ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 21ΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1993

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΔΕΣΠΟΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Ἀπεδείχθη τὸ Τελευταῖο Θεώρημα τοῦ Fermat,** ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. *Νικολάου Ἀρτεμιάδη.*

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

Τὴν 23.6.1993 μιὰ ἄκρως ἐνδιαφέρουσα, συναρπαστική, κοσμοϊστορικὴ εἴδηση, κυριολεκτικῶς συγκλόνισε τὸν ἐπιστημονικὸ κόσμο τοῦ Πλανήτη μας καὶ εἰδικότερα τὴν παγκόσμια μαθηματικὴ κοινότητα.

Πολύστηλα ἄρθρα ἀπασχόλησαν πολλὲς ἔγκριτες ἐφημερίδες ὅπως τὴν «Le Monde», τὴν «The Times» κ.ἄ. Ἐπίσης, ἡ εἴδηση μεταδόθηκε διεθνῶς καὶ ἀπὸ πάρα πολλὰ τηλεοπτικὰ δίκτυα.

Στὴν Ἑλλάδα μολονότι μερικὲς ἐφημερίδες «ἀσχολήθηκαν» μὲ τὸ γεγονός, θεώρησα σκόπιμο νὰ στείλω σχετικὴ ἐνημερωτικὴ ἐπιστολὴ στὶς κυριότερες ἐφημερίδες τῶν Ἀθηνῶν καὶ τῆς Ἐπαρχίας, στὰ Τμήματα Μαθηματικῶν τῶν ΑΕΙ τῆς χώρας, καθὼς καὶ σὲ διάφορα ἐπιστημονικὰ σωματεῖα.

Ἐπειδὴ ἡ Ὁλομέλεια τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν δὲν συγκαλεῖται μετὰ τὴν 15η Ἰουνίου μέχρι καὶ τὰ μέσα τοῦ μηνὸς Ὀκτωβρίου προβαίνω στὴν ἀνακοίνωση τοῦ γεγονότος αὐτοῦ, ἔστω καὶ ἀργά, γιὰ νὰ μπορέσει ἡ ἐκπληκτικὴ αὐτὴ εἴδηση νὰ βρίσκεται καταχωρημένη καὶ στὰ Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν.

Ἰδοὺ ἡ Εἴδηση:

«Τὸ τελευταῖο θεώρημα τοῦ Fermat» (ΤΘΦ), τὸ σπουδαιότερο, ἴσως, μαθηματικὸ πρόβλημα ποὺ παρέμεινε ἄλυτο περισσότερο ἀπὸ 350 χρόνια, εὑρῆκε τὴ λύση του.

Τὴν 23.6.1993 ὁ βρεττανικῆς καταγωγῆς, 40 ἐτῶν, καθηγητὴς τοῦ Princeton University (USA) Andrew Wiles, παρουσίασε τὴν ἀπόδειξη τοῦ ΤΘΦ σὲ μιὰ σειρὰ τριῶν διαλέξεων στὸ Isaak Newton Institute of Mathematics στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Cambridge (UK).

Τὸ θεώρημα ποὺ ἀπέδειξε ὁ Wiles ἔχει μιὰ πάρα πολὺ ἁπλὴ ἐκφώνηση καὶ μιὰ πάρα πολὺ μεγάλη ἱστορία. Πολλὰ βραβεῖα εἶχαν προκηρυχθεῖ, κατὰ καιρούς, γιὰ μιὰ σωστὴ λύση του, ὅμως μέχρι τώρα κανεὶς δὲν τὰ εἶχε διεκδικήσει.

