Ὁ βαθμὸς θερμικῆς ἠπειρωτικότητος ὑπελογίσθη διὰ τοῦ τύπου Corczynski, ὡς ἐμφανίζοντος καλῶς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πλάτους. Ἐκ τῆς διανομῆς τοῦ βαθμοῦ θερμικῆς ἠπειρωτικότητος ἥτις δίδεται εἰς τὸν χάρτην 4 παρατηρεῖται ὅτι ἡ καμπύλη 44 % περιβάλλει τὴν μᾶλλον ὀρεινὴν περιοχὴν τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος, Μακεδονίας καὶ Θράκης, ἐνῶ τὰς ὀρεινὰς περιοχὰς τῆς Πελοποννήσου περικλείει ἡ καμπύλη 36 %. Εἰς τὴν παράκτιον ζώνην τῆς ἀνατολικῆς Ἑλλάδος, ὁ βαθμὸς ἠπειρωτικότητος εἶναι ἀνώτερος κατὰ 5-10 % τοῦ σημειουμένου εἰς τὴν παράκτιον ζώνην τῆς δυτικῆς Ἑλλάδος, ἔτι δὲ ἀνώτερος εἶναι εἰς τὴν παράκτιον ζώνην τῆς ἀνατολικῆς Μακεδονίας καὶ Θράκης.

Ἡ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ βαθμοῦ θερμικῆς ἠπειρωτικότητος κατάταξις τῶν περιοχῶν τῆς Ἑλλάδος, ἐγένετο οὐχὶ διὰ τῆς ὑπὸ τοῦ Gorczynski ἐφαρμοζομένης κλίμακος ἀλλὰ δι' ἑτέρας προσαρμοζομένης τελείως καὶ πρὸς τὴν ἀντίστοιχον κλίμακα τοῦ ἐτησίου εὔρους θερμοκρασίας. Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν νέαν ταύτην κλίμακα, ἀνὰ τὴν κεντρικὴν ὀρεινὴν Στερεὰν Ἑλλάδα, τὴν Θεσσαλίαν, τὴν Μακεδονίαν καὶ τὴν ἐνδόχωραν τῆς Θράκης, ὁ βαθμὸς θερμικῆς ἠπειρωτικότητος πλησιάζει τὰς πρώτας βαθμίδας τοῦ *ἠπειρωτικοῦ τύπου*, κατὰ δὲ τὴν λοιπὴν χώραν ἐπικρατεῖ ὁ τύπος τοῦ *θαλασσίου μεταβατικοῦ* κλίματος, πλὴν σημείων τινῶν τοῦ νοτίου Αἰγαίου, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ τιμαὶ τοῦ βαθμοῦ θερμικῆς ἠπειρωτικότητος μόλις πλησιάζουν τὸν *θαλάσσιον* τύπον.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—**Remarques sur les lignes de courbure***, *par* ***René Guigue.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

I.— La lecture d'une communication de M. *D. Mitrinovitch* à l'Académie d'Athènes[1] m'a suggéré un certain nombre de remarques que je crois de nature à intéreseer les lecteurs de cet intéressant travail.

Elles concernent le second des problèmes de M. *D. Mitrinovitch* que l'on peut énoncer ainsi:

Déterminer les surfaces dont les deux systèmes de lignes de courbure se projettent sur le plan x o y *suivant deux familles de courbes orthogonales.*

Je le considérerai comme un cas particulier du problème plus général qui suit:

Déterminer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour lesquelles les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces intégrales.

1° Exprimons d'abord que les deux familles de caractéristiques d'une équation linéaire du second ordre

* RENÉ GUIGUE.— Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.

[1] *Praktika de l'Académie d'Athènes*, **10**, 1935, p. 480.

$$Ar + 2Bs + Ct = H \tag{1}$$

sont orthogonales; r, s, t ont les significations habituelles

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Si l'on désigne par α et β les deux racines de l'équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \tag{2}$$

on a:

$$\alpha + \beta = 2\frac{B}{A}, \quad \alpha\beta = \frac{C}{A}. \tag{3}$$

Nous voulons que les deux directions $1, \alpha, p + \alpha q$ et $1, \beta, p + \beta q$ soient orthogonales, ce qui exige

$$1 + \alpha\beta + (p + \alpha q)(p + \beta q) = 0$$

ou, après quelques calculs

$$A(1 + p^2) + 2Bpq + C(1 + q^2) = 0. \tag{4}$$

2° Cherchons maintenant la condition pour que les caractéristiques de (1) forment un système conjugué sur les surfaces intégrales.

