ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur certaines propriétés des fonctions quelconques entre espaces topologiques (première partie),** *par R. Voreadou**, Athènes. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνσταντίνου Παπαϊωάννου.

INTRODUCTION

Dans ([**3**], p. 219) et ([**4**], p. 313) S. P. Zervos a introduit deux généralisations de la notion de valeur d'une fonction définie dans un espace topologique, qui lui ont, respectivement, permi d'étendre aux fonctions discontinues le théorème de Bolzano (respectivement, de Weierstrass) pour la préservation de la connexité (respectivement, quasi-compacité) par les fonctions continues, ainsi que, partiellement, le théorème de Hurwitz sur les zéros-limites des zéros des termes d'une suite de fonctions. Il considérait uniquement des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (respectivement, $\mathbb{C}$). Ce travail et le livre classique de C. Berge «Espaces topologiques. Fonctions multivoques» [**1**] sont à l'origine de la recherche présente, qui sera présentée sous la forme de trois Notes, dont celle-ci est la première. Tout en généralisant les résultats d' S. P. Zervos aux fonctions à valeurs dans un espace topologique général, nous avons obtenu nombre de théorèmes de topologie générale, qui nous semblent présenter quelque intérêt d'eux-mêmes.

Terminologie et notations. Le plus souvent, celles de Bourbaki, avec $\subseteq$ à la place de $\subset$. Espace topologique, sous-entend, non vide. Resp. $=$ respectivement. $\overline{\overline{P}}$ $=$ nombre cardinal de l'ensemble P. c-a-d $=$ c'est-à-dire. Ssi $=$ si et seulement si. **|** désigne la fin d'une démonstration ou d'un exemple.

Tout couple (E, T), où T est un $\cup$-demi-treillis complet de parties de E, contenant $\emptyset$ et E, sera appelé, suivant ([**4**], p. 356), *espace hypotopologique.* Il est commode de mettre T sous la forme d'une famille $(A_\iota)_{\iota \in L}$. Les A_ι seront dits *ouverts* de l'espace en question. Suivant ([**5**], p. 5981), si k est un nombre cardinal $\geqslant 2$, on appellera $\Theta \subseteq E$

* Ρ. ΒΟΡΕΑΔΟΥ, **Ἐπὶ ἰδιοτήτων τινῶν τῶν τυχουσῶν συναρτήσεων μεταξὺ τοπολογικῶν χώρων (μέρος πρῶτον).**

k-connexe ssi il n'existe pas de partition en k ensembles $A_l \cap \Theta$ (donc, en au moins k tels ensembles). Abréviation : connexe = 2 - connexe.

Soient E et H des espaces topologiques et f une application $E \rightarrow H$. Si $x \in E$, on désignera par $B(f, x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de f au point x.

Soient E et H des espaces topologiques et F une application $E \rightarrow P(H)$. En s'inspirant de la définition donnée dans ([**1**], pp. 114 - 115), on dira que F est *semi-continue supérieurement* (on écrira *s.c.s.*) ssi 1) pour tout $x \in E$, $F(x)$ est quasi-compact, et 2) pour tout (x, G), où $x \in E$ et G est un ouvert de H contenant $F(x)$, l'ensemble $\{z \,;\, z \in E \text{ et } F(z) \subseteq G\}$ est ouvert dans E. *Notation :* En s'inspirant de ([**1**], p. 26), on désignera ce dernier ensemble par $\Gamma^+ G$. [*Note historique* : Il s'agit, essentiellement, des semi-continuités d'une application multivoque ; elles ont été introduites, indépendamment, par G. Bouligand et C. Kuratowski en 1932. Voir ([**1**], p. 114) pour les références etc.]

Remarques 1.a. *Si* $\mathcal{F}$ *est le filtre des voisinages de x dans E,* $B(f, x) = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} \overline{f(V)}$. Donc, $B(f, x) = \overline{B(f, x)}$ *et* $f(x) \in B(f, x)$.

