φυσικῆς μάζας τοποθετημένης σὲ κάποιο σημεῖο τοῦ χώρου. Εἶναι μιὰ συμβατικὴ ἔννοια. Ἂς φαντασθοῦμε τώρα ὅτι πλησιάζομε τὸ σύνολο αὐτὸ τῶν σημείων-μαζῶν ἀπὸ μιὰ πάρα πολὺ μεγάλη ἀπόσταση. Κατ' ἀρχὰς ἡ μάζα φαίνεται σὰν ἕνας μόνο ὁμοιόμορφος σχηματισμός. Ὅσο περισσότερο πλησιάζομε παρατηροῦμε ὅτι ὁ σχηματισμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μικρότερους σχηματισμούς. Ἂν πλησιάσομε ἀκόμα περισσότερο, παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνας ἀπ' τοὺς μικρότερους σχηματισμοὺς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκόμα μικρότερους σχηματισμοὺς κ.ο.κ. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ποὺ ἐκ πρώτης ὄψεως δίνει τὴν ἐντύπωση τοῦ τεχνητοῦ, τοῦ προκατασκευασμένου, εἶναι ἐκεῖνο ποὺ περιγράφει τὴν κατανομὴ τῶν ἀστέρων στὸ Σύμπαν. Ἡ Hausdorff διάσταση τῆς κατανομῆς τῶν ἀστέρων ὑπολογίσθηκε δι' ἀστρονομικῶν μεθόδων ὅτι ἰσοῦται περίπου μὲ 1.23. Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ δεῖ κανεὶς πῶς ἡ ὁλικὴ μάζα ἑνὸς τέτοιου σχηματισμοῦ συνδέεται μὲ τὴν διάσταση τοῦ Hausdorff.*

*Εἶναι γνωστὸ ὅτι ἡ ὁλικὴ μάζα μιᾶς κατανομῆς εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὸν ἀριθμὸ* $r^D$ *ὅπου* $r$ *εἶναι μιὰ μονάδα μήκους καὶ* $D$ *ἡ διάσταση τοῦ χώρου ὅπου εὑρίσκεται τὸ ἐξεταζόμενο ἀντικείμενο. Ἂν* $M(r)$ *εἶναι τὸ πηλίκο τῆς μάζας πρὸς τὴ μάζα τοῦ μοναδιαίου ὄγκου, ἔχομε* $M(r)=r^D$*. Π.χ. ἡ μάζα μιᾶς μπάλας ἀκτῖνος* $r$ *καὶ γεμάτης μὲ ἄμμο εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὸ* $r^3$ *[Σχ. 2]. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὅταν δὲν ἔχομε καμιὰ ἄλλη πληροφορία ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενο τῆς μπάλας, ὑποθέτομε, συνήθως, ὅτι ἡ ὕλη ποὺ περιέχεται σ' αὐτὴν εἶναι ὁμοιόμορφα κατανεμημένη ὁπότε τὸ* $D=3$*. Ἂς ὑποθέσομε τώρα ὅτι ἐξετάζοντας τὴν μπάλα ἀπὸ πιὸ κοντὰ παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἄμμος δὲν εἶναι ὁμοιόμορφα κατανεμημένη ἀλλὰ ὅτι περιέχεται σὲ μικρό-*

*τερες μπάλες ἀκτίνος $r/b$ κάθε μία ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἔχει μάζα $1/a$ φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ὁλικὴ μάζα ποὺ περιλαμβάνεται στὴν ἀρχικὴ μπάλα. Ἔστω τώρα ὅτι πλησιάζομε ἀκόμα περισσότερο καὶ ἐξετάζοντας κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς μικρὲς μπάλες εὑρίσκομε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκόμα μικρότερες μπάλες ἀκτίνος $r/b^2$ καὶ ὅτι κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς ἔχει μάζα $1/a^2$ φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ὁλικὴ μάζα. Ἂν τώρα ὑποθέσομε ὅτι ἐξακολουθοῦμε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκοντας ὁλοένα καὶ μικρότερες μπάλες, τὴν n-οστὴ φορά, μετὰ δηλαδὴ ἀπὸ n διαδοχικὲς παρατηρήσεις, εὑρίσκομε ὅτι $M(r)=M(r/b^n)a^n=r^D(a^n/b^{nD})$. Ἂν συνεχίσομε ἐπ' ἄπειρον τὴν διαδικασία αὐτή, ἂν δηλαδὴ τὸ n τείνει στὸ ἄπειρο, τότε ἡ τελευταία σχέση παρέχει τὴν ὁλικὴ μάζα τῆς μπάλας, μόνο ἂν $D=\log a/\log b$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ D, ποὺ δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιος ἀριθμός, εἶναι ἡ Hausdorff-Besicovitch διάσταση ἢ ἡ fractal διάσταση τῆς κατανομῆς τῆς μάζας ποὺ περιλαμβάνεται στὴ σφαίρα ἀκτίνος r, ἡ ὁποία κατανομὴ εἶναι ἀκόμα ἕνα παράδειγμα ἑνὸς fractal.*

*Θὰ ἀναφερθῶ τώρα, ἐν συντομίᾳ, στὶς ὑπηρεσίες ποὺ προσφέρει ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals στὴν ἐπιστήμη τῆς Φυσιολογίας.*

*Ἡ μαθηματικὴ ἔννοια τοῦ fractal καὶ τῆς fractal διάστασης φαίνεται ὄντως νὰ προσφέρει μιὰ νέα κομψὴ λογικὴ στὴ θεώρηση ἀνωμάλων δομῶν, ἀνωμάλων ἀναπτύξεων καὶ λειτουργιῶν, πολυπλόκων βιολογικῶν μορφῶν. Οἱ παρακάτω πληροφορίες προέρχονται ἀπὸ ἄρθρα σχετικὰ μὲ τὴ Φυσιολογία. Οἱ εἰδικοὶ ἂς συγχωρήσουν τυχὸν «κακομεταχείρηση» ἐκ μέρους μου ἐννοιῶν καὶ ὅρων τῆς ἐπιστήμης τους.*

