ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 29ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1988

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΜΕΡΙΚΑ

ΚΟΡΥΦΑΙΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ Κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι.

Κατὰ τὰ τέλη τοῦ 19ου αἰώνα (εἶναι δύσκολο νὰ προσδιορισθεῖ τὸ ἔτος) ἡ γῆ στὴ Δυτικὴ Εὐρώπη σείσθηκε πολὺ ἔντονα. Ἂν κανεὶς εἶχε σκεφθεῖ τότε νὰ βάλει τὸ αὐτί του στὸ ἔδαφος, θὰ ἄκουγε μιὰ ὑποχθόνια βοερὴ φωνή, ποὺ προερχόταν ἀπὸ μακριά, ἀπὸ τὸ μνῆμα τοῦ Μεγάλου Πυθαγόρα, νὰ λέει σὲ ἄπταιστη ἀρχαία ἑλληνικὴ γλώσσα, περίπου τὰ ἑξῆς: Σᾶς τὸ εἶχα πεῖ πρὶν ἀπὸ 2000 χρόνια καὶ παραπάνω ὅτι, ὅλα ἐξαρτῶνται ἀπ' τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Ἐπέλεξα, Κυρίες καὶ Κύριοι, τὸν μᾶλλον δραματικὸ αὐτὸ τρόπο, γιὰ νὰ τονίσω μιὰ κορυφαία στιγμὴ στὰ Μαθηματικά, ἕνα γεγονὸς ὑψίστης σπουδαιότητας ποὺ συνέβη τὴν ἐποχὴ ἐκείνη. Πράγματι, ὕστερα ἀπὸ μακρὰ σειρὰ ἀξιοσημείωτων ἐρευνῶν, οἱ μαθηματικοὶ τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης ἀπέδειξαν, κατὰ τὰ τέλη τοῦ 19ου αἰώνα, ὅτι τὸ οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν εἶναι «συνεπὲς» ἐὰν τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (τῶν ἀκεραίων δηλαδὴ καὶ θετικῶν ἀριθμῶν: 1, 2, 3, ...ν,...) εἶναι «συνεπές». Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ ὑπενθυμίσομε ὅτι: ἕνα λογικὸ σύστημα (ὅπως π.χ. ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία, ἢ τὸ Σύστημα τῶν Φυσικῶν Ἀριθμῶν) λέγεται «συνεπὲς» ὅταν δὲν περιλαμβάνει ἀντινομίες, ὅταν δηλαδὴ καμμιὰ ἀπ' τὶς Προτάσεις τοῦ λογικοῦ συστήματος δὲν ἀντιφάσκει μὲ ἄλλη Πρότασή *του, πού σημαίνει ὅτι δοθεισῶν δύο Προτάσεων πού ἀντιφάσκουν μεταξύ τους ἡ μία τουλάχιστον δὲν ἐπιδέχεται ἀπόδειξη μέσα στὸ θεωρούμενο λογικὸ σύστημα.*

Ἀπέδειξαν λοιπὸν οἱ μαθηματικοὶ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ὅτι τὸ μέγα οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν μπορεῖ νὰ παρομοιασθεῖ μὲ μιὰ θεόρατη ἀνεστραμμένη πυραμίδα πού στηρίζεται καὶ ἰσορροπεῖ σὲ μιὰ μόνο κορυφή της, τὴν δὲ κορυφὴ αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ὅπως τόνισα καὶ παραπάνω τὸ ἐπίτευγμα αὐτὸ εἶναι ἄκρως ἐνδιαφέρον καὶ σπουδαῖο, καὶ ἀποτελεῖ σταθμὸ στὴν ἐξέλιξη τῶν Μαθηματικῶν.

Ἡ σημερινὴ ὁμιλία θὰ περιστραφεῖ γύρω ἀπ' τὸ θέμα αὐτὸ καθὼς καὶ ἄλλα παρεμφερῆ θέματα χωρὶς φυσικὰ νὰ ἐξαντλήσει κανένα ἀπ' αὐτά.