1.b. *Si* Φ *est un filtre sur E convergeant vers x, l'ensemble des valeurs d'adhérence de f suivant* Φ *est contenu dans* $B(f, x)$.

2. L'hypothèse que E est séparé n'étant pas utilisée dans la démonstration du théorème 3, dans ([**1**], p. 116), on a, dans notre terminologie, que : Si $F : E \rightarrow P(H)$ *est s.c.s. et* Θ *partie quasi-compacte de E, aussi* $F(\Theta)$ *est quasi-compact dans H.* En d'autres termes, *toute application s.c.s.* $E \rightarrow P(H)$ *transforme les parties quasi-compactes de E en des parties quasi-compactes de H.*

Proposition 1. *Soient k et m des nombres cardinaux, tels que* $2 \leqq k \leqq m$; *soit E un espace hypotopologique et soit* $(A_l)_{l \in L}$ *la famille de ses ouverts ; soit H un ensemble, tel que* $\overline{\overline{H}} \geqq m$; *soit f une application* $E \rightarrow H$; *soit* Θ *une partie non vide de E, k-connexe et telle que* $\overline{\overline{f(\Theta)}} \geqq 2$; *soient I et J des ensembles non vides, tels que* $I \subseteq J$ *et* $\overline{\overline{I}} = m$, *et soit* $(H_j)_{j \in J}$ *une partition de H, telle que* $f(\Theta) \cap H_j \neq \emptyset$, *quel que soit* $j \in J$. *Il existe, alors, au moins un* $\xi \in \Theta$, *pour lequel au moins une de deux assertions suivantes est vraie : 1) Il existe au moins un* $j_0 \in J - I$ *tel que* $f(\xi) \in H_{j_0}$. *2) Si* $\xi \in A_l \cap \Theta$, $f(A_l \cap \Theta)$ *a une intersection non vide avec au moins deux* H_j *distincts, tels que* $j \in I$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que, pour tout $\xi \in \Theta$, 1) est fausse. Alors, $f(\Theta) \subseteq \bigcup_{j \in I} H_j$; donc, pour chaque $\xi \in \Theta$, existe un unique H_ι, tel que $f(\xi) \in H_\iota$; on le notera : $H_\iota(\xi)$. Si tout ξ satisfait aussi à la négation de 2), pour tout $\xi \in \Theta$ existe au moins un $l \in L$, tel que $f(A_l \cap \Theta) \subseteq H_{\iota(\xi)}$; un des A_l ayant cette propriété sera noté $A_{l(\xi)}$. Alors, $\xi \in \overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta$ implique que $A_{l(\xi)} \cap \Theta \subseteq \overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta$ [ici, nécessairement, $\iota = \iota(\xi)$] ; donc, $\overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta$ est une réunion d'$A_{l(\xi)} \cap \Theta$, c-a-d d'ouverts dans Θ, donc $\overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta$ est ouvert dans Θ. Comme, par hypothèse, $\overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta \neq \varnothing$ $(\iota \in I)$, $(\overset{-1}{f}(H_\iota) \cap \Theta)_{\iota \in I}$ constitue une partition de Θ, ouverte dans Θ, avec $\overline{\overline{I}} = m$; donc, Θ n'est pas k-connexe, contrairement à l'hypothèse. Donc, au moins un $\xi \in \Theta$ ne satisfait pas à la négation de 2) ; donc, au moins un $\xi \in \Theta$ satisfait à 2). |

Proposition 2. *Soient E et H des espaces topologiques, H étant, en plus, quasi-compact ; soit f une application* $E \to H$; *soit* Θ *une partie non vide de E, connexe et telle que* $\overline{\overline{f(\Theta)}} \geqslant 2$; *enfin, soit F une application* $E \to P(H)$, *satisfaisant aux conditions : Pour tout* $x \in E$, *a)* $F(x)$ *est connexe, et b)* $B(f, x) \subseteq F(x)$. *Alors,* $F(\Theta)$ *est connexe.*

[Notation : Évidemment, $F(\Theta) = \bigcup_{x \in \Theta} F(x)$.]