Ἡ ἀνακοίνωση τοῦ Wiles ἠλέκτρισε κυριολεκτικῶς ὁλόκληρο τὸν μαθηματικὸ κόσμο, ὄχι μόνο γιὰ τὴν σπουδαιότητα τοῦ ἐπιτευχθέντος ἀποτελέσματος ἀλλὰ ἀκόμα περισσότερο γιὰ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο αὐτὸ ἐπιτεύχθηκε. Ἐδῶ δὲν πρόκειται ἁπλῶς γιὰ κάποια «ἔξυπνη» λύση ποὺ προέκυψε μὲ κάποιο εὐφυὲς τέχνασμα. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ ΤΘΦ ἀπὸ τὸν Wiles προβάλλει μπροστά μας σὰν ἕνα ἁπλὸ συμπέρασμα ἑνὸς πλούσιου, μαζικοῦ καὶ πολύπλοκου μηχανισμοῦ, ἕνα συμπέρασμα ποὺ κεῖται στὴ συμβολὴ μεγάλων ρευμάτων τῶν συγχρόνων Μαθηματικῶν.

Ἐξ ἄλλου αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο τὸ ἔργο τοῦ Wiles παρεκίνησε τοὺς μαθηματικοὺς στὸ νὰ προβοῦν σὲ τόσο ἐνθουσιώδεις ἐκδηλώσεις καὶ σὲ ἀτελείωτους ἐπαίνους.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ ΤΘΦ προξένησε στὴν μαθηματικὴ κοινότητα κατάπληξη. Τὸ θεώρημα εἶχε ἀποτελέσει, στὸ παρελθόν, «πόλο ἕλξεως» γιὰ ἐρασιτέχνες καὶ ἐπαγγελματίες μαθηματικοὺς οἱ ὁποῖοι μάταια ἀσχολήθηκαν μὲ αὐτὸ ἐπὶ πολλὰ ἔτη, στὴ συνέχεια δὲ παραιτήθηκαν τῶν προσπαθειῶν τους πλήρως ἀπογοητευμένοι καὶ γεμάτοι πικρία. Οἱ συνεχεῖς αὐτὲς μακροχρόνιες ἀποτυχημένες προσπάθειες εἶχαν ἀρχίσει νὰ δημιουργοῦν σὲ μερικοὺς εἰδικούς, ἀμφιβολίες ὡς πρὸς τὴν «ἀποδειξιμότητα» τοῦ θεωρήματος.

Τὶς ἀμφιβολίες αὐτὲς ἐνίσχυσε μιὰ μελέτη ἐπισκοπήσεως, ποὺ ἔγινε τὸ 1984, ἡ ὁποία ἀφοροῦσε ἐφαρμογὲς τῆς Θεωρίας Ἀριθμῶν. Στὴ μελέτη αὐτὴ τονίζονταν ἡ ἄποψη ὅτι ὑπῆρχε πιθανότης νὰ μὴν ἀποδειχθεῖ ποτὲ ἂν τὸ ΤΘΦ ἦταν ἀληθὲς ἢ ψευδές.

Ποιὸ ὅμως εἶναι καὶ πότε διατυπώθηκε τὸ ΤΘΦ; Ποιὸς ἦταν ὁ Fermat καὶ πῶς αὐτὸς ὁδηγήθηκε στὸ νὰ ἐμπνευσθεῖ τὸ περίφημο αὐτὸ θεώρημα:

Ὁ Pierre de Fermat (1601-1665) ἦταν Γάλλος δικαστὴς τοῦ ὁποίου ἡ συμβολὴ στὴ Θεωρία Ἀριθμῶν ὑπῆρξε τεραστία, ἄκρως πρωτότυπη καὶ θεμελιώδης. Ὁ Fermat, ὅσο ζοῦσε, δὲν δημοσίευσε τίποτα ἀπολύτως ἀπὸ τὸ ἔργο του, ἂν καὶ διεξήγαγε ἀτέρμονες μαθηματικὲς συζητήσεις καὶ ἀλληλογραφοῦσε εὐρύτατα μὲ τοὺς συγχρόνους του. Ὁ Fermat εἶχε ἐπίσης τὴ συνήθεια νὰ σημειώνει παρατηρήσεις του στὰ περιθώρια τῶν σελίδων τῶν βιβλίων πού εἶχε στή βιβλιοθήκη του. Μὲ ἄλλα λόγια συζητοῦσε καὶ μὲ τούς συγγραφεῖς τῶν βιβλίων πού χρησιμοποιοῦσε.

