ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΕΝ ΤΩ ΛΟΓΙΣΜΩ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

(Β' ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ)

ΥΠΟ **ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ**

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Γεωργ. Ρεμούνδου)

Διὰ προηγουμένου σημειώματος ἡμῶν ἀνακοινωθέντος εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἐδώκαμεν μεταξὺ ἄλλων ἀναγκαίας τινὰς συνθήκας, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$J = \int_{s_1}^{s_2} F(x, y, \vartheta)\, ds \tag{1}$$

μὲ τὰς γενομένας προϋποθέσεις διὰ τὴν συνάρτησιν F λαμβάνῃ τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμὴν κατὰ μῆκος τῆς μὴ συνεχοῦς καμπύλης $P_1\ P_0\ \overline{P}_0\ P_2$,

$$(2)\qquad \begin{aligned} x&=x(s) \\ y&=y(s) \end{aligned} \left|\begin{aligned} &= x_0(s), \\ &= y_0(s), \end{aligned}\right. \text{ διὰ } s_1 \leqq s < s_0, \quad \begin{aligned} &= \overline{x}_0(s) \\ &= \overline{y}_0(s) \end{aligned} \text{ διὰ } s_0 < s \leqq s_2, \qquad (2')$$

τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα θραύσεως P_0, $\overline{P}_0$ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y. Κατωτέρω δίδομεν μίαν ἀναγκαίαν συνθήκην διὰ τὴν ὕπαρξιν ἐλαχίστου τοῦ (1) καὶ ἐξετάζομεν τὸ δυνατὸν τῆς ὑπάρξεως πεδίου ἐκ μὴ συνεχῶν λύσεων.

α') Θεωροῦντες τὸ ὁλοκλήρωμα (1) κατὰ μῆκος τῆς μὴ συνεχοῦς καμπύλης $P_1\ P\ \overline{P}\ P_2$, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν χωριστῶν τόξων $P_1\ P$ καὶ $\overline{P}\ P_2$, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν πρῶτον προκύπτει διὰ προεκτάσεως τοῦ τόξου $P_1\ P_0$ κατὰ τὸ $P_0\ P$, τὸ δὲ δεύτερον δι' ἐπιβραχύνσεως τοῦ $\overline{P}_0\ P_2$ κατὰ τὸ $\overline{P}_0\ \overline{P}$, ἐνῷ τὰ σημεῖα θραύσεως P, $\overline{P}$ κεῖνται ἐντὸς κύκλων, γραφομένων μὲ κέντρα τὰ P_0 καὶ $\overline{P}_0$ ἀντιστοίχως καὶ μὲ ἀκτῖνα ε, ἔχομεν.

$$J(s) = \int_{s_1}^{s} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0)\, ds + \int_{s}^{s_2} F(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{x}'_0, \overline{y}'_0)\, ds.$$

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις αὕτη λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην αὐτῆς τιμὴν διὰ $s=s_0$, θὰ εἶναι

$$J'(s_0) = 0, \qquad J''(s_0) \geqq 0,$$

ἐνῷ τὰ $J'(s_0)$ καὶ $J''(s_0)$ παριστάνουν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν παράγωγον τῆς $J(s)$ διὰ $s=s_0$. Πράγματι εἶναι

$$J'(s) = F(x_0, y_0, \vartheta_0) - F(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}_0) = 0,$$

ἕνεκα τῶν:

$$F_{x'}(x_0, y_0, \vartheta_0) = 0, \quad F_{y'}(x_0, y_0, \vartheta_0) = 0,$$

$$F_{x'}(x_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}_0) = 0, \quad F_{y'}(x_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}_0) = 0.$$

Ὑπολογίζοντες τὴν $J''(s)$ καὶ θέτοντες ἀκολούθως $s = s_0$, εὑρίσκομεν τὴν συνθήκην:

$$F_x(x_0, y_0, \vartheta_0)x'_0 + F_y(x_0, y_0, \vartheta_0)y'_0 - F_x(x_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}_0)x'_0 - F_y(x_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}_0)\overline{y}'_0 \geqq 0,$$

ἢ τήν: $$F_x p_0 + F_y q_0 - \overline{F}_x \overline{p}_0 - \overline{F}_y \overline{q}_0 \leqq 0,$$

ἐνῷ εἶναι: $$p = \text{συν}\vartheta, \quad q = \eta\mu\vartheta, \quad \overline{p} = \text{συν}\overline{\vartheta}, \quad \overline{q} = \eta\mu\overline{\vartheta},$$

καὶ ἥτις συνθήκη πρέπει νὰ πληροῦται εἰς τὰ σημεῖα θραύσεως P_0 καὶ $\overline{P}_0$.