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $F(\Theta)$ n'est pas connexe. Il existe, alors, deux fermés H_1, H_2 de H, tels que $H_1 \cap H_2 \cap F(\Theta) = \varnothing$, $F(\Theta) \subseteq H_1 \cup H_2$ et $H_\iota \cap F(\Theta) \neq \varnothing$ $(\iota = 1,2)$. On a que $f(\Theta) \cap (H_\iota \cap F(\Theta)) \neq \varnothing$ $(\iota = 1, 2)$. [En effet, si cette assertion n'était pas vraie, $f(\Theta)$ serait contenu dans l'un des H_1, H_2 ; supposons, par exemple, que $f(\Theta) \subseteq H_1$; comme $H_2 \cap F(\Theta) \neq \varnothing$, il existerait $x_0 \in \Theta$, tel que $F(x_0) \cap H_2 \neq \varnothing$, c-a-d $F(x_0) \cap (H_2 \cap F(\Theta)) \neq \varnothing$; mais, $f(x_0) \in H$, et $f(x_0) \in F(x_0) \subseteq F(\Theta)$, donc, $F(x_0) \cap (H_\iota \cap F(\Theta)) \neq \varnothing$; donc, $F(x_0)$ serait non connexe, contrairement à l'hypothèse. |] D'autre part, les ensembles $H_1 \cap F(\Theta)$, $H_2 \cap F(\Theta)$ et, si $F(\Theta) \neq H$, $H - F(\Theta)$, constituent une partition de H ; pour celle-là et pour $k = m = 2$, les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées. Ceci et la conséquence évidente $f(\Theta) \subseteq F(\Theta)$ de b) impliquent qu'il existe (au moins un) $\xi \in \Theta$, tel que, pour tout ouvert A de E contenant ξ, on a $f(A \cap \Theta) \cap H_\iota \neq \varnothing$ $(\iota = 1,2)$. Si A_1 et A_2 sont des ouverts de E contenant ξ,

$(f(A_1 \cap \Theta) \cap H_1) \cap (f(A_2 \cap \Theta) \cap H_1) = (f(A_1 \cap \Theta) \cap f(A_2 \cap \Theta)) \cap H_1 \supseteq (f(A_1 \cap A_2) \cap \Theta) \cap H_1$; or, $A_1 \cap A_2$ étant aussi un ouvert de E contenant ξ, $(f(A_1 \cap A_2) \cap \Theta) \cap H_1$ doit également être non vide. Par conséquent, quand A décrit l'ensemble des ouverts contenant ξ (ensemble qui, manifestement, est une base de filtre), $f(A \cap \Theta) \cap H_1$ décrit une base de filtre sur H_1. On voit de même qu'alors $f(A \cap \Theta) \cap H_2$ décrit une base de filtre sur H_2. H_ι $(\iota = 1,2)$ étant fermé dans le quasi-compact H, il est aussi quasi-compact. Donc, la base de filtre que constituent les ensembles de la forme $f(A \cap \Theta) \cap H_\iota$ possède au moins un point adhérent y_ι dans H_ι. Or, par la définition de $B(f, \xi)$, $y_\iota \in B(f, \xi)$ $(\iota = 1,2)$; donc, à fortiori, $y_\iota \in F(\xi)$ $(\iota = 1,2)$. Donc, pour $\iota = 1,2$, on a $H_\iota \cap F(\xi) \neq \varnothing$ et, puisque $H_1 \cap H_2 \cap F(\Theta) = \varnothing$, $H_1 \cap H_2 \cap F(\xi) = \varnothing$; donc, $F(\xi)$ est non connexe dans H, contrairement à l'hypothèse. Donc, $F(\Theta)$ doit être connexe. |

Note. Dans le cas particulier où H est la droite réelle $\mathbb{R}$, pour chaque $x \in E$ $F(x)$ est un intervalle contenant les «limites d'indétermination» de f au point x. Ceci montre les motifs des conditions que nous avons imposé sur F.