Μιὰ ἀπό τὶς πολύ γνωστὲς καὶ φημισμένες παρατηρήσεις του εἶναι καὶ αὐτή πού σημείωσε στό βιβλίο μὲ τίτλο «Τὰ 'Αριθμητικὰ» τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Διόφαντου τῆς 'Αλεξανδρείας ὁ ὁποῖος ἤκμασε περὶ τὰ μέσα τοῦ 3ου αἰώνα μ.Χ. Ἡ παρατήρηση πού σημείωσε ὁ Fermat ἀφοροῦσε τὶς λεγόμενες «Πυθαγόρειες τριάδες» οἱ ὁποῖες εἶναι τριάδες ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπαληθεύουν τή γνωστή ἐξίσωση τοῦ Πυθαγόρα $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, ὅπου α, β εἶναι οἱ κάθετες πλευρὲς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ γ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ.

Παραδείγματα τέτοιων τριάδων εἶναι:

$$\alpha = 3,\ \beta = 4,\ \ \gamma = 5\ \ :\ 3^2 + 4^2\ = 5^2$$
$$\alpha = 5,\ \beta = 12,\ \gamma = 13 :\ 5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$\alpha = 8,\ \beta = 15,\ \gamma = 17 :\ 8^2 + 15^2 = 17^2$$

Ὑπάρχει ἀπειρία τέτοιων τριάδων, κάτι πού ὅπως εἶχα ἀναφέρει καὶ στήν ὁμιλία μου τῆς 11.2.92, ἐδῶ στήν 'Ακαδημία (Πρ. 'Ακαδ. 'Αθηνῶν, Τόμ. 67, 1992) πιθανὸν νὰ ἦταν γνωστό στούς Βαβυλωνίους μαθηματικούς πολύ παλαιότερα.

'Αναφερόμενος σὲ γενίκευση τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ὁ Fermat σημείωσε στό περιθώριο τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου τοῦ Διόφαντου τό ἀκόλουθο θεώρημα τό ἀποκαλούμενο σήμερα ΤΘΦ:

«Δὲν ὑπάρχουν ἀκέραιοι, μή μηδενικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση:

$$\alpha^\nu + \beta^\nu = \gamma^\nu$$

ὅπου ν ἀκέραιος ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 2».

'Εν συνεχεία ὁ Fermat πρόσθεσε τήν ἑξῆς φράση:

«Βρῆκα μιὰ θαυμάσια ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ τήν ὁποία ὅμως δὲν μπορῶ νὰ παραθέσω ἐδῶ διότι τό περιθώριο τοῦ βιβλίου εἶναι πολύ στενό!».

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι τήν παραπάνω παρατήρηση τήν ἔκανε ὁ Fermat ἀρκετὰ χρόνια πρό τοῦ θανάτου του. Ἴσως τό 1637. Κατὰ συνέπειαν ἡ ὀνομασία «τελευταῖο θεώρημα» χρησιμοποιεῖται μᾶλλον «ποιητικῇ ἀδείᾳ» θὰ ἔλεγα.

Τό πρόβλημα, ἂν καὶ φαίνεται ἁπλό, εἶναι στήν πραγματικότητα πάρα πολύ πολύπλοκο. Ὅπως ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, ἐπὶ 350 χρόνια καὶ περισσότερο τό ΤΘΦ ἀντιστάθηκε στούς πιό διάσημους θεράποντες τῆς Μαθηματικῆς 'Επιστήμης, τῆς 'Επιστήμης αὐτῆς πού ἀποτελεῖ βάση ὅλων τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν.