Ἡ ἀνακάλυψη τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ πού ἔγινε πρὸς τὸ τέλος τοῦ 17ου αἰώνα μ.Χ. ἀπὸ τοὺς Newton καὶ Leibniz καὶ ἡ πολυσχιδὴς δυνατότητα ἐφαρμογῆς τοῦ Λογισμοῦ αὐτοῦ, προκάλεσε τὸ ζωηρὸ ἐνδιαφέρον τῶν ἐρευνητῶν-μαθηματικῶν μὲ ἀποτέλεσμα νὰ δημοσιεύονται σωρεία ἐργασιῶν ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ ἀντικειμένου, χωρὶς ὅμως νὰ λαμβάνεται ὑπόψη ὅτι τὰ θεμέλια ἐπὶ τῶν ὁποίων στηριζόταν, τότε, ὁ Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς δὲν ἦταν καθόλου στερεὰ καὶ ἀσφαλῆ.

Ἡ κατάσταση αὐτὴ συνεχίσθηκε ἐπὶ μακρόν, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν δυσμενῶν κριτικῶν ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἀσθενεῖς βάσεις τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ συνεχῶς μεγάλωνε. Χαρακτηριστικὸ εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι καὶ οἱ δύο δημιουργοὶ τῆς θεωρίας, ὁ Newton καὶ ὁ Leibniz, δὲν ἦταν ἱκανοποιημένοι μὲ τὶς θεμελιώδεις ἀρχὲς ἐπὶ τῶν ὁποίων στηριζόταν τὸ δημιούργημά τους. Τὰ ἄτοπα καὶ τὰ παράδοξα πού παρετηροῦντο, διαρκῶς συσσωρεύονταν, μέχρι τῆς στιγμῆς πού ἔγινε πιὰ σαφὲς ὅτι τὰ Μαθηματικὰ περνοῦσαν μιὰ πολὺ σοβαρὴ κρίση, τὴ δεύτερη κρίση στὴ μακραίωνη ἱστορία τους.

Ἡ πρώτη, ὄντως φοβερή, κρίση πού πέρασαν τὰ Μαθηματικὰ ἀφοροῦσε καὶ αὐτὴ τὴ θεμελίωσή τους, καὶ παρουσιάσθηκε τὸν 5ο αἰώνα π.Χ. Αὐτὸ πού προκάλεσε τὴν κρίση ἦταν ἡ ἀπροσδόκητη ἀνακάλυψη ὅτι: δοθέντων δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν *(π.χ. δύο εὐθυγράμμων τμημάτων)* δὲν ὑπάρχει πάντα ἕνα τρίτο ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ μέγεθος πού μπορεῖ νὰ χρησιμεύσει ὡς κοινὴ μονάδα μετρήσεως τῶν δύο πρώτων. *Μὲ ἄλλα λόγια τὰ δύο πρῶτα μεγέθη μπορεῖ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα μεταξύ τους.*

Ἡ διαπίστωση αὐτὴ τῆς ὑπάρξεως ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ἀποτελεῖ τὴν ἀρχὴ τῆς ἀνακαλύψεως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καὶ φάνηκε νὰ ἐπιφέρει θανάσιμο πλῆγμα στὴν Πυθαγόρεια Φιλοσοφία: ὅτι ὅλα ἐξαρτῶνται ἀπ' τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Πῶς εἶναι δυνατὸν ἕνας ἄρρητος ἀριθμός, ὅπως ὁ $\sqrt{2}$ *νὰ ἐξαρτᾶται ἀπ' τοὺς ἀκεραίους ἀφοῦ αὐτὸς δὲν μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν;*

Ὁλόκληρη ὅμως ἡ Πυθαγόρειος Θεωρία ἡ ἀφορῶσα τὶς ἀναλογίες καὶ τὰ ὅμοια σχήματα, στηριζόταν ἐπάνω στὴν «διαισθητικὰ» προφανὴ ὑπόθεση ὅτι δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι σύμμετρα, ἡ δὲ ἀνακάλυψη τῆς ὑπάρξεως ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ὁδηγοῦσε μοιραίως στὴν ἀπόρριψη ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ ἀποδείξεων τῆς Πυθαγόρειας Γεωμετρίας.