β′) Ἵνα δείξωμεν ὅτι διὰ τῶν καμπύλων

$$x = \lambda(s, a), \qquad y = \mu(s, a),$$

τὰς ὁποίας ἐδώκαμεν εἰς τὸ προηγούμενον ἡμῶν σημείωμα (ε′), τὸ ἐπίπεδον θὰ καλυφθῇ *ἁπλῶς καὶ τελείως* ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου P_0, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ὁρίζουσα:

$$\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(s, a)} \tag{3}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς διὰ $s = s_0$ καὶ $a = a_0$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν ὁρίζουσαν:

$$\frac{d(X - x, \Psi - y, F_{x'}, F_{y'}, \overline{F}_x, \overline{F}_{y'})}{\partial(s, a, b, \overline{b}, \vartheta, \overline{\vartheta})} \tag{4}$$

τῶν ἐξισώσεων:

$$x = X(s, a, b, \vartheta), \quad y = \Psi(s, a, b, \vartheta),$$

$$F_{x'}(a, b, \vartheta) = 0, \quad F_{y'}(a, b, \vartheta) = 0,$$

$$F_{x'}(a, \overline{b}, \overline{\vartheta}) = 0, \quad F_{y'}(a, \overline{b}, \overline{\vartheta}) = 0.$$

Ἡ ὁρίζουσα (4) τίθενται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{vmatrix} \lambda_s & \lambda_a \\ \mu_s & \mu_a \end{vmatrix} \times D_{y\overline{y}\vartheta\overline{\vartheta}}, \tag{5}$$

ὅπου ὁ δεύτερος τῶν δύο τούτων παραγόντων παριστάνει τὴν ὁρίζουσαν

$$\frac{\partial(F_{x'}, F_y, \overline{F}_x, \overline{F}_{y'})}{\partial(b, \overline{b}, \vartheta, \overline{\vartheta})}.$$

Ἐκ τῆς μορφῆς (5) ἕπεται ὅτι ἡ (3) δύναται νὰ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ s διὰ τὰς ὁποίας μηδενίζεται καὶ ἡ (4). Ἀλλ' αὕτη διὰ $s = s_0$ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{-(p_0 F_x + q_0 F_y)}{F_y},$$

ἐνῷ τὰ F_x, F_y, $F_{x'x}, \ldots, \overline{F}_{x'x}, \ldots$ παριστάνουν τὰς τιμὰς αὐτῶν διὰ $s = s_0$.

Ἀλλ' εἶναι: $$(p F_x + q F_y)_{P_0} \neq 0,$$

ἐπειδὴ ὑποθέτομεν ὅτι ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν γράφει τὸ ἓν σημεῖον θραύσεως: $y = \psi(x)$ τέμνει τὴν καμπύλην (2) χωρὶς νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν, προκειμένου διὰ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ $\overline{P}_0 P_2$, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\overline{x} = \overline{X}(s, a, \overline{b}, \overline{\vartheta}), \quad \overline{y} = \overline{\Psi}(s, a, \overline{b}, \overline{\vartheta}),$$

καὶ τὴν ὁρίζουσαν $(\overline{4})$ ἀντίστοιχον τῆς (4), ἀντικαταστήσωμεν δὲ τὰ λ καὶ μ διὰ τῶν $\overline{\lambda}$ καὶ $\overline{\mu}$, ὅτε καταντῶμεν εἰς τήν:

$$(\overline{p}\,\overline{F}_x + \overline{q}\,\overline{F}_y)_{\overline{P}_0} \neq 0,$$

ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως ὅτι καὶ ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν γράφει τὸ ἄλλο σημεῖον θραύσεως: $\overline{y} = \overline{\psi}(x)$ τέμνει τὴν (2) χωρὶς νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς. Ἐὰν τώρα s_1 καὶ s_2 εἶναι δύο τιμαὶ τῆς s, τῶν ὁποίων αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ ἐκλέγονται τόσῳ μικραί, ὥστε ἡ ὁρίζουσα (4) ἀφ' ἑνὸς καὶ ἡ $(\overline{4})$ ἀφ' ἑτέρου νὰ μὴ μηδενίζωνται δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ s, κειμένην ἐν τῷ διαστήματι $s_1 \leqq s \leqq s_0$ καὶ $s_0 \leqq s \leqq s_2$, ὁρίζομεν τὰ σημεῖα P_1 καὶ P_2 διὰ τῶν συντεταγμένων αὐτῶν:

$$x_1 = \lambda(s_1, a_0), \quad y_1 = \mu(s_1, a_0),$$
$$x_2 = \overline{\lambda}(s_2, a_0), \quad y_2 = \overline{\mu}(s_2, a_0),$$

καὶ δυνάμεθα νὰ περιβάλωμεν τὰ τόξα $P_1 P_0$ καὶ τὸ $\overline{P}_0 P_2$ διὰ περιοχῶν ἁπλῶν καὶ συνεχῶν, ἀλλὰ μὴ συνεχομένων πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἵτινες ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέρους περιορίζονται ὑπὸ τῆς καμπύλης $y = \psi(x)$ καὶ ἀντιστοίχως ὑπὸ τῆς $\overline{y} = \overline{\psi}(x)$ τῶν γραμμῶν τῶν σημείων θραύσεως, καὶ ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ἡ ὁρίζουσα (4) καὶ $(\overline{4})$ ἀντοιστοίχως εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Αἱ περιοχαὶ αὗται δύνανται νὰ καλυφθοῦν ἁπλῶς καὶ πλήρως διὰ τόξων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς λύσεις τοῦ θεωρουμένου προβλήματος καὶ περατοῦνται εἰς τὰς ἀντιστοίχους καμπύλας τῶν σημείων θραύσεως. Οὕτω δύναταί τις νὰ συγκρίνῃ τὸ ὁλοκλήρωμα (1), κατὰ μῆκος τῆς (2) λαμβανόμενον, μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο λαμβανόμενον κατὰ μῆκος τυχούσης μὴ συνεχοῦς καμπύλης, ἐχούσης δύο σημεῖα θραύσεως, διερχομένης διὰ τῶν ἄκρων σημείων P_1 καὶ P_2 καὶ τῆς ὁποίας τὰ δύο τόξα κεῖνται ἐντὸς τῆς πρώτης καὶ δευτέρας περιοχῆς, ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται τὸ πεδίον τῶν μὴ συνεχῶν λύσεων.

γ') Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὕπαρξις τῶν σημείων θραύσεως P_0, $\overline{P}_0$ δὲν μεταβάλλει τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως E τοῦ *Weierstrass*, οὕτω δὲ ἡ σχετικὴ θεωρία διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν, εὑρίσκομεν δὲ ὅτι θὰ εἶναι:

$$E(x_0, y_0, \vartheta, \boldsymbol{\theta}) \geqq 0, \quad E(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{\vartheta}, \boldsymbol{\theta}) \geqq 0,$$

ἐνῷ θ παριστάνει τὴν γωνίαν τῆς ἐφαπτομένης καμπύλης τινὸς **C**, ἥτις εἶναι τῆς τάξεως C′ καὶ ἥτις τέμνει τὴν (2), πρὸς δὲ εἶναι:

$$E(x_0,y_0,\vartheta,\theta)=\mathbf{p}[F_x(x_0,y_0,\theta)-F_{x'}(x_0,y_0,\vartheta)]+\mathbf{q}[F_{y'}(x_0,y_0,\theta)-F_{y'}(x_0,y_0,\vartheta)]$$

$$E(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{\vartheta},\theta)=\mathbf{p}[F_{x'}(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\theta)-F_{x'}(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{\vartheta})]+\mathbf{q}[F_{y'}(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\theta)-F_{y}(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{\vartheta})].$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας τεθῇ $s=s_0$, εὑρίσκομεν:

$$\mathbf{p}\,F_x\,(x_0,y_0,\theta_0)+\mathbf{q}\,F_{y'}\,(x_0,y_0,\theta_0)\geqq 0,$$

$$\mathbf{p}\,F_{x'}(x_0,\overline{y}_0,\theta_0)+\mathbf{q}\,F_{y'}(x_0,\overline{y}_0,\theta_0)\geqq 0,$$