Proposition 3. *Mêmes hypothèses sur E, H, f et Θ que dans la proposition 2, avec l'hypothèse supplémentaire que H est séparé, donc, compact* (resp. *que tout point de E possède un système fondamental de voisinages totalement ordonné par* $\supseteq$). *Soit F une application* $E \to P(H)$, *telle que*

$$F(x) = \begin{cases} \{f(x)\}, & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \text{une partie connexe de } H \text{ contenant } B(f, x), & \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

Alors, $F(\Theta)$ *est connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. a) Si H est séparé (donc, compact) et f continue au point x, $B(f, x) = \{f(x)\}$. La proposition 3 est alors un corollaire immédiat de la proposition 2. b) Supposons que tout point de E possède un système fondamental de voisinages totalement ordonné par $\subseteq$. Dans ce cas, on répète la démonstration de la proposition 2 jusqu'au point où on voit qu'il existe $\xi \in \Theta$, tel que, pour tout ouvert A de E contenant ξ, on a que $f(A \cap \Theta) \cap H_\iota \neq \varnothing$ $(\iota = 1, 2)$. Soit $\mathcal{A}$ un système fondamental de voisinages de ξ totalement ordonné par $\supseteq$; pour tout $U \in \mathcal{A}$, $f(U \cap \Theta) \cap H_\iota \neq \varnothing$ $(\iota = 1, 2)$. Comme $f(\xi) \in f(\Theta) \subseteq H_1 \cup H_2$, soit $f(\xi) \in H_1$, soit $f(\xi) \in H_2$. Le traitement de ces deux cas étant entièrement analogue, supposons, par exemple, que $f(\xi) \in H_1$. Il existe, alors, une famille $(X_u)_{u \in \mathcal{A}}$ d'éléments de Θ, telle que, pour tout $U \in \mathcal{A}$, $X_u \in U \cap \Theta$ et $f(X_u) \in H_2$. Soit $\mathcal{F}$ le filtre engendré par l'image du filtre des sections de $\mathcal{A}$ par l'application (définie par) $U \to X_u$; alors, $\lim \mathcal{F} = \xi$. Il y a, maintenant, deux cas à considérer, suivant que f est continue ou non au point ξ. Si f est continue, $\lim f(\mathcal{F}) = f(\xi) \in F(\xi)$. Ceci et le fait que, pour tout $U \in \mathcal{A}$, $f(X_u) \in H_2$ impliquent que $f(\xi)$ soit adhérent à H_2 dans H. Puisque $f(\xi) \in H_1$, $f(\xi)$ est aussi adhérent à H_1 dans H. Les H_1, H_2 étant fermés, on a que $f(\xi) \in H_1 \cap H_2 \cap F(\Theta)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $H_1 \cap H_2 \cap F(\Theta) = \emptyset$. Si f est discontinue au point ξ, la base de filtre $f(\mathcal{F})$ sur H a au moins un point adhérent η dans H (car H est quasi-compact); η est, donc, valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{F}$ et, d'après la définition de F, on a que $\eta \in F(\xi)$. Donc, $\eta \in F(\Theta)$. Les faits que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $F(\xi) \subseteq H_1 \cup H_2$, $\eta \in F(\xi)$, $F(\xi) \cap H_1 \neq \emptyset$ [puisque $f(\xi) \in F(\xi) \cap H_1$] et $F(\xi)$ est connexe impliquent que $F(\xi) \cap H_2 = \emptyset$, donc, que $\eta \notin H_2$. D'autre part, puisque, pour tout $U \in \mathcal{A}$, $f(X_u) \in H_2$, $\eta \in \overline{H_2} = H_2$, d'où, contradiction. Donc, $F(\Theta)$ doit être connexe. ❙

Le résultat suivant est indépendant des propositions 1 - 3.