Τόσο μεγάλη ἦταν ἡ κρίση ποὺ εἶχε ξεσπάσει στὰ θεμέλια τῶν Μαθηματικῶν, τόσο μεγάλο ἦταν τὸ «λογικὸ σκάνδαλο», ποὺ στὴν ἀρχὴ ἐπιχειρήθηκε τὸ πράγμα νὰ τηρηθεῖ μυστικό! Λέγεται μάλιστα ὅτι ὁ πυθαγόρειος Ἵππασος ὁ Μεταποντίνος πνίγηκε στὴ θάλασσα διότι ἀνευλαβῶς φερόμενος ἄφησε τὸ μυστικὸ νὰ διαρρεύσει, κατὰ ἄλλη δὲ ἐκδοχὴ ἐκδιώχθηκε ἀπὸ τὴν πυθαγόρεια κοινότητα, ἀνεγέρθη δὲ ἕνα μνῆμα γι' αὐτόν, σὰν νὰ εἶχε στὴν πραγματικότητα πεθάνει!

Ἡ πρώτη αὐτὴ κρίση τῶν Μαθηματικῶν λύθηκε γύρω στὸ 370 π.Χ. ἀπὸ τὸν λαμπρὸ Ἕλληνα μαθηματικὸ Εὔδοξο ὁ ὁποῖος ἦταν μαθητὴς τοῦ Πλάτωνα καὶ τοῦ Ἀρχύτα, ὁ ὁποῖος Ἀρχύτας ἦταν μαθητὴς τοῦ Πυθαγόρα. Ἡ νέα θεωρία, περὶ ἀναλογιῶν καὶ μεγεθῶν, τοῦ Εὐδόξου, ἡ ὁποία καὶ ἔθεσε τέρμα στὴν κρίση, ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα καὶ ὑπέροχα μαθηματικὰ ἀριστουργήματα ὅλων τῶν ἐποχῶν, μιὰ κορυφαία στιγμὴ στὰ Μαθηματικά. Ἂς ἐπανέλθομε ὅμως στὴ δεύτερη κρίση τῶν Μαθηματικῶν.

Ὅπως ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου, φάνηκε καθαρὰ ὅτι τὸ οἰκοδόμημα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως, τοῦ Ἀπειροστικοῦ δηλαδὴ Λογισμοῦ, στηριζόταν σὲ σαθρὲς βάσεις. Ὡς ἐκ τούτου ἦταν ἀναπόφευκτο, ἀργὰ ἢ γρήγορα, εὐσυνείδητοι μαθηματικοὶ νὰ ἀναλάβουν τὸ δύσκολο ἔργο τῆς δημιουργίας μιᾶς στερεᾶς βάσεως τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ.

Ἡ πρώτη προσπάθεια ἀντιμετωπίσεως τῆς δευτέρας αὐτῆς κρίσεως ὀφείλεται στὸν Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), ὁ ὁποῖος τὸ 1754 παρετήρησε ὅτι ἡ μέχρι τότε χρησιμοποιούμενη θεωρία τῶν ὁρίων ἔπρεπε νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ μιὰ θεωρία ποὺ νὰ στηρίζεται σὲ στερεὲς βάσεις, θεωρία ποὺ ὅμως ὁ ἴδιος δὲν ἦταν σὲ θέση νὰ ὑποδείξει.