ἢ ἕνεκα τῆς ἰδιότητος τῆς ὁμογενείας τῆς συναρτήσεως F:

$$F(x_0,y_0,\theta_0)\geqq F(x_0,y_0,\vartheta_0),$$

$$F(x_0,\overline{y}_0,\theta_0)\geqq F(x_0,\overline{y}_0,\overline{\vartheta}_0).$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι «*διὰ τὸ ἐλάχιστον τοῦ ὁλοκληρώματος* (1) *εἶναι ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ συναρτήσεις* F $(x_0,\ y_0,\ \theta)$, F $(x_0,\ \overline{y}_0,\ \theta)$ *διὰ* $\theta=\vartheta_0$ *καὶ* $\theta=\overline{\vartheta}_0$ *λαμβάνουν τὰς ἀπολύτως ἐλαχίστας αὐτῶν τιμάς*».

δ′) Ὡς πρὸς τὰ συζυγῆ σημεῖα καὶ τὰ ἑστιακὰ τοιαῦτα παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Δεχόμεθα ὅτι τὰ σημεῖα P'_0 $(s=s'_0)$ καὶ $\overline{P}'_0$ $(s=\overline{s}'_0)$ εἶναι συζυγῆ τοῦ P_0 καὶ $\overline{P}_0$ ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων τόξων τῆς λύσεως $P_1\ P_0\ \overline{P}_0\ P_2$, ἐνῷ εἶναι:

$$s'_0<s_1<s_0, \qquad s_0<s_2<\overline{s}'_0,$$

καὶ ἔστω Q $(s=\tau)$ τὸ πρῶτον ἑστιακὸν σημεῖον τὸ κείμενον πρὸ τοῦ P_0 ἐπὶ τῆς καμπύλης $P_1\ P_0$ καὶ μάλιστα μεταξὺ τῶν P'_0 καὶ P_0. Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ταύτῃ ὑπάρχει καὶ σημεῖον $\overline{Q}$ $(\overline{s}=\overline{\tau})$ ἑστιακὸν ἐπὶ τῆς καμπύλης $\overline{P}_0\ P_2$ καὶ μάλιστα κεῖται τοῦτο μεταξὺ τῶν $\overline{P}_0$ καὶ $\overline{P}'_0$. Τίθεται τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

«*Πῶς κινεῖται ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον θραύσεως* P_0 *εἰς τὸ σημεῖον* P_0, *ὅταν τὸ ἑστιακὸν σημεῖον* Q *διατρέχῃ συνεχῶς τὸ τόξον* $P'_0\ P_0$ *ἀπὸ τοῦ σημείου* P'_0 *μέχρι τοῦ* P_0, *καὶ πῶς σχετίζεται αὕτη μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης γραμμῆς, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον θραύσεως* $\overline{P}_0$;»

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐλύσαμεν ὁριστικῶς, ἐν τούτοις φαίνεται λίαν πιθανὸν ὅτι συμβαίνει τὸ ἑξῆς, ἐν μέρει ἀνάλογον πρὸς ὅ,τι συμβαίνει διὰ τὰς γωνιωδῶς ἀσυνεχεῖς λύσεις τοῦ προβλήματος τοῦ λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν.

«*Ἐὰν τὸ σημεῖον* Q *διατρέχῃ συνεχῶς τὸ τόξον* $P'_0\ P_0$ *ἐκ τοῦ σημείου* P'_0 *ἀναχωροῦν καὶ φθάνον εἰς τὸ* P_0, *ἡ ἐφαπτομένη τῆς πρώτης καμπύλης τῶν σημείων θραύσεως εἰς τὸ σημεῖον* P_0 *στρέφεται περὶ αὐτὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ* x y *κατὰ γωνίαν* π, *ἀναχωροῦσα ἐκ τῆς ἀρχικῆς θέσεως αὐτῆς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ γωνία ἔστω ἡ*