*Ἡ σπειροειδὴς μορφὴ τοῦ κοχλία καὶ ἡ δομὴ τοῦ βρογχικοῦ δένδρου μὲ τὶς κομψὲς διακλαδώσεις του, ἀποτελοῦν ἐνδείξεις τῶν πολυπλόκων σχέσεων ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῆς βιολογικῆς ἀναπτύξεως τῆς μορφῆς καὶ τῆς λειτουργίας τῶν διαφόρων ὀργανισμῶν. Ἀπὸ τὶς ἀρχὲς ἀκόμα τοῦ 20οῦ αἰώνα ὁ D' Arcy Thompson εἶχε μελετήσει τὶς σχέσεις αὐτὲς λεπτομερῶς καὶ εἶχε πεισθεῖ ὅτι, μολονότι τὰ βιολογικὰ συστήματα μπορεῖ νὰ ἐξελίσσονται ἀκολουθοῦντα νόμους διαφορετικοὺς ἀπὸ ἐκείνους ποὺ διέπουν τὰ φυσικὰ συστήματα, δὲν μποροῦν ὅμως νὰ παραβιάζουν βασικοὺς φυσικοὺς νόμους. Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰδέα ὁδήγησε στὴ διατύπωση διαφόρων μετρικῶν, συγκριτικῶν σχέσεων καὶ ἀναλογιῶν στὴ βιολογία, οἱ ὁποῖες περιγράφουν λ.χ. τὸ πῶς μεταβάλλονται οἱ διαστάσεις ἑνὸς ἀναπτυσσόμενου ζῶντος ὀργανισμοῦ, κ.ἄ. Σχέσεις ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ μετρήσεις, συγκρίσεις καὶ ἀναλογίες ἔχουν οὐσιαστικὲς ἐπιπτώσεις στὴ Φυσιολογία. Π.χ., εἶναι γνωστὸ ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς μάζας ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνάλογη πρὸς τὴν τρίτη δύναμη τοῦ μήκους, καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἀνάλογο πρὸς τὸ τετράγωνο τοῦ μήκους. Βάσει τῆς ἀρχῆς αὐτῆς, ἂν ἕνα εἶδος ἔχει διπλάσιο ὕψος ἀπὸ ἕνα ἄλλο, τότε πρέπει νὰ* *εἶναι ὀκτὼ φορὲς βαρύτερο καὶ νὰ ἔχει ἐπιφάνεια τέσσερες φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ ἄλλο εἶδος Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ μεγαλύτερα φυτὰ ἢ ζῶα πρέπει νὰ «ἀποζημιωθοῦν» γιὰ τὸν μεγαλύτερο ὄγκο τους. Ἡ ἀναπνοὴ καθὼς καὶ ἄλλες λειτουργίες ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ἔκταση τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος. Τρόποι γιὰ νὰ αὐξηθεῖ ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς δοθέντος ὄγκου εἶναι νὰ καταστήσομε τὴν ἐξωτερική του ἐπιφάνεια πιὸ ἀνώμαλη προσθέτοντας π.χ. κλαδιὰ ἢ φύλλα, ἢ νὰ ἀνοίξομε ὀπὲς στὸ ἐσωτερικό του ὄγκου. Στὸν ἀνθρώπινο πνεύμονα ὑπάρχουν 300 ἑκατομμύρια μικρῶν σάκκων ἀέρος, μὲ τὴ βοήθεια τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ πλέον ἱκανοποιητικὴ ἀναλογία μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ πνεύμονος καὶ τῆς ἐπιφανείας του, σὲ σύγκριση μὲ τοὺς μονοκύτταρους ὀργανισμούς.*

*Ὅμως ὅλες αὐτὲς οἱ κλασικὲς ἔννοιες οἱ ἀναφερόμενες σὲ μετρήσεις, συγκρίσεις καὶ ἀναλογίες, καὶ οἱ ὁποῖες ὀφείλονται κυρίως στὸν Thompson, στηρίζονται σὲ μιὰ βασικὴ ἀρχὴ ἡ ὁποία μέχρι σήμερα εἶχε γίνει δεκτή, ὅτι δηλαδή: οἱ βιολογικὲς μεταβολὲς ἀκολουθοῦν μιὰ συνεχὴ ὁμοιογενὴ καὶ κανονικὴ πορεία. Δυστυχῶς ἡ ἀρχὴ αὐτὴ δὲν φαίνεται νὰ ἰσχύει, καθόσον ἀδυνατεῖ νὰ ἑρμηνεύσει τὶς ἀνώμαλες ἐπιφάνειες καὶ δομὲς ποὺ παρουσιάζονται στοὺς πνεύμονες, στὰ ἔντερα, στὴν καρδιὰ καὶ στὸν ἐγκέφαλο. Ἀντιθέτως, τὸ πείραμα καὶ ἡ παρατήρηση φαίνεται νὰ ἐνθαρρύνουν τὴν ἄποψη ὅτι πολλὰ βιολογικὰ συστήματα εἶναι ἀσυνεχή, ἀνομοιογενὴ καὶ ἀνώμαλα. Ἡ μελέτη τῶν συστημάτων αὐτῶν ἀπαιτεῖ τὴ δημιουργία νέων προτύπων, νέων μοντέλων. Τὸ πιὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τῶν συστημάτων ποὺ συναντᾶ κανεὶς στὴ Φυσιολογία εἶναι ἡ πολύπλοκη δομή τους. Τὸ νὰ συμπεριλάβει κανεὶς ὅλο αὐτὸ τὸν πλοῦτο ποὺ παρουσιάζει μιὰ φυσιολογικὴ λειτουργία καὶ δομὴ σὲ ἕνα μόνο μοντέλο εἶναι ὁ πρωταρχικὸς βασικὸς σκοπὸς τῆς σύγχρονης Βιολογίας. Ἡ Γεωμετρία τῶν fractals, ἡ ὁποία ὅπως εἴδαμε ἀσχολεῖται μὲ πολύπλοκες γεωμετρικὲς μορφὲς οἱ ὁποῖες δὲν εἶναι ὁμαλὲς οὔτε ὁμοιογενεῖς, ἀνοίγει νέους δρόμους γιὰ τὴ μελέτη τῶν διαφόρων μορφῶν καὶ λειτουργιῶν στὴν ἐπιστήμη τῆς Φυσιολογίας. Γιὰ νὰ μπορέσομε νὰ περιγράψομε εὐκολότερα τὰ πλεονεκτήματα τῶν νέων αὐτῶν ἐννοιῶν θὰ ὑπενθυμίσομε σὲ σύντομία μερικὲς κλασικὲς θεωρίες μετρήσεων, συγκρίσεων καὶ ἀναλογιῶν.*