Soient dx, dy et δx, δy les deux caractéristiques. On doit avoir

$$r\,dx\,\delta x + s(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y = 0$$

ou

$$r + s(\alpha + \beta) + t\alpha\beta = 0$$

ou encore, en tenant compte de (3)

$$Ar + 2Bs + Ct = 0. \tag{1'}$$

La condition cherchée est donc que le second membre H de (1) soit identiquement nul.

En résumé, par combinaison des deux résultats précédents, on peut énoncer le théorème suivant:

Les caractéristiques de l'équation

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \tag{1'}$$

où A, B, C *vérifient la rélation*

$$A(1 + p^2) + 2Bpq + C(1 + q^2) = 0 \tag{4}$$

sont lignes de courbure pour chaque surface intégrale.

II. — Donnons quelques exemples.

Premier exemple.—Prenons pour B la valeur 0, pour A la valeur $1 + q^2$ et pour C la valeur $-(1 + p^2)$. La condition (4) est alors satisfaite et l'équation (1′) s'écrit

$$(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t = 0. \tag{5}$$

Nous n'intégrerons pas cette équation. Nous nous contenterons de rappeler qu'on peut la ramener à la forme

$$2(x + y)\,s - (p + q) = 0$$

par une transformation de contact.

Ses caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1 + d^2}{1 + q^2}}\,.$$

Vérifions sur une surface intégrale particulière de (5) qu'elles sont des lignes de courbure.

On verra aisément que (5) admet la solution

$$z = \log\cos x + \log\cos y. \tag{6}$$

L'équation des lignes de courbure

$$\left[s(1 + q^2) - p\,q\,t\right]dy^2 + \left[r(1 + q^2) - t\,(1 + p^2)\right]dx\,dy + \left[p\,q\,r - (1 + p^2)\right]dx^2 = 0 \tag{C}$$

devient ici, compte tenu de (5)

$$t\,dy^2 - r\,dx^2 = 0,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1 + p^2}{1 + q^2}}$$

qui est aussi, comme on l'a vu, celle des caractéristiques.

En tenant compte des valeurs de p et q on trouve pour équations en termes finis des lignes de courbure de la surface (6)

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = C\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = C\cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right.$$

Pour une étude détaillée de la surface (6) on pourra consulter *Tisserand*[1].

[1] TISSERAND, Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, p. 347

Second exemple.— Prenons $A = -C = pq$; alors $2B = q^2 - p^2$ si l'on veut que (4) soit vérifiée. L'équation (1′) devient

$$pqr + (q^2 - p^2)s - pqt = 0 \tag{7}$$

Les équations des caractéristiques de (7) sont

$$\begin{cases} pq\,dy^2 - (q^2 - p^2)\,dx\,dy - pq\,dx^2 = 0 \\ dp\,dy = dq\,dx \end{cases}$$

La première donne pour $\frac{dy}{dx}$ les deux valeurs $-\frac{p}{q}$ et $\frac{q}{p}$.

Donc le premier système de caractéristiques est défini par les deux équations

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0, \qquad dp\,dy = dq\,dx$$

et le second par

$$p\,dy = q\,dx, \qquad dp\,dy = dq\,dx.$$

Le premier système de caractéristiques admet les deux combinaisons intégrales

$$dz = 0, \qquad p\,dp + q\,dq = 0$$

d'où

$$z = \alpha \qquad p^2 + q^2 = \beta$$

et en posant $\beta = \varphi(\alpha)$ ou α l'intégrale intermédiaire

$$p^2 + q^2 = \varphi(z) \tag{8}$$

qui admet l'intégrale complète

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2}\; y + b.$$

Ce premier système de caractéristiques (donc de lignes de courbure des surfaces intégrales) est situé dans des plans parallèles au plan xoy, ce qui nous laisse prévoir en particulier les solutions constituées par les surfaces de révolution autour de oz (ce que l'on vérifiée d'ailleurs sans peine).

L'équation (7) de notre texte n'est autre que l'équation (5), de M. *D. Mitrinovitch*[1].