ϑ_0 καὶ ἐπανερχομένη εἰς ταύτην. Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν λαμβάνει μίαν φορὰν θέσιν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἄλλης καμπύλης τῶν σημείων θραύσεως εἰς τὸ $\overline{P}_0$. Ἔστω e_0 ἡ τιμὴ τοῦ τ εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τοῦτο καὶ E_0 τὸ ἀντίστοιχον εἰς τὴν τιμὴν ταύτην σημεῖον τοῦ τόξου P_1 P_0. Ὅταν τὸ σημεῖον Q κινῆται ἐπὶ τοῦ τόξου P'_0 P_0 ἀπὸ τοῦ σημείου P'_0 πρὸς τὸ E_0, ἡ ἐφαπτομένη τῆς πρώτης γραμμῆς τῶν σημείων θραύσεως στρέφεται καὶ τὸ $\overline{Q}$ συζυγὲς ἑστιακὸν σημεῖον τοῦ Q κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\overline{P}_0$ P_2 συνεχῶς καὶ διαγράφει τὸ τόξον $\overline{E}_0$ $\overline{P}'_0$. Ὅταν τὸ πρῶτον κινητὸν διαγράφῃ τὸ τόξον E_0 P_0 τὸ συζυγὲς ἑστιακὸν τούτου γράφει τὸ τόξον $\overline{P}_0$ $\overline{E}_0$, ἀντιστοιχεῖ δηλαδὴ **ἅλμα** *διὰ τὸ δεύτερον κινητὸν εἰς τὸ σημεῖον $\overline{P}'_0$, ἐνῷ τὸ σημεῖον $\overline{E}_0$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\overline{\tau} = \overline{e}_0$, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐφαπτομένη τῆς δευτέρας καμπύλης τῶν σημείων θραύσεως εἰς τὸ P_0 λαμβάνει θέσιν κατὰ τὴν στροφὴν αὐτῆς ἐν τῷ x y καὶ περὶ τὸ σημεῖο $\overline{P}_0$ παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ P_0 τῆς πρώτης καμπύλης τῶν σημείων θραύσεως. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν κίνησιν ἐπὶ τοῦ τόξου P_1 P_0, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν συνεχῆ κίνησιν τοῦ $\overline{Q}$ ἀπὸ τοῦ σημείου $\overline{P}'_0$ μέχρι τοῦ $\overline{P}_0$, ὅταν διέρχεται διὰ τοῦ $\overline{E}_0$ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην· Οὕτω τὰ σημεῖα θραύσεως P_0 καὶ $\overline{P}_0$ καὶ τὰ P'_0, $\overline{P}'_0$ εἶναι καὶ σημεῖα ἅλματος τῆς κινήσεως, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν συνεχῆ κίνησιν τοῦ Q ἀπὸ τοῦ P'_0 μέχρι τοῦ P_0 (διὰ τὰ $\overline{P}_0$ καὶ $\overline{P}'_0$) καὶ τὴν τοῦ $\overline{Q}$ ἀπὸ τοῦ $\overline{P}_0'$ μέχρι τοῦ $\overline{P}_0$ (διὰ τὰ P'_0 καὶ P_0)».*

ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΟΥ "ΝΟΜΟΥ ΑΡΑΙΩΣΕΩΣ„ ΤΟΥ OSTWALD ΔΙ' ΟΡΓΑΝΙΚΑ ΤΙΝΑ ΟΞΕΑ ΕΙΣ ΜΙΓΜΑΤΑ ΥΔΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΙΘΥΛΙΚΟΥ ΠΝΕΥΜΑΤΟΣ

ΥΠΟ **Δ. ΤΣΑΜΑΔΟΥ**

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Βουρνάζου)

Ἐπὶ τοῦ ζητήματος τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ «νόμου ἀραιώσεως» τοῦ OSTWALD εἰς τὴν περίπτωσιν διαλυμάτων ἀσθενῶν ἠλεκτρολύτων ἰδίᾳ δὲ ὀργανικῶν ὀξέων ἐν μίγμασιν ὕδατος καὶ αἰθυλικοῦ πνεύματος, ἠσχολήθησαν διάφοροι κατὰ καιροὺς ἐρευνηταί, καταλήξαντες εἰς συμπεράσματα ἀντιφατικά.

Ἡ διαφωνία αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ βαθμὸς ἰονισμοῦ α τῶν ὀργανικῶν ὀξέων εἰς οἰνοπνευματικὰ διαλύματα δὲν ἔχει εἰσέτι προσδιορισθῇ μετὰ πάσης ἀκριβείας.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ βαθμοῦ ἰονισμοῦ α γνωρίζομεν πολλὰς μεθόδους, ἡ μόνη ὅμως μέθοδος δι' ἧς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἔχωμεν σχετικῶς σαφεῖς καὶ ἀκριβεῖς