*Μιὰ ἀναλογία τὴν ὁποία ὀφείλομε στὸ ἀθάνατο πνεῦμα τῶν προγόνων μας εἶναι ἡ περίφημη «χρυσὴ τομή». Ἂν διαιρέσομε ἕνα* α | β *εὐθύγραμμο τμῆμα σὲ δύο ἄλλα τμήματα μήκους α καὶ β, ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύσει ἡ σχέση* $(\alpha+\beta)/\alpha=\alpha/\beta$, *τότε ὁ λόγος* $\alpha/\beta=(1+\sqrt{5})/2=1.618\ldots$, *καλεῖται ἡ χρυσὴ τομὴ καὶ σημειώνεται συνήθως μὲ τὸ γράμμα φ. Ὁ Kepler ἀποκαλοῦσε τὸν ἀριθμὸ φ «θεία ἀναλογία». Ἡ ἀναλογία τῆς χρυσῆς τομῆς ἔχει ὡς γνωστὸν παρατηρηθεῖ* *στὶς διαστάσεις τοῦ Παρθενώνα καὶ σὲ ἐκεῖνες διαφόρων ἀγγείων τῆς ἰδίας ἐποχῆς.*

*Ἡ ἀναλογία τῆς χρυσῆς τομῆς παράγεται ἐπίσης ἀπὸ τὴν ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,..., ὅπου κάθε ὅρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι γνωστοὶ ὡς «ἀριθμοὶ τοῦ Fibonacci» καὶ ὀφείλονται στὸν μαθηματικὸ τοῦ 13ου αἰώνα Leonardo τῆς Πίζας ποὺ εἶναι γνωστὸς ἐπίσης καὶ ὡς Filius Bonacci. Τὸ πηλίκον κάθε ἀριθμοῦ τῆς ἀκολουθίας πρὸς τὸν προηγούμενό του τείνει στὴ χρυσὴ τομὴ φ. Ἔχομε: 13/8 =1.625, 21/13=1.615, 55/34=1.618 κ.ο.κ.*

*Ἡ ἀναλογία ποὺ παρουσιάζουν οἱ ἀριθμοὶ Fibonacci ἔχει παρατηρηθεῖ στὴν κλίση τῶν φύλλων διαφόρων φυτῶν (ὅπως τὸ ἡλιοτρόπιο) ὡς πρὸς τὸν κορμό τους. Στὸν ἄνθρωπο, ὁ λόγος τοῦ ἀναστήματός του πρὸς τὴν ἀπόσταση τοῦ ὀμφαλοῦ ἀπὸ τὰ δάκτυλα τῶν ποδιῶν εἶναι περίπου ἴσος πρὸς τὴ χρυσὴ τομὴ (1.62). Ἡ ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν Fibonacci ἔχει ἐπίσης παρατηρηθεῖ ὅτι ἰσχύει ἐν μέρει στὸν πνεύμονα τοῦ ἀνθρώπου.*

*Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς δύο αὐτὲς ἀναλογίες ποὺ ἀναφέραμε ὑπάρχουν καὶ ἄλλες μὲ τὶς ὁποῖες ἔγιναν προσπάθειες νὰ περιγραφοῦν διάφορα βιολογικὰ συστήματα. Ἄς θεωρήσομε τὸν πνεύμονα τοῦ ἀνθρώπου [Σχ. 3]. Καθὼς διακλαδίζεται τὸ βρογχικὸ σύστημα, τὸ μῆκος ἑκάστου κλάδου ἐλαττώνεται. Μιὰ Θεωρία ποὺ κάμνει χρήση τῶν κλασικῶν ἀναλογιῶν καὶ ποὺ ὑποθέτει ὅτι τὸ βρογχικὸ δένδρο εἶναι ὁμοιογενὲς καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑποδιπλασιάζεται ὅταν μεταβαίνομε ἀπὸ μιὰ διακλάδωση στὴν ἑπομένη, προβλέπει ὅτι οἱ διάμετροι τῶν κλάδων θὰ ἐλαττώνονται ἀκολουθώντας κάποια ἐκθετικὴ συνάρτηση. Ἡ παρατήρηση καὶ τὸ πείραμα πιστοποιοῦν ὅτι ἡ πρόβλεψη ἐπαληθεύεται μέχρι τὴν 10η διακλάδωση, μετὰ τὴν ὁποία τὰ πειραματικὰ δεδομένα ἀποκλίνουν συστηματικὰ ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ προβλέπει ἡ ἐκθετικὴ συνάρτηση. Ἡ ἀπόκλιση αὐτὴ ὀφείλεται στὸ γεγονὸς ὅτι ἡ περιγραφὴ τοῦ βρογχικοῦ δένδρου διὰ τῶν κλασικῶν ἀναλογιῶν δὲν λαμβάνει ὑπόψη τὶς μεταβολὲς ποὺ παρουσιάζονται στὸν κάθε κλάδο. Στὸ σημεῖο αὐτὸ ἀκριβῶς γίνεται ἡ μετάβαση ἀπὸ τὶς κλασικὲς μεθόδους σὲ ἐκεῖνες ποὺ παρέχει ἡ Γεωμετρία τῶν fractals.*