Citons quelques cas particuliers de surfaces qui sont solutions de (8) et par suite de (7).

1° Les surfaces de révolution autour de oz, déjà citées.

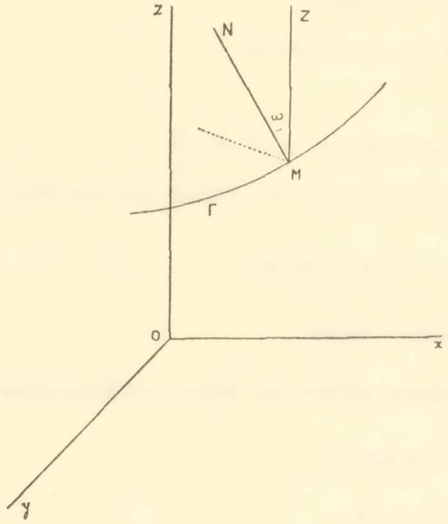
2° Les cylindres d'axe ox, ou d'axe oy.

3° Les *surfaces à pente constante* pour lesquelles $p^2 + q^2 = k^2$, k désignant

[1] *Praktika de l'Académie d'Athènes*, **10**, 1935, p. 482.

une constante. Ces surfaces sont développables, donc un système de lignes de courbure est constitué par les génératrices rectilignes de ces surfaces.

Au sujet de surfaces intégrales de l'équation (8) nous ferons une intéressante remarque géométrique. La quantité $p^2 + q^2$ vaut $tg^2\omega$, en désignant par ω l'angle de la normale à la surface et de l'axe oz. Par conséquant la relation



$$p^2 + q^2 = \varphi(z)$$

exprime que l'angle ω garde la même valeur tout le long de la section Γ de la surface par un plan perpendiculaire à oz (ligne de niveau). On retrouve le fait que Γ est ligne de courbure comme conséquence du théorème de *Joachimsthal* puisque le plan $z = Cte$ coupe la surface sous un angle constant.

L'équation (7) est l'équation des *Surfaces Moulures*.

On montre qu'on obtient une Surface Moulure quand on cherche à déterminer une surface sur laquelle un point pesant doit être assujetti à rester pour que, si on l'abandonne sans vitesse en un point quelconque de cette surface il glisse suivant une ligne de plus grande pente.

Il est d'ailleurs possible de donner une *solution pûrement géométrique du problème de M. D. Mitrinovitch.*

M désignant un point quelconque de la surface on veut que l'angle droit formé par les directions principales MT, MT′ se projette sur le plan xoy suivant un angle droit. Pour cela il faut et il suffit que l'une des tangentes principales MT soit parallèle au plan xoy et l'on obtient ainsi un premier système de lignes de courbure constitué par les courbes de niveaux $z = cte$, pnisqu'une courbe dont les tangentes sont parallèles à un plan fixe est une courbe plane. Si l'on fait maintenant la représentation sphérique de la surface, le théorème de *Joachimsthal* nous indique que les lignes de courbure de ce premier système sont représentées sur la sphère par une famille de cercles parallèles, de pôles P et P′, la droite PP′ étant parallèle à oz. Par suite les lignes de courbure du second système ont pour représentation les grands cercles passant par P et P′. Ces dernieres sont donc des courbes planes situées dans des plans parallèles à oz, de plus elles sont égales, et la surface est par conséquent engendrée par une courbe plane située dans un plan qui roule sans glisser sur un cylindre d'axe oz. On retrouve la définition classique des *Surfaces Moulures.*

On constate de plus que les lignes de courbure du second système sont aussi lignes géodésiques puisque leur plan osculateur contient la parallèle MZ à oz et par suite que leur normale principale est la normale MN à la surface.

Troisième exemple.— On peut rapprocher de l'équation (7) qui fait l'objet de l'exercice précédent la suivante

$$(1+q^2)s - pqt = 0.$$

Ici encore la condition (4) est vérifié. Cette équation exprime que les section de la surface intégrale par les plans parallèles au plan $x=0$ sont des lignes de courbure. Elle est étudiée dans le Cours d'Analyse de M. *E. Goursat,* t. III, p. 69. L'intégrale générale est représentée par le système de deux équations

$$\begin{cases} z = \sqrt{1+\alpha^2}\,f(x) + \alpha y + \varphi(\alpha) \\ o = y + \varphi'(\alpha) + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,f(x) \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer y et z en fonction de x et du paramètre auxiliaire α.

