ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — Περὶ τῶν πλήρων ὁλοκληρωμάτων τῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους*, *ὑπὸ* ***Α. Τζώρτζη.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Εἰς προηγουμένας ἐργασίας μου ἐμελέτησα, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν δεσμῶν ἀπειροστικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ κ. Vessiot, τὸ πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως μιᾶς γενικῆς κατηγορίας ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως μὲ πολλὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς[1]. Ἐν τῇ παρούσῃ ἀνακοινώσει παρέχω ἐξαγόμενά τινα, εἰς τὰ ὁποῖα ἤχθην ἐν τῇ μελέτῃ τῶν πλήρων ὁλοκληρωμάτων τῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους a τάξεως μὲ n ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς.

2. Μία τοιαύτη ἐξίσωσις δύναται, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(1) \quad \Phi_0(x_1, \ldots x_n, z, p_{i_1}, p_{i_1 i_2}, \ldots p_{i_1 \ldots i_a}) = a_0 \quad (i_1, \ldots i_k = 1, \ldots n)$$

ὅπου ἐθέσαμεν

$$p_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\partial^k z}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}, \quad p_{i_0} = z,$$

a_0 εἶναι μία αὐθαίρετος σταθερὰ καὶ ἐπὶ πλέον ὑποθέτομεν ὅτι ἡ Φ_0 δὲν περιέχει παρὰ ἐκεῖνα τῶν p, τὰ ὁποῖα εἶναι διακεκριμένα ἀναμεταξύ των. Εἰς τὸν χῶρον τῶν $n+1$ διαστάσεων τῶν μεταβλητῶν $(x_1, \ldots x_n, z)$ πᾶσα οἰκογένεια πολλαπλοτήτων n διαστάσεων δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(2) \quad z = \pi - y_\alpha \frac{\partial \pi}{\partial y_\alpha}, \quad q_h = -\frac{\partial \pi}{\partial y_h}, \quad q_r = \frac{\partial \pi}{\partial y_r} \quad (\alpha, h = 1, \ldots s; r = s+1, \ldots n),$$

ὑπὸ τὴν συνθήκην

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \pi}{\partial y_1}, \ldots \dfrac{\partial \pi}{\partial y_s}\right)}{\partial(y_1, \ldots y_s)} \neq 0$$

ὅπου ἐθέσαμεν

$$y_h = p_h, \quad y_r = x_r, \quad q_h = x_h, \quad q_r = p_r,$$

οἱ δεῖκται μὲ ἑλληνικοὺς χαρακτῆρας παριστάνουσιν ἄθροισιν καὶ π εἶναι μία αὐθαίρετος συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν $y_1, \ldots y_n$, $a_0, a_1, \ldots a_N$. Αἱ σχέσεις αὗται ἐκφρά-

* **A. TSORTSIS. — Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles.**

[1] A. Tsortsis, 1° Thèse présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, soutenue le 13 Juillet 1933. 2° *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 159 et p. 990.

ζουσι τὰ $z, q_1, \ldots q_n$ μιᾶς τυχούσης πολλαπλότητος τῆς οἰκογενείας συναρτήσει τῶν $y_1, \ldots y_n$. Καὶ πάσης πολλαπλότητος προκυπτούσης ἐκ ταύτης δι' ἐπεκτάσεως, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ Lie, οἱ προσανατολισμοὶ τῶν στοιχείων τῶν διαφόρων τάξεων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἰδίων ὡς ἄνω μεταβλητῶν ἤτοι:

$$(3) \quad p_{i_1 \ldots i_k} = \pi_{i_1 \ldots i_k}(y_1, \ldots y_n, a_0, a_1, \ldots a_N) \quad (k=2, \ldots a \cdot i_1, \ldots i_k = 1, \ldots n),$$

ὅπου τὸ $\pi_{i_1 \ldots i_k}$ δὲν ἀλλάσσει διὰ μιᾶς τυχούσης μεταθέσεως τῶν δεικτῶν $i_1 \ldots i_k$. Μία τοιαύτη οἰκογένεια πολλαπλοτήτων θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἓν πλῆρες ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (1), ἐὰν δι' ἀπαλοιφῆς τῶν $a_1, \ldots a_N$ μεταξὺ τῶν (2) καὶ (3) δὲν δύναται νὰ προκύψῃ μία σχέσις μὴ ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1)· πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον ἵνα

$$N = \frac{n(n+1) \ldots (n+\mu-1)}{1.2 \ldots \mu} \quad (\mu = 1, \ldots a)\cdot$$

ἐπὶ πλέον αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) ἑνὸς πλήρους ὁλοκληρώματος πρέπει νὰ δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(4) \quad \Phi_i(y_1, \ldots y_n, z, q_1, \ldots q_n, p_{i_1 i_2}, \ldots p_{i_1 \ldots i_a}) = a_i \quad (i=0,1, \ldots N; i_1, \ldots i_k = 1, \ldots n),$$

ἔνθα ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τούτων εἶναι ἡ (1).