*Ἡ θεώρηση τοῦ πνεύμονος ὡς fractal παρέχει μηχανισμὸ ὁ ὁποῖος λαμβάνει ὑπόψη τις ὡς ἄνω μεταβολές. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνάρτηση τοῦ Weirstrass ποὺ ἀναφέραμε στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας ὁδηγεῖ σὲ σχέση ἡ ὁποία παρέχει τὴ μέση διάμετρο r(z) τοῦ βρογχικοῦ κλάδου z-τάξεως. Ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι* $r(z)=A(z)/z^{D}$*, ὅπου A(z) εἶναι κάποια περιοδικὴ συνάρτηση, καὶ D ἡ fractal διάσταση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὶς μεταβολὲς ποὺ παρατηροῦνται στοὺς βρογχικοὺς κλάδους. Ἡ πρόβλεψη ποὺ δίνει τὸ fractal-μοντέλο τοῦ πνεύμονος μὲ τὴ βοήθεια τῆς παρα-*

*πάνω σχέσεως συμφωνεῖ πλήρως μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πειράματος.*

*Τὸ Σχῆμα 4 παριστάνει fractal-μοντέλο τοῦ πνεύμονος. Ὀφείλεται στὸν B. Mandelbrot.*

*Αὐτὰ ἐν συντομίᾳ ἤθελα νὰ ἀναφέρω γιὰ τὴ χρησιμότητα τῆς Νέας Γεωμετρίας στὴν ἐπιστήμη τῆς Φυσιολογίας.*

*Θὰ κλείσω τὴν ὁμιλία μὲ τὴν παρουσίαση τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot. Πρόκειται περὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖο (ὑποσύνολο) προκύπτει ὅταν μιὰ ἀλγεβρικὴ πράξη ἐκτελεῖται ἐπανειλημμένως ἐπὶ μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Παρατηροῦμε στὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot μιὰ ἀνεξάντλητη ἐναλλαγὴ λεπτομερειῶν ἡ ὁποία καταπλήσσει μὲ τὴν ποικιλία της, τὴν πολύπλοκη δομή της καὶ τὴν παράξενη καὶ ἐξωτικὴ θὰ λέγαμε ὀμορφιά της. Πολλοὶ θεωροῦν τὸ σύνολο τοῦ Mandembrot ὡς τὸ πιὸ πολύπλοκο ἀντικείμενο ποὺ ἔχει ποτὲ ἐμφανισθεῖ στὰ Μαθηματικά. Μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς σχετικὰ ἁπλοῦ προγράμματος, ἕνας Ὑπολογιστὴς μεταμορφώνεται σὲ ἕνα εἶδος μικροσκοπίου μὲ τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ δοῦμε τὸ σύνορο τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot τὸ ὁποῖο, σύνορο, εἶναι ἕνα fractal.*

*Μὲ τὴν εὐκαιρία αὐτὴ πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι ἡ χρήση τῶν Ὑπολογιστῶν στὴ Γεωμετρία τῶν fractals εἶναι εὐρύτατη καὶ ἀπαραίτητη. Καθὼς μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου ἡ ἐμπειρία μας πείθει, ὅλο καὶ περισσότερο, ὅτι ἡ Φύση εἶναι γεμάτη ἀπὸ fractals, οἱ διάφοροι ἐπιστήμονες ἄρχισαν νὰ ἐρευνοῦν τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο σχηματίζεται ἕνα fractal. Στὴν προσπάθειά τους αὐτὴ ἡ βοήθεια ποὺ προσφέρουν οἱ Ὑπολογιστὲς εἶναι πολὺ μεγάλη καὶ πολὺ σημαντική, διότι ἡ κατασκευὴ ἑνὸς fractal στὸν Ὑπολογιστὴ φαίνεται νὰ ἑρμηνεύει τὸ σχηματισμὸ μιᾶς μεγάλης ποικιλίας fractals στὴ Φύση.*

*Ὁ μηχανισμὸς τῆς κατασκευῆς τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot εἶναι ἁπλός:*

*Ξενικοῦμε μὲ τὸ διώνυμο* $z^2+c$ *ὅπου* $z$ *εἶναι μιὰ μιγαδικὴ μεταβλητὴ καὶ* $c$ *κάποιος μιγαδικὸς ἀριθμὸς τὸν ὁποῖο διατηροῦμε σταθερό. Στὴ συνέχεια ἐκτελοῦμε διαδοχικὲς πράξεις ὡς ἀκολούθως: Στὸ διώνυμο* $z^2+c$ *θέτομε* $z=0$ *ὁπότε λαμβάνομε ὡς ἀποτέλεσμα τὸν ἀριθμὸ* $c$*. Θέτομε τώρα στὸ διώνυμο* $z^2+c$ *ὅπου* $z$ *τὸ* $c$ *καὶ λαμβάνομε* $c^2+c$*. Θέτομε καὶ πάλι στὸ διώνυμο* $z^2+c$ *ὅπου* $z$ *τὸ* $c^2+c$ *καὶ λαμβάνομε* $(c^2+c)^2+c$*. Συνεχίζομε τὴ διαδικασία αὐτὴ ἀντικαθιστώντας πάντα στὸ* $z^2+c$ *τὸ* $z$ *μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ προέκυψε ἀπὸ τὴ προηγούμενη ἀντικατάσταση κ.ο.κ. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ μερικὲς τιμὲς τοῦ* $c$*, ὅταν ἡ παραπάνω διαδικασία ἐπαναληφθεῖ ἀρκετὲς φορές, τὸ μέγεθος (ἡ ἀπόλυτος τιμὴ) τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν αὐξάνει ἁλματωδῶς καὶ ὑπερβαίνει τὶς δυνατότητες οἱουδήποτε Ὑπολογιστοῦ.*