Quatrième et cinquième exemples.— Nous terminerons par quelques brèves indications sur deux problèmes qui conduisent à des équations aux dérivées partielles de la forme (1') telles que la condition (4) soit satisfaite.

Premier problème. — Déterminer les surfaces dont un système de lignes de courbure se trouve dans des plans passant par une même droite oz.

Second problème.— Déterminer les surfaces qui admettent un système de lignes des courbure sur des cylindres circulaires coaxiaux (d'axe oz*).*

Dans le premier problème on doit avoir

$$y = \alpha x, \quad dy = \alpha\, dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

En remplaçant dx par x et dy par y dans l'équation (C) des lignes de courbure on est conduit à l'équation

$$x\left[y(1+q^2)+pqx\right]r + \left[y^2(1+q^2) - x^2(1+p^2)\right]s - y\left[x(1+p^2)+pqy\right]t = 0.$$

On constate aisément que la condition (4) est vérifiée. On verra de même que le second problème conduit à l'équation

$$y\left[pqy-(1+q^2)x\right]r+\left[(1+q^2)x^2-(1+p^2)y^2\right]s-x\left[pqx-(1+p^2)y\right]t=0$$

pour laquelle la condition (4) est encore satisfaite.

Malgré l'intérêt incontestable de ces deux problèmes nous n'en développerons pas la solution complète, car cela nous entrainerait trop loin. Nous nous contenterons de signaler que le second est l'extension aux lignes de courbure du problème suivant, étudié pour la première fois par *Bianchi.*

Déterminer les surfaces qui admettent un système de lignes asymptotiques situé sur des cylindres coaxiaux. (On est conduit à une équation du second ordre dont l'intégration se ramène à celle de *l'équation de la Chaleur*).

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ συγγραφεὺς λαβὼν ἀφορμὴν ἐκ τῆς ἀνακοινώσεως τοῦ Dr. Mitrinovitch (τῆς 12 Δεκεμβρίου 1935), ἰδίως τοῦ δευτέρου μέρους αὐτῆς συνισταμένου εἰς τὸ νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁποίων τὰ δύο συστήματα τῶν γραμμῶν καμπυλότητος προβάλλονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου x o y κατὰ δύο οἰκογενείας ὀρθογωνίων γραμμῶν, ἀνάγει τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ γενικώτερον πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους γραμμικὰς τῆς β′ τάξεως, τῶν ὁποίων τὰ δύο συστήματα τῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι γραμμαὶ καμπυλότητος διὰ τὰς ἀρχικὰς (integrales) ἐπιφανείας. Ὁ συγγραφεὺς δίδει τὴν λύσιν τοῦ γενικοῦ τούτου προβλήματος, ἀναπτύσσει δὲ μετὰ ταῦτα ἐφαρμογάς τινας· τὸ ζήτημα δὲ τοῦ κ. Mitrinovitch, τοῦ ὁποίου ὁ κ. Guigue παρέχει καὶ λύσιν γεωμετρικήν, ἀποτελεῖ τὴν δευτέραν τῶν ἐφαρμογῶν τούτων. Ἄξιαι ἰδιαιτέρας μνείας εἶναι ἡ τετάρτη καὶ πέμπτη ἐφαρμογαὶ ἔχουσαι οὕτως:

Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁποίων ἓν σύστημα γραμμῶν καμπυλότητος εὑρίσκεται ἐπὶ ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας OZ.

Νὰ προσδιορισθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι αἵτινες δέχονται σύστημα γραμμῶν καμπυλότητος ἐπὶ κυλίνδρων ἐκ περιστροφῆς ὁμοαξονικῶν.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— Remarque sur les surfaces de translation*, ***par Dragoslav S. Mitrinovitch.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

I.— La détermination des courbes situées sur la surface

$$z=F(x,y), \tag{1}$$

dont l'arc est une fonction donnée des coordonnées x, y, z, à savoir,

$$s=\varphi(x,y,z)$$

* DRAGOSLAV S. MITRINOVITCH.— Παρατήρησις ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν μεταβάσεως.