Εὐχόμαστε ὕστερα ἀπό τόσες καὶ τόσες λανθασμένες λύσεις πού δόθηκαν κατὰ καιρούς, ἡ λύση τοῦ Wiles, ἡ ὁποία στηρίζεται σὲ εἰκασία τοῦ Ἰάπωνα μαθηματικοῦ Yutaka Taniyama καὶ ἡ ὁποία (εἰκασία) ἀποτελεῖ τὸν ἰσχυρὸ μηχανισμὸ ποὺ εὑρίσκεται πίσω ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη τοῦ ΤΘΦ, νὰ εἶναι ἡ ΟΡΘΗ, ὅπως ἐξάλλου μᾶς τὸ διαβεβαιώνουν ἐξέχοντες, εἰδικοὶ ἐπὶ τοῦ θέματος, μαθηματικοί. Μολονότι τὸ ΤΘΦ ἀσκεῖ μεγάλη γοητεία τόσο στοὺς ἐρασιτέχνες ὅσο καὶ στοὺς ἐπαγγελματίες μαθηματικούς, πρέπει ἐδῶ νὰ τονισθεῖ ὅτι σὲ τελευταία ἀνάλυση ἡ εἰκασία Taniyama ἔχει πολὺ μεγαλύτερη σημασία γιὰ τὰ σύγχρονα μαθηματικὰ ἀπ' ὅ,τι ἔχει τὸ ΤΘΦ.

Κατωτέρω παραθέτουμε ἕνα λεπτομερέστερο ἱστορικὸ τοῦ ὅλου θέματος καθὼς καὶ ἐνημερωτικὲς πληροφορίες ἀναφορικὰ μὲ τὴν εἰκασία τοῦ Taniyama.

Ὁ Andrew Wiles εἶχε ἔρθει σὲ ἐπαφὴ μὲ τὸ ΤΘΦ ἀπὸ πολὺ νεαρὴ ἡλικία καὶ ἀσχολήθηκε μὲ αὐτὸ κατὰ καιρούς.

Ἐν τῷ μεταξὺ μερικοὶ μαθηματικοὶ ἠσχολοῦντο μὲ τὴ βελτίωση καὶ μὲ τὶς συνέπειες ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ ἔχει μιὰ εἰκασία ποὺ εἶχε διατυπώσει τὸ 1955 ὁ Ἰάπων μαθηματικὸς Yutaka Taniyama (1927-1958). Ἡ εἰκασία αὐτή, ποὺ στὴν ἀρχὴ εἶχε θεωρηθεῖ ὡς μὴ ἔχουσα καμιὰ σχέση μὲ τὸ ΤΘΦ, ἀναφέρεται στὶς ἰδιότητες τῶν λεγομένων «ἐλλειπτικῶν καμπύλων»: συνόλων σημείων ποὺ ἀποτελοῦν λύσεις ἐξισώσεων μὲ δύο μεταβλητές, x καὶ y, καὶ τῶν ὁποίων (ἐξισώσεων) οἱ συντελεστὲς εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί. Περισσότερες λεπτομέρειες γιὰ τὴν Εἰκασία Taniyama, παραθέτω στὸ τέλος τοῦ παρόντος κειμένου.

Ὁ Goro Shimura, ἐρευνητὴς καὶ αὐτὸς στὸ Princeton University, κατόρθωσε νὰ βελτιώσει τὴν ὡς ἄνω εἰκασία καὶ νὰ τὴν διατυπώσει ὑπὸ ἰσχυρότερη καὶ ἁπλούστερη μορφή. Ἐν συνεχεία ὁ André Weil τοῦ Institute for Advanced Study στὸ Princeton, ἔδωσε στὸ ἔργο του Taniyama μιὰ ἀκόμη ἀκριβέστερη καὶ πιὸ βελτιωμένη μορφή.