*Εὐτυχῶς οἱ τιμὲς ἐκεῖνες τοῦ c ποὺ ὁδηγοῦν σὲ τέτοια ἀνεπιθύμητα ἀποτελέσματα μποροῦν νὰ ἀποφευχθοῦν.*

*Τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν c γιὰ τοὺς ὁποίους τὸ $z^2+c$ παραμένει φραγμένο, ὅσες φορὲς καὶ ἂν ἐπαναληφθεῖ ἡ παραπάνω διαδικασία.*

*Ἡ κατασκευὴ τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot δὲν εἶναι καὶ τόσο ἁπλή. Γίνεται μὲ κατάλληλο προγραμματισμὸ ἑνὸς Ὑπολογιστῆ. Τὸ Σχ. 5 ἀπεικονίζει τὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot. Τὰ Σχ. 6 καὶ 7 ἀπεικονίζουν μεγεθύνσεις κάποιων περιοχῶν τοῦ ἐν λόγῳ συνόλου. Διευκρινίζεται ὅτι μόνο τὰ σημεῖα μαύρου χρώματος ἀνήκουν στὸ σύνολο τοῦ Mandelbrot. Τὰ ὑπόλοιπα χρώματα εἶναι βοηθητικὰ τοῦ Ὑπολογιστῆ γιὰ τὴν ἀνίχνευση τῶν σημείων τοῦ συνόλου τοῦ Mandelbrot.*

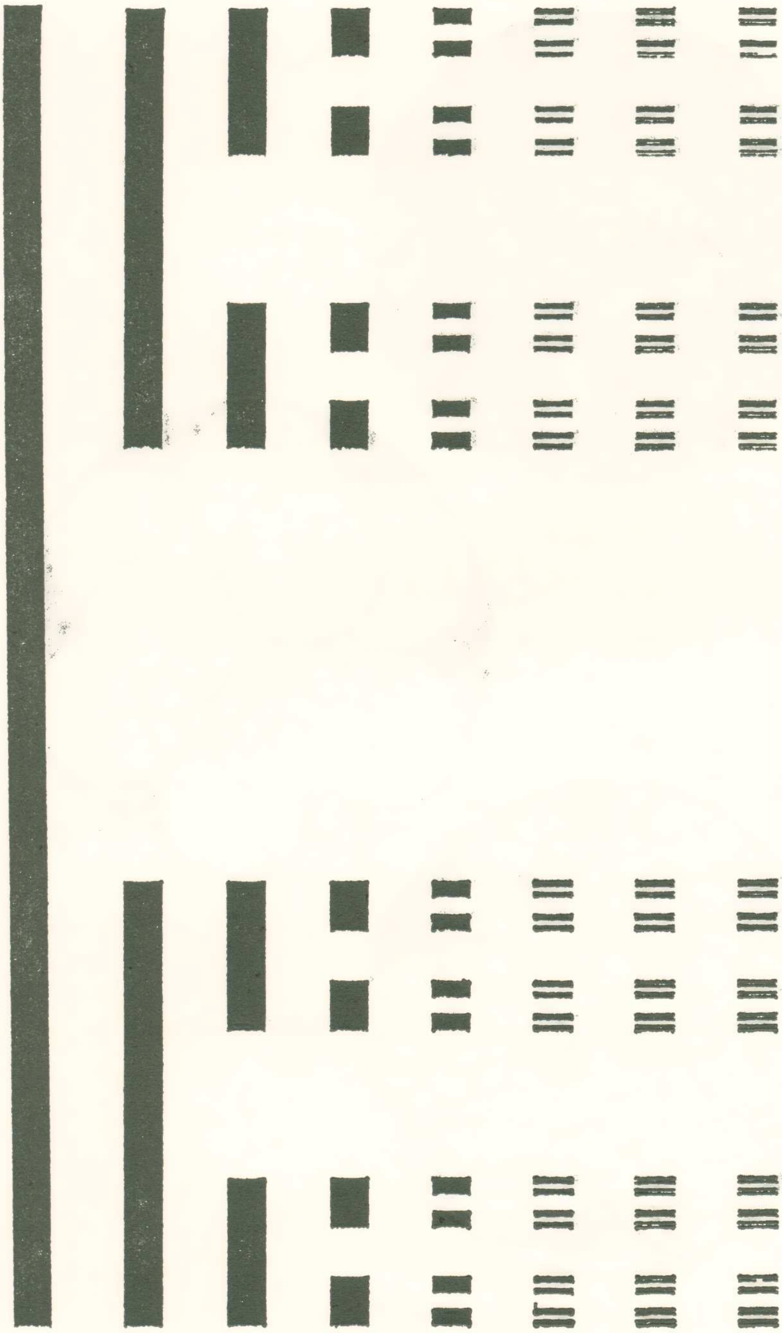
*Τελειώνοντας θὰ ἤθελα νὰ τονίσω τὰ ἀκόλουθα:*

*Ἡ σημερινὴ ὁμιλία μόλις ἐγγίζει καὶ μάλιστα ἀδύναμα τὸ ὅλο θέμα. Θέλω νὰ πιστεύω ὅτι αὐτὸ δὲν ὀφείλεται μόνο στὶς περιορισμένες ἱκανότητες τοῦ ὁμιλητῆ ἀλλὰ προπαντὸς στὴν ἴδια τὴ φύση τοῦ ὑπὸ ἀνάπυξη ἀντικειμένου καὶ στὶς δυσκολίες ποὺ παρουσιάζει ἡ ἐκλαΐκευσή του.*