3. Πᾶν πλῆρες ὁλοκλήρωμα (4) τῆς ἐξισώσεως (1) παραμένει ἀναλλοίωτον ὑπὸ τῶν ἀπειροστικῶν μετασχηματισμῶν

$$(5) \quad U_{i_1} f = Z_{i_1} f + \mathscr{J}_{i_1 \alpha} X_\alpha f + \zeta_{i_1 [\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} f \equiv Y_{i_1} f + \zeta_{i_1 [\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} f$$

$$(\alpha = 1, \ldots s; i_1, \lambda_1, \ldots \lambda_k = 1, \ldots n),$$

ὅπου ἐθέσαμεν

$$X_{i_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} + p_{i_1} \frac{\partial f}{\partial z} + p_{i_1 [\lambda_1 \ldots \lambda_\sigma]} \frac{\partial f}{\partial p_{[\lambda_1 \ldots \lambda_\sigma]}}, \quad Z_h f = \frac{\partial f}{\partial p_h} + \mathscr{J}_{h\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu},$$

$$Z_r f = \frac{\partial f}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial f}{\partial z} + \mathscr{J}_{r\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu} + p_{r[\lambda_1 \ldots \lambda_\sigma]} \frac{\partial f}{\partial p_{[\lambda_1 \ldots \lambda_\sigma]}}, \quad P_{i_1 \ldots i_k} f = \frac{\partial f}{\partial p_{i_1 \ldots i_k}}$$

$$\mathscr{J}_{hj} = (-1)^{h+j} \left| p_{h_1 j_1} \right| : \left| p_{h_2 j_2} \right|, \mathscr{J}_{hr} = -\mathscr{J}_{rh} = \mathscr{J}_{h\alpha} p_{r\alpha}, \mathscr{J}_{rt} = p_{rt} + \mathscr{J}_{t\alpha} p_{r\alpha}$$

$$(\alpha, h, j, h_2, r, j_2 = 1, \ldots s; \mu, r, t = s+1, \ldots n; h_1 = 1, \ldots h-1, h+1, \ldots s; j_1 = 1, \ldots j-1,$$

$$j+1, \ldots s; \sigma = 2, \ldots a-1; \lambda_1, \ldots \lambda_k = 1, \ldots n),$$

καὶ τὸ σύμβολον $[\lambda_1 \ldots \lambda_k]$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα, ὅπερ προκύπτει ἐὰν λάβωμεν τοὺς συνδυασμοὺς μετ' ἐπαναλήψεως τῶν δεικτῶν $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$· τέλος τὰ $\zeta_{i_1 [\lambda_1 \ldots \lambda_\alpha]}$ εἶναι συντελεσταὶ πρὸς προσδιορισμόν. Ἀλλ' οἱ μετασχηματισμοὶ οὗτοι ἀνήκουσιν εἰς τὴν δέσμην μετασχηματισμῶν βαθμοῦ $n + \frac{n(n+1)\ldots(n+a-1)}{1\cdot 2 \ldots a} = m$, ἤτοι:

$$F: \quad Uf = u_{\lambda_1} Y_{\lambda_1} f + v_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} f \quad (\lambda_1, \ldots \lambda_k = 1, \ldots n),$$

ὅπου u, v εἶναι αὐθαίρετοι συναρτήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν z, y_{i_1}, q_{i_1}, $p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_1 \ldots i_a}$· ὅθεν δι' ἕνα τυχόντα μετασχηματισμὸν τῆς δέσμης F πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $U\Phi_0 = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὁρίζει μίαν ὑποδέσμην F_0 τῆς F, βαθμοῦ $m-1$, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀνήκωσιν οἱ μετασχηματισμοὶ $U_{i_1} f$. Θεωρήσωμεν τὴν ὑποδέσμην F_c τῆς F_0, βαθμοῦ n, ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν τοὺς μετασχηματισμοὺς $U_{i_1} f$· αὕτη πρέπει νὰ εἶναι πλήρης. Δὲν ὑπάρχει μετασχηματισμὸς τῆς F_c, ὁ ὁποῖος νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν δέσμην τὴν ἔχουσαν ὡς βάσιν τοὺς $\frac{n(n+1)\ldots(n+a-1)}{1\cdot 2 \ldots a}$ μετασχηματισμοὺς $P_{i_1 \ldots i_a} f$. Τὸ ζητούμενον πλῆρες ὁλοκλήρωμα τῆς (1) θὰ εἶναι τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα n διαστάσεων τῆς δέσμης F_c. Ἀντιστρόφως τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα n διαστάσεων τῆς δέσμης F_c δύναται πάντοτε νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν (2), (3), εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ πλῆρες ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (1).