Στὶς ἀρχὲς τῆς δεκαετίας τοῦ 1980 ὁ Gerhard Frey τοῦ University of Saarland στὸ Saarbrüchen τῆς Γερμανίας διετύπωσε τὴν ἄποψη ὅτι, ἂν τὸ ΤΘΦ δὲν ἀληθεύει, τότε θὰ ὑπάρχουν ἐλλειπτικὲς καμπύλες οἱ ὁποῖες δὲν θὰ ἱκανοποιοῦν τὴν εἰκασία Taniyama.

Ὁ Jean-Pierre Serre, καθηγητὴς στὸ Collège de France, στὸ Παρίσι, κατόρθωσε νὰ καταστήσει ἀκριβέστερη καὶ σαφέστερη τὴν ἄποψη τοῦ Frey ἰσχυριζόμενος ὅτι ἡ ἐν λόγω ἄποψη ἀληθεύει, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ κάποια ἄλλη ἁπλούστερη εἰκασία.

Τὴν ἁπλούστερη αὐτὴ εἰκασία τοῦ Serre κατόρθωσε νὰ ἀποδείξει, τὸ 1986, ὁ Kenneth A. Ribet τοῦ University of California (Berkeley).

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Ribet ἀπετέλεσε τὸν συνδετικὸ κρίκο μεταξὺ τῆς εἰκασίας Taniyama καὶ τοῦ ΤΘΦ. Ἡ τελευταία αὐτὴ φράση σημαίνει ὅτι ἂν ἡ εἰκασία

Taniyama ἀποδειχθεῖ ἔστω καὶ γιὰ κάποια ὁρισμένη κλάση ἐλλειπτικῶν καμπύλων (ὄχι ὅλων), τότε ἡ ἀλήθεια τοῦ ΤΘΦ ἀκολουθεῖ ὡς ἄμεση συνέπεια.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν Frey, Serre καὶ Ribet ὑπῆρξαν καθοριστικῆς σημασίας γιὰ τὸν Wiles. Χρειάσθηκαν ἀπὸ τότε 7 χρόνια γιὰ νὰ καταλήξει ὁ Wiles στὸ ποθούμενο ἀποτέλεσμα.

Θὰ κλείσω τὴν ὁμιλία αὐτὴ μὲ μερικὲς ἀκόμη πληροφορίες ποὺ ἀφοροῦν τὴν εἰκασία Taniyama.

Ἡ Εἰκασία Taniyama εἶναι μιὰ πρόταση σχετικὴ μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν ἐλλειπτικῶν καμπύλων.

Οἱ ἐλλειπτικὲς καμπύλες δίδονται ὑπὸ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$y^2 = x^3 + \alpha x^2 + bx + c$$

ὅπου ἡ καθοριστικὴ συνθήκη ποὺ πρέπει αὐτὲς νὰ ἱκανοποιοῦν εἶναι: ὁ μέγιστος ἐπιτρεπτὸς ἐκθέτης τοῦ y εἶναι τὸ 2, ὁ δὲ μέγιστος ἐπιτρεπτὸς ἐκθέτης τοῦ x εἶναι τὸ 3.

Οἱ λύσεις τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων ἀπετέλεσαν τὸ ἀντικείμενο μελέτης τῶν ἐρευνητῶν γιὰ περισσότερο ἀπὸ ἕναν αἰώνα, εἶναι δὲ ἡ συμπεριφορὰ τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν πλήρως γνωστὴ στὴν περίπτωση ποὺ οἱ συντελεστὲς a, b, c εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν ὅμως θελήσουμε οἱ ἐν λόγῳ συντελεστὲς νὰ εἶναι μ ό ν ο ρητοὶ ἀριθμοί, τότε τὰ πράγματα καθίστανται πολὺ πιὸ δύσκολα.

Ἡ διατύπωση τῆς Εἰκασίας Taniyama εἶναι δύσκολη καὶ ἀπαιτεῖ τὴ χρήση τῶν ἐννοιῶν «ἐλλειπτικὴ συνάρτηση» καὶ «modular καμπύλη», τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ὁποίων παραλείπουμε.