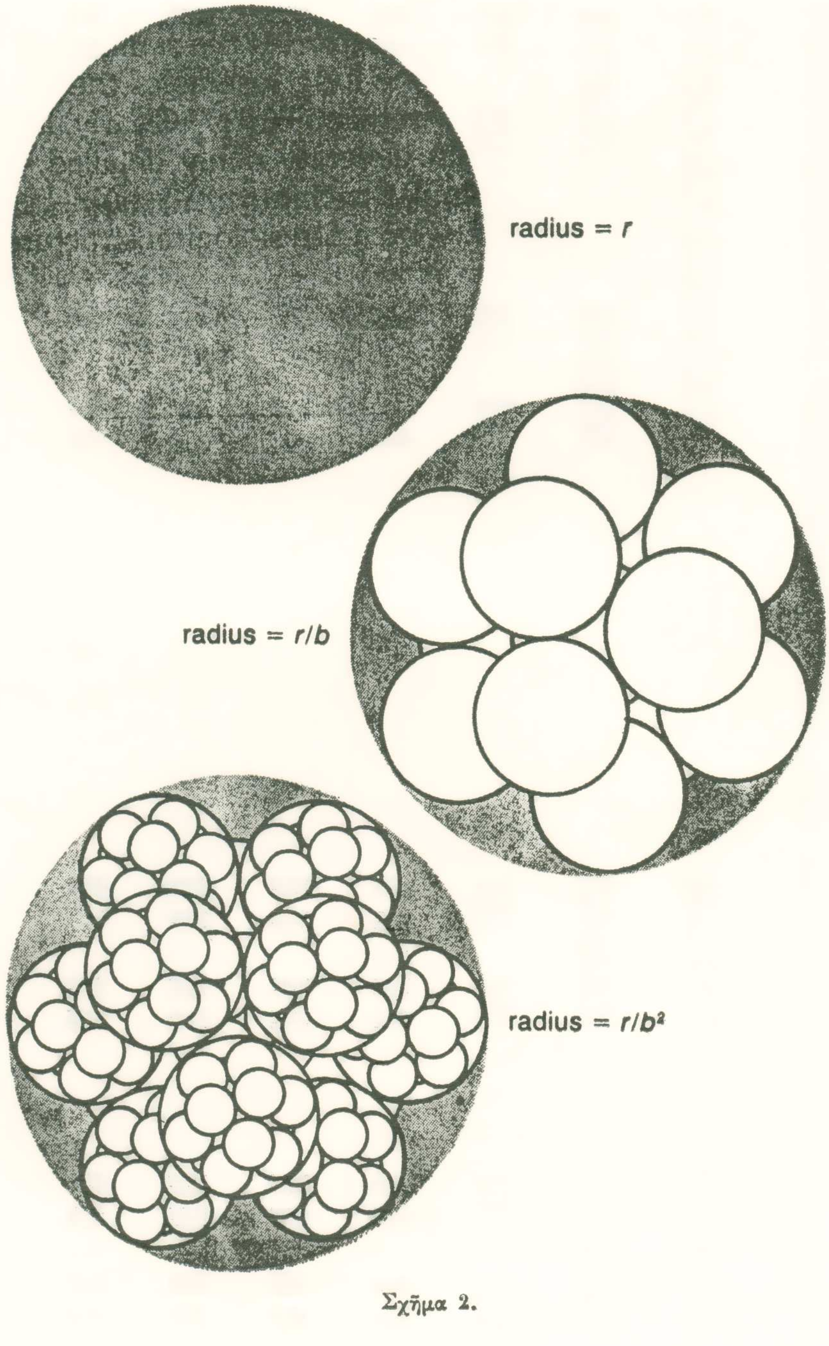
*Ἡ Γεωμετρία τῶν fractals εὑρίσκεται ἀκόμα στὴ νηπιακή της ἡλικία καὶ στὸ πρῶτο στάδιο τῆς ὀργάνωσής της. Εἶναι πολὺ νωρὶς νὰ γραφεῖ ἕνας Ἐπίλογος. Ὅμως ἕνα εἶναι βέβαιο, ὅτι οἱ ὁρίζοντες ποὺ ἀνοίγονται μπροστά της εἶναι εὐρύτατοι.*

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

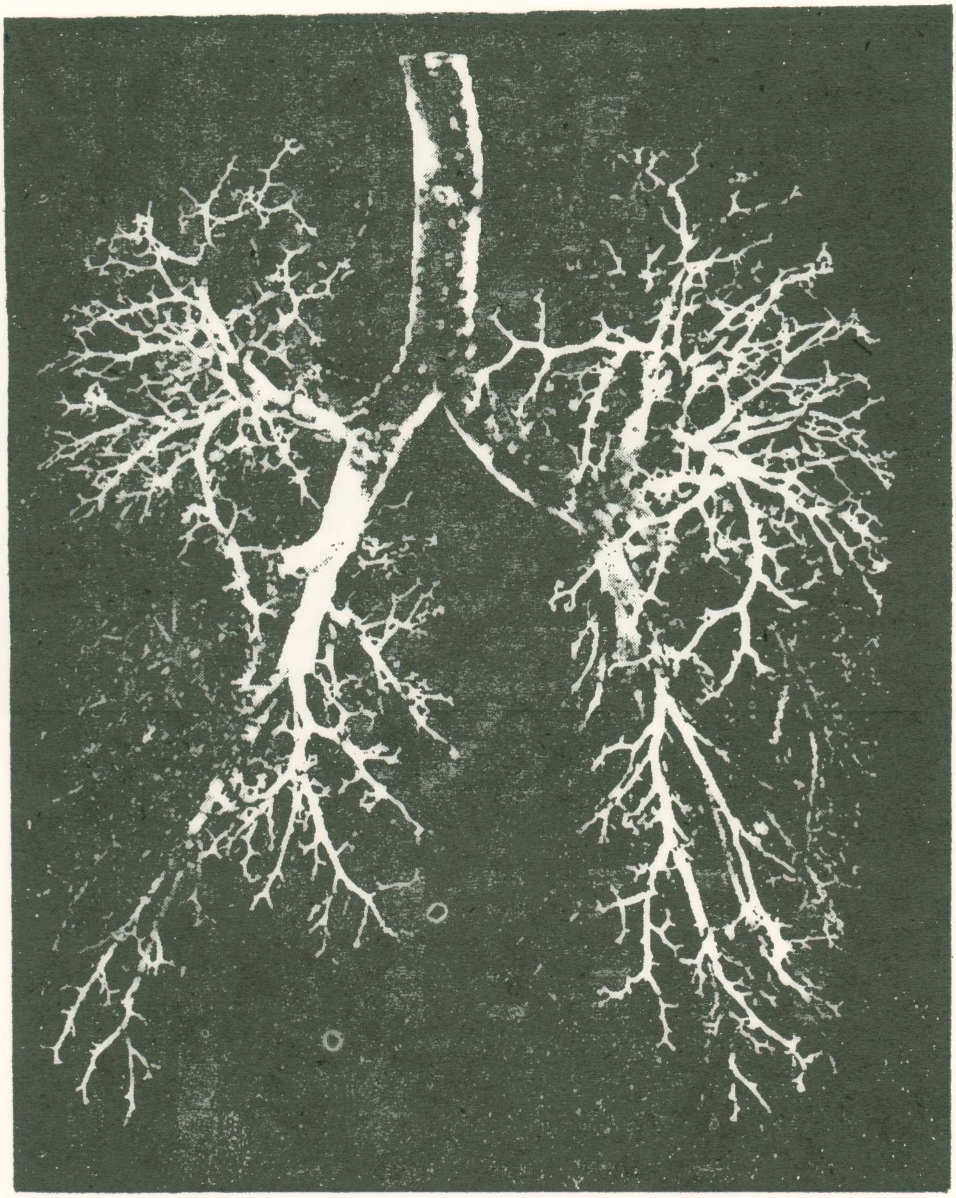
1. *Benoit B. Mandelbrot,* The Fractal Geometry of Nature, *W. H. Freeman and Company New York,* 1982.
2. *H. O. Peitgen and P. H. Richter,* The Beauty of Fractals, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg - New York-London - Paris - Tokyo,* 1986.