4. Τούτου τεθέντος τὸ ὅλον ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς πλήρους ὑποδέσμης F_c, δηλαδὴ εἰς τὴν εὕρεσιν n διακεκριμένων μετασχηματισμῶν τῆς δέσμης ταύτης.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν n διακεκριμένους μετασχηματισμοὺς τῆς δέσμης F ὑπὸ τὴν μορφὴν (5). Ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς $\zeta_{i_1[\lambda_1 \ldots \lambda_a]}$ εἰς τρόπον ὥστε οἱ μετασχηματισμοὶ οὗτοι νὰ ἀνήκωσιν εἰς τὴν F_c. Ἔχομεν πρὸς τοῦτο τὰς συνθήκας:

1° Αἱ πλήρεις ὑποδέσμαι F_c βαθμοῦ n, εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν ἐνελίξεων βαθμοῦ n τῆς F, ἐξ οὗ ἕπονται αἱ σχέσεις:

$$(6) \quad \pi_{hji_3 \ldots i_{a+1}} = 0\,, \quad \pi_{hri_3 \ldots i_{a+1}} = \zeta_{hri_3 \ldots i_{a+1}}\,; \quad \pi_{rti_3 \ldots i_{a+1}} = \zeta_{rti_3 \ldots i_{a+1}} = \zeta_{tri_3 \ldots i_{a+1}} \quad (h,j = 1, \ldots s\,;\ r,t = s+1, \ldots n\,;\ i_3 \ldots i_{a+1} = 1, \ldots n),$$

ὅπου ἐθέσαμεν

$$\pi_{ikr_3 \ldots r_{a+1}} = \mathcal{J}_{i\alpha} \zeta_{k\alpha r_3 \ldots r_{a+1}} - \mathcal{J}_{k\alpha} \zeta_{i\alpha r_3 \ldots r_{a+1}} \quad (\alpha = 1, \ldots s),$$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι τὸ $\zeta_{jr_2 \ldots r_{a+1}}$ δὲν ἀλλάσσει διὰ μιᾶς τυχούσης μεταθέσεως τῶν δεικτῶν $r_2 \ldots r_{a+1}$.

2° Ἡ δέσμη F_c εἶναι μία ὑποδέσμη τῆς F_o, ὅθεν

(7) $Y_{i_1}\Phi_o + \zeta_{i_1[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} \Phi_o = 0 \ (i_1, \lambda_1, .. \lambda_a = 1, \ldots n)$,

3° Ἡ δέσμη F_c εἶναι πλήρης, ἄρα

(8) $$Y_i \zeta_{ki_1 \ldots i_a} - Y_k \zeta_{ii_1 \ldots i_a} + \zeta_{i[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} \zeta_{ki_1 \ldots i_a} - \zeta_{k[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} P_{[\lambda_1 \ldots \lambda_a]} \zeta_{ii_1 \ldots i_a} = 0 \ (i, k, i_1 \ldots i_a, \lambda_1, \ldots \lambda_a = 1, \ldots n)\cdot$$

Ἐὰν τὰ $\zeta_{ii_1 \ldots i_a}$ παραμένωσιν ἀναλλοίωτα διὰ μιᾶς τυχούσης μεταθέσεως τῶν δεικτῶν $i_1 \ldots i_a$, καὶ ἐπὶ πλέον πληρῶσι τὰς συνθήκας (6), (7) καὶ (8), τὸ σύστημα $U_{i_1} f = 0 \ (i_1 = 1, \ldots n)$, εἶναι πλῆρες καὶ τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμά του, n διαστάσεων, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον πλῆρες ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως (1).

RÉSUMÉ

M. Tsortsis a traité, dans sa thèse de l'Université de Paris, le problème de l'intégration d'une catégorie générale d'équations aux dérivées partielles du second et du troisième ordre à plusieurs variables indépendantes. L'objet de la présente Note est la recherche des intégrales complètes des équations aux dérivées partielles d'ordre a à une fonction inconnue de n variables indépendantes. La méthode employée est celle des faisceaux de transformations infinitésimales due à M. Vessiot.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Εἰς τὴν *Ἐπετηρίδα* τῶν ξένων εταίρων καὶ ἀντεπιστελλόντων μελῶν, σσ. 7 καὶ 8 τῶν ***Πρακτικῶν*** :

ἀντὶ HALLE GEORGE,

ἀνάγνωθι HALE GEORGE,

ἀντὶ V. GAERTRINGEN HILLER,

ἀνάγνωθι HILLER V. GAERTRINGEN FRIEDRICH.

ἀντὶ HAUPTMANN GERHARD,

ἀνάγνωθι HAUPTMANN GERHART.

K. A. Kς