Ἡ Εἰκασία Taniyama (ἢ μᾶλλον ἡ ἰσχυρότερη αὐτῆς, διατυπωθεῖσα ἀπὸ τὸν Goro Shimura) ἔχει ὡς ἑξῆς:

«Κάθε σημεῖο μιᾶς ἐλλειπτικῆς καμπύλης εἶναι ἡ εἰκόνα ἑνὸς προκαθορισμένου (ἀμετάβλητου) πεπερασμένου πλήθους σημείων τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς modular καμπύλης».

Ἡ Εἰκασία Taniyama διατυπωμένη στὴν ὡς ἄνω πλήρη γενικὴ μορφή της παραμένει ἀκόμα ἀναπόδεικτη. Ὅμως ὁ Wiles ἀπέδειξε ὅτι ἡ εἰκασία ἀληθεύει γιὰ κάποια γενικὴ κλάση ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων (ὄχι γιὰ ὅλες), ἦταν δὲ αὐτὸ ἀρκετὸ νὰ τὸν ὁδηγήσει στὴν ἀπόδειξη τοῦ ΤΘΦ.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ Wiles ἀπέδειξε τὴν ἀκόλουθη ἰσοδύναμη πρὸς τὸ ΤΘΦ πρόταση: Ἂν p, u, v καὶ w εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $p > 1$, τότε ἡ σχέση $u^p + v^p + w^p = 0$ συνεπάγεται $u v w = 0$.

Παραθέτω αὐτούσιο τὸ κείμενο ποὺ δημοσιεύθηκε στὸ περιοδικὸ NOTICES (Amer. Math. So., July/August, 1993 Volume 40, Number 6), ὅπου σκιαγραφεῖται ἡ ἀπόδειξη τοῦ Wiles καὶ δίδεται σχετικὴ βιβλιογραφία.

«The following paragraphs outline the proof that Wiles sketched in his Cambridge lectures. The details of the proof are contained in a 200-page manuscript, which Wiles intends to release to the mathematical public in the coming weeks.

To show that a semisimple elliptic curve E / Q is modular, Wiles fixes an odd prime l, which in practice is taken to be 3 or 5. Associated to E is the l-adic representation p_l : Gal ($\overline{Q}$ / Q) $\rightarrow$ **GL** (2, Z_l) gotten by considering the action of Gal ($\overline{Q}$ / Q) on the l-power division points of E. (For background the reader may consult any of the recent texts on elliptic curves, such as [12]). The elliptic curve E satisfies Taniyama's conjecture if and only if p_l is «modular» in the sense that it is associated to a weight-two cuspidal eigenform in the usual way. The representation p_l «looks and feels» modular in that it has the right determinant and satisfies some necessary local conditions at l and other ramified primes.

Roughly speaking, Wiles proves that a representation like p_l is modular if it «looks and feels» modular and reduces mod l to a representation $\overline{p}_l$:

Gal ($\overline{Q}$ / Q) $\rightarrow$ **GL** (2, F_l) which is (1) surjective and (2) itself modular. Condition (2) means that $\overline{p}_l$ lifts to some representation which is modular; in other words, we want p_l to be congruent to some modular representation. (In many cases we can replace «surjective» by «irreducible» in studying $\overline{p}_l$).

Wiles's argument is couched in the language of Mazur's deformation theory [6]. Wiles considers deformations of a representation $\overline{p}$ satisfying (1) and (2), restricting his attention to those deformations that could plausibly be related to cusp forms of weight two. (He requires the determinant of the deformation to be the cyclotomic character and imposes a local condition at the prime l. For example, if $\overline{p}$ is supersingular, he demands that the deformation be associated with a Barsotti-Tate group, locally at l). Wiles shows that the universal such deformation is modular, thereby verifying a conjecture of Mazur. To do this, he must show that a certain structural map φ of local rings, a priori a surjection, is in fact an isomorphism. It is here that Wiles uses the ideas of Mazur, Hida, Tilouine, Flach, Kolyvagin, and others. To prove the injectivity of φ, Wiles was led to study the analogue of the classical Selmer group for the symmetric square of a modular lift p of $\bar{p}$, bounding it by techniques derived from those of Kolyvagin and Flach. (In many cases Wiles calculates precisely the order of this Selmer group).