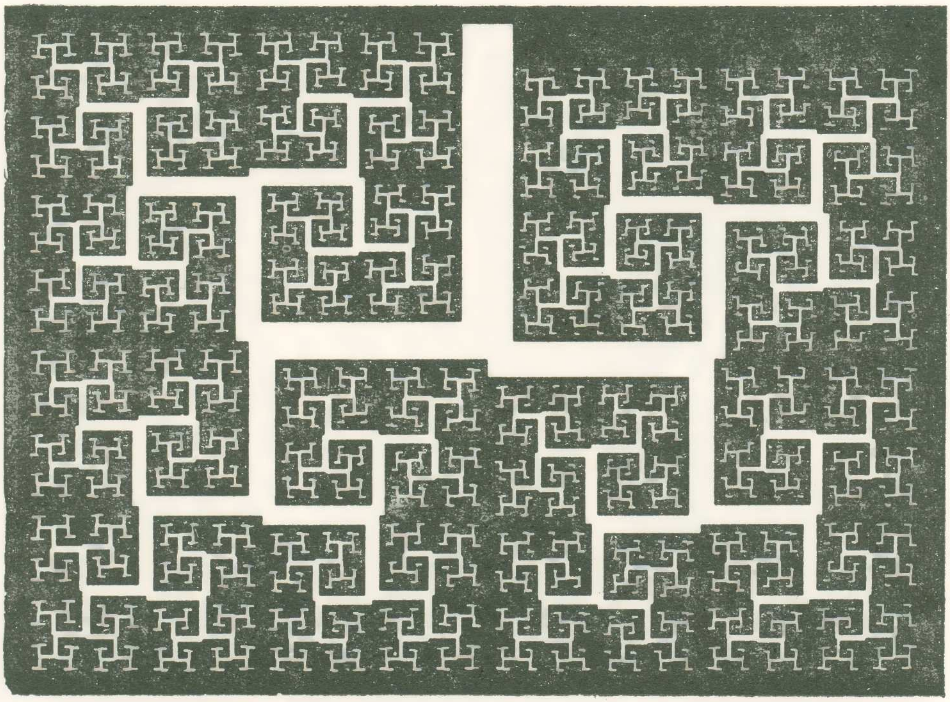
Σχῆμα 1



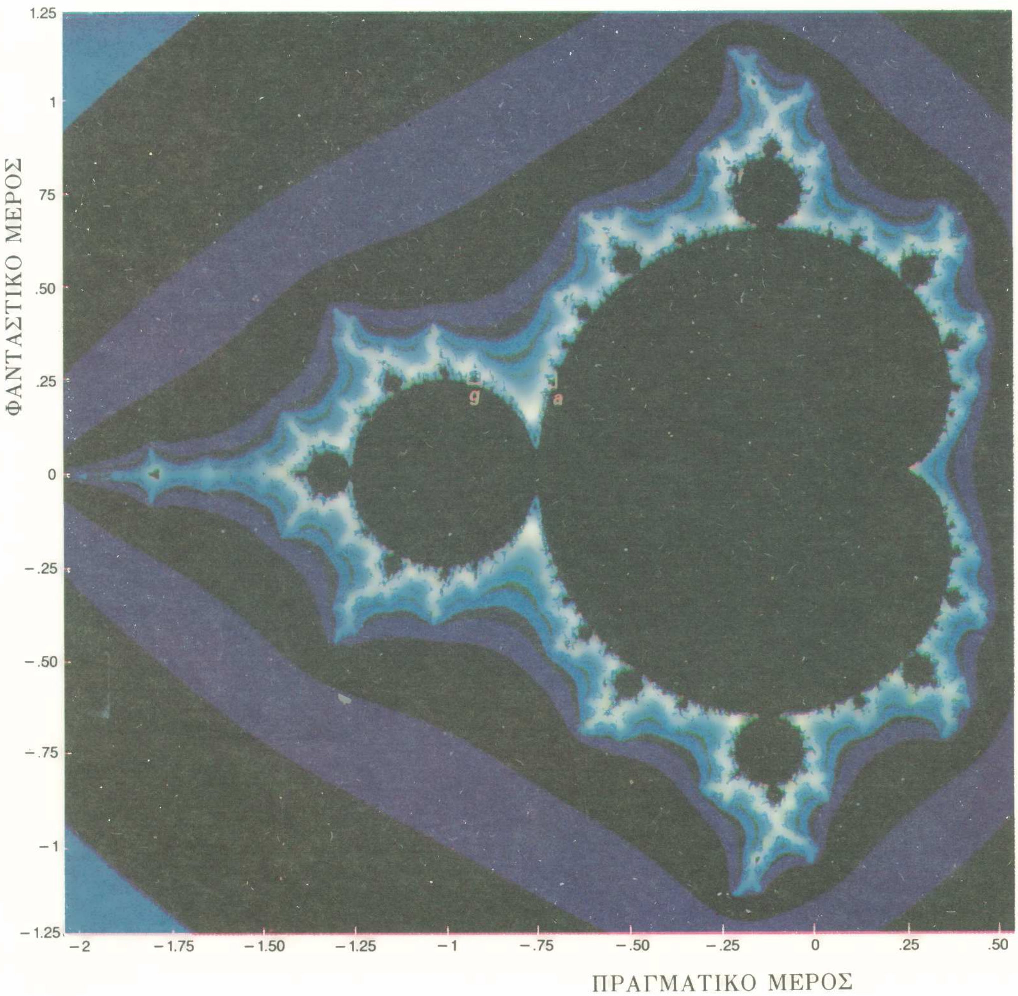

Σχῆμα 2.



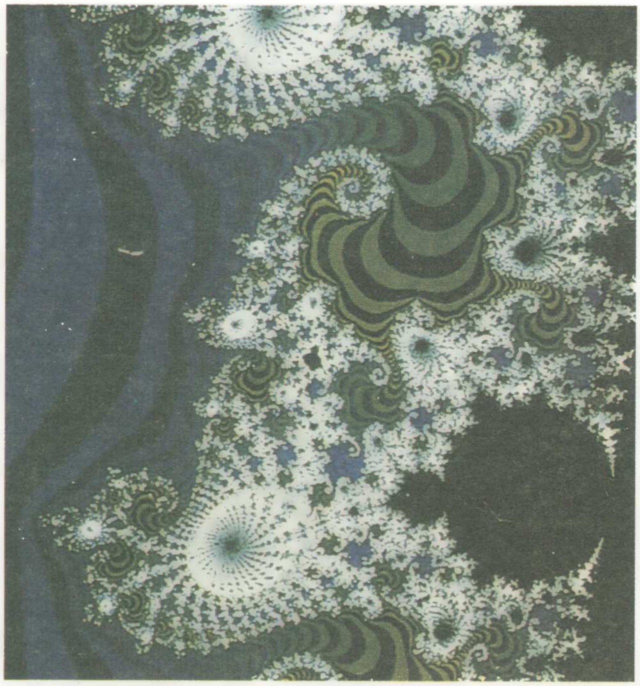
Σχῆμα 3.



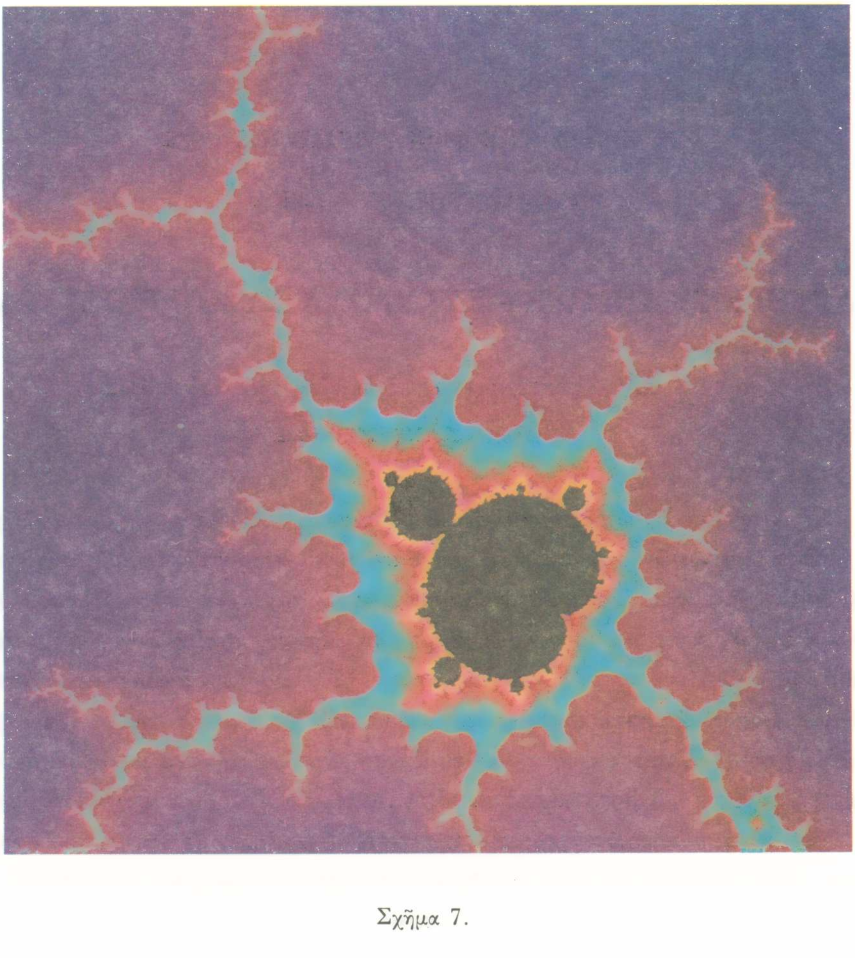
Σχῆμα 4.


ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ
1.25
1
75
.50
.25
0
−.25
−.50
−.75
−1
−1.25
−2
−1.75
−1.50
−1.25
−1
−.75
−.50
−.25
0
.25
.50
g
a

Σχῆμα 5.



Σχῆμα 6.



Σχῆμα 7.