Proposition 4. *Soient E et H des espaces topologiques, f une application* $E \to H$ *et* Θ *une partie quasi-compacte non vide de E. Alors,* $\overline{f(\Theta)} \subseteq \bigcup_{x \in \Theta} B(f, x)$.

Démonstration. Supposons que $y \in \overline{f(\Theta)}$. Alors, la trace Δ du filtre des voisinages dans H de y sur $f(\Theta)$ est une base de filtre, dont l'image réciproque par f possède une trace sur Θ qui est également une base de filtre $\mathcal{F}$. Celle-ci a au moins un point adhérent x dans le quasi-compact Θ. Il existe, alors, une base d'ultrafiltre $\mathcal{F}'$ sur Θ corvergeant vers x, plus fine que F, donc une base d' ultrafiltre $\mathcal{F}'$ sur $f(\Theta)$, plus fine que Δ, donc convergente vers y. Donc, $Y \in B(f, x)$. ❙

Remarque 3. *L'égalité* $\overline{f(\Theta)} = \bigcup_{x \in \Theta} B(f, x)$ *n'est pas vraie pour une f quelconque, même sous des hypothèses très restrictives sur* E, H *et* Θ.

Exemple. Soient $E = H = \mathbb{R}$, $\Theta = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ $(\alpha \leqslant \beta)$ et $f(\Theta) = [\gamma, \delta] \subset \mathbb{R}$ $(\gamma \leqslant \delta)$. Soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite strictement croissante de nombres réels $< \alpha$ convergeant vers a et soit $f(x_1), f(x_2), \ldots$ une suite de nombres réels $<\gamma' < \gamma$ possédant au moins une valeur d'adhérence finie. (On peut toujours choisir f de façon que ces hypothèses soient vérifiées.) Alors, manifestement, toute valeur d' adhérence en question appartient à $B(f, \alpha)$, sans appartenir à $\overline{f(\Theta)} = [\gamma, \delta]$. ❙

Proposition 5. *Soient E et H des espaces topologiques, tels que tout point de E possède un système fondamental de voisinages totalement ordonné par* $\supseteq$ *et que H soit quasi-compact; soient f une application* $E \to H$ *et F une application* $E \to P(H)$*, telle que* $F(x) = B(f, x)$ *quel que soit* $x \in E$. *Alors, F est s. c. s.*

D é m o n s t r a t i o n. Pour tout $x \in E$, $F(x) \neq \emptyset$. Puisque $B(f, x)$ est fermé dans le quasi-compact H, il est lui-même quasi-compact. Il suffit, donc, de démontrer que, pour tout ouvert G dans H, l'ensemble $\{x\,;\, x \in E \text{ et } F(x) \subseteq G\}$ est ouvert dans E, c-a-d que, si $F(\xi) \subseteq G$ [donc, $F(\xi) \cap \complement G = \emptyset$ (*)], il existe un voisinage $U(\xi)$ de ξ, tel que, pour tout $x \in \mathsf{U}(\xi)$, $F(x) \cap \complement G = \emptyset$. Supposons que ceci n'est pas vrai. Alors, dans tout voisinage $\mathsf{U}(\xi)$ de ξ existe $x \in \mathsf{U}(\xi)$, tel que $F(x) \cap \complement G \neq \emptyset$. Les hypothèses sur E entraînent, alors, l'existence d'une famille $(X_u)_{u \in \mathcal{A}}$ d'éléments de E, telle que $\mathcal{A}$ soit un système fondamental de voisinages de ξ totalement ordonné par $\supseteq$ et, pour tout $\mathsf{U} \in \mathcal{A}$, $X_u \in \mathsf{U}$ et $F(x) \cap \complement G \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{F}$ le filtre engendré par l'image du filtre des sections de $\mathcal{A}$ par l'application (définie par) $\mathsf{U} \to X_u$. Alors, $\lim \mathcal{F} = \xi$. $F(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur H et, pour tout $x \in \mathcal{F}$, $F(x) \cap \complement G \neq \emptyset$. Donc, la trace de $F(\mathcal{F})$ sur $\complement G$ engendre un filtre T sur $\complement G$ et un filtre T′ sur H. Puisque H est quasi-conpact, T′ possède au moins un point adhérent η dans H; comme $\complement G$ est fermé dans H et appartient à T′ aussi bien qu'à T, $\eta \in \complement G$. D'autre part, $\eta \in F(\xi)$, par la définition de $F(\xi)$; donc $\eta \in F(\xi) \cap \complement G$, contrairement à (*). Par conséquent, la proposition est vraie. ❙