After proving this key theorem, Wiles shows that E is modular. He examines first the case $l = 3$. A theorem of J. Tunnell [13], which incorporates results of H. Saito-T. Shintani and Langlands [4], shows that $\bar{p}_3$ satisfies (2) whenever it satisfies (1). It follows that E is modular whenever $\bar{p}_3$ is surjective.

A tantalizing problem, raised by Wiles at the close of his second lecture, is posed by the case where $\bar{p}_3$ is not surjective. Suppose, for example, that $\bar{p}_3$ is reducible: can we still win the endgame? Wiles explained his amasing solution to this problem in the third lecture. Using the Hilbert irreducibility theorem and the Cebotarev density theorem, he constructs an auxiliary semistable elliptic curve E' whose mod 3 representation satisfies (1) and whose mod 5 representation is isomorphic to $\bar{p}_5$. The construction succeeds because the modular curve X (5) has genus zero. Applying his key theorem once, Wiles shows that E' is modular. Therefore, $\bar{p}_5$ is modular, since it may be viewed as coming from E'. After a second application of the key theorem, this time to p_5 Wiles deduces that E is modular!

Wile's proof of Taniyama's conjecture represents an enormous milestone for modern mathematics. On the one hand, it illustrates dramatically the power of the abstract «machinery» we have amassed for dealing with concrete Diophantine problems. On the other, it brings us significantly closer to the goal of tying together automorphic representations and algebraic varieties.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M. Flach, A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve, Invent. Math. **109** (1992), 307-327.
2. G. Frey, Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations, Ann. Univ. Sarav. **1** (1986), 1-40.
3. G. Frey, Links between solutions of A-B = C and elliptic curves, Lecture Notes in Math. **1380** (1989), 31-62.
4. R. P. Langlands, Base change for CL (2), Ann. of Math. Stud., vol. **96**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
5. B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, Publ. Math. IHES **47** (1977), 33-186.

6. B. Mazur, Deforming Galois representations, Galois Groups over Q, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. **16**, Springer-Verlag Berlin and New York, 1989, pp. 385-437.

7. B. Mazur, Number theory as gadfly, Amer. Math. Monthly **98** (1991), 593-610.

8. K. A. Ribet, On modular representations of Gal $(\overline{Q}/Q)$ arising from modular forms, Invent. Math. **100** (1990), 431-476.

9. K. A. Ribet, From the Taniyama-Shimura Conjecture to Fermat's Last Theorem, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **11** (1990), 116-139.

10. J-P. Serre, Lettre à J-F. Mestre, 13 août 1985, Contemp. Math. **67** (1987), 263-268.

11. J-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de Gal $(\overline{Q}/Q)$, Duke Math. J. **54** (1987), 179-230.

12. J. H. Silverman, The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Math., vol. 106, Springer, New York, 1986.

13. J. Tunnell, Artin's conjecture for representations of octahedral type, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), 173-175.

SUMMARY

During a June 1993 workshop at Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences in Cambridge, UK, Professor Andrew Wiles of Princeton University announced his proof of the celebrated Fermat's Last Theorem : «The equation $\alpha^{\nu} \times \beta^{\nu} = \gamma^{\nu}$ has no nonzero solutions in the positive integers when $\nu \geqslant 3$.

A crusial link was a 1986 theorem that the Taniyama Conjecture implies Fermat's Last Theorem, proved by Kenneth Ribet.

An outline of the proof that Wiles sketched in his Cambridge lectures, and several references are given.