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἀποσκοποῦσα εἰς εὐρεῖαν γενίκευσιν τοπολογικῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Σ. Π. Ζερβοῦ, τῇ βοηθείᾳ καὶ τοῦ ἔργου τοῦ C. Berge, ἡ συγγραφεὺς ἐπιτυγχάνει τήν, ἐπὶ πλέον, ἀνεύρεσιν διαφόρων νέων θεωρημάτων Γενικῆς Τοπολογίας, ἀφορώντων εἰς ἰδιότητας τυχουσῶν συναρτήσεων μεταξὺ τοπολογικῶν χώρων.

RÉFÉRENCES

[1] Berge, C. : *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* Dunod, 1959.
[2] Bourbaki, N. : *Topologie générale, 4e édition, 1142,* Hermann, 1965.
[3] Zervos, S. P. : C. R. Acad. Sc. Paris, t. 249, 1959, p. 219.
[4] Zervos, S. P. : Ann. Éc. Norm. Sup. Paris, 1960, 4e fasc., (Thèse), p. 313.
[5] Zervos, S. P. : C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 5981.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Παπαϊωάννου** ἀνακοινῶν τὴν ὡς ἄνω ἐργασίαν εἶπε τὰ ἑξῆς :

Ἡ δεσποινὶς Ροδιανὴ Βορεάδου, θυγάτηρ τοῦ ἀειμνήστου γεωλόγου καὶ καθηγητοῦ τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου Βορεάδου, ἐσπούδασε τὰ Μαθηματικὰ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν, ἀριστεύουσα γενικῶς εἰς ὅλα τὰ μαθήματα καθ᾽ ὅλα τὰ ἔτη. Ἐπιτυχοῦσα εἰς τὰς ἐξετάσεις ὑποτροφιῶν ἐσωτερικοῦ τοῦ ΙΚΥ εἰργάσθη ἀπὸ τοῦ 1965 ἐρευνητικῶς πλησίον τοῦ Καθηγητοῦ κ. Σ. Π. Ζερβοῦ. Τῶν σχετικῶν ἐρευνητικῶν ἀποτελεσμάτων της ἄρχεται διὰ τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως ἡ παρουσίασις. Ἀναφέρεται αὕτη εἰς τὴν Γενικὴν Τοπολογίαν καί, εἰδικώτερον, εἰς τὴν γενίκευσιν ἀποτελεσμάτων διὰ τὰς ἀσυνεχεῖς συναρτήσεις, τὰ ὁποῖα εἶχεν ἀνεύρει ὁ Σ. Π. Ζερβός. Ἐπὶ πλέον τῶν γενικεύσεων αὐτῶν, ἀνεῦρεν ἡ δεσποινὶς Βορεάδου καὶ διάφορα ἐνδιαφέροντα νέα θεωρήματα.

Ἤδη εὑρίσκεται αὕτη ἀπὸ ἔτους εἰς Σικάγον, ὡς ὑπότροφος τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Σικάγου, πλησίον τοῦ διαπρεποῦς Ἀμερικανοῦ μαθηματικοῦ S. MacLane.