Δὲν θὰ παρακολουθήσομε λεπτομερῶς τὶς προσπάθειες ποὺ ἔγιναν γιὰ τὴν ἄρση τῆς δευτέρας κρίσεως. Θὰ προχωρήσομε μὲ μεγάλα ἅλματα. Ὁ Joseph Louis Lagrange (1736-1813), μιὰ μεγάλη ἡγετικὴ μαθηματικὴ φυσιογνωμία τοῦ 18ου αἰώνα, πρότεινε μέθοδο ποὺ στηριζόταν στὴν παράσταση συναρτήσεων ὑπὸ μορφὴν σειρῶν τοῦ Taylor. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπεδείχθη ἀνεπιτυχὴς διότι ὁ Lagrange ἐστερεῖτο ἀναγκαίων γνώσεων ποὺ ἀφοροῦσαν τὴ σύγκλιση καὶ τὴν ἀπόκλιση τῶν σειρῶν.

Σημαντικότατες στὴν ἀντιμετώπιση τῆς δευτέρας κρίσεως ἦταν οἱ προσφορὲς τῶν γιγάντων τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857), *Karl Weirstrass* (1815-1897).

Ὁ τελευταῖος αὐτός, ὁδηγούμενος ἀπὸ τὰ ἐπιτεύγματα τῶν παλαιοτέρων, πρότεινε γιὰ νὰ λυθεῖ ἡ κρίση, ἕνα πρόγραμμα ἔρευνας ὅπου τὸ πρῶτο πράγμα ποὺ ἔπρεπε νὰ ἐπιτευχθεῖ ἦταν ἡ στερεὰ ἀξιωματικὴ θεμελίωση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀφοῦ γίνει ἡ θεμελίωση αὐτή, νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἔννοιες τοῦ ὁρίου, τῆς συνεχείας μιᾶς συναρτήσεως, τῆς διφορισιμότητας, τῆς συγκλίσεως καὶ ἀποκλίσεως τῶν σειρῶν, καὶ τῆς ὁλοκληρώσεως, ὅπου οἱ ὁρισμοὶ αὐτοὶ νὰ βασίζονται στὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ὁποίου ἡ θεμελίωση, ὅπως τονίσαμε παραπάνω, θὰ εἶχε ἤδη προηγηθεῖ.

Τὸ ὑψίστης σπουδαιότητας αὐτὸ διμερὲς πρόγραμμα ἔρευνας, διμερὲς διότι πρῶτα ἔπρεπε νὰ θεμελιωθεῖ σὲ στερεὲς βάσεις τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μετὰ νὰ γίνουν τὰ ὑπόλοιπα, κατέστη γνωστὸ ὡς «ἡ ἀριθμητικοποίηση τῆς ἀναλύσεως (the arithmetization of analysis), ὅπως ἔτσι τὸ ἀπεκάλεσε πρῶτος ὁ Felix Klein τὸ 1895, καὶ ποὺ μολονότι ἀπεδείχθη ὅτι ἦταν πάρα πολὺ δύσκολο καὶ πολύπλοκο, τελικὰ στέφθηκε ἀπὸ ἐπιτυχία κατὰ τὰ τέλη τοῦ 19ου αἰώνα. Ἡ ἐπιτυχία ὀφείλεται στὸν Weirstrass καὶ στοὺς συνεργάτες του.

Ὁ ἀντίκτυπος τῆς ἐπιτυχίας τοῦ προγράμματος ἔρευνας τοῦ Weirstrass ὑπῆρξε ἰσχυρός, πολυσχιδὴς καὶ πολὺ μεγάλης ἐμβελείας.

Πρῶτ' ἀπ' ὅλα ἔγινε κατανοητὸ ὅτι ἀφοῦ ἡ Μαθηματικὴ Ἀνάλυση μπορεῖ νὰ παραχθεῖ ἀπ' τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι τὸ ὅλο οἰκοδόμημα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως θὰ εἶναι συνεπὲς ἂν ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές. Ἐπίσης εἶναι γνωστὸ ὅτι ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία μπορεῖ, μὲ τὴ βοήθεια τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, νὰ θεμελιωθεῖ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία θὰ εἶναι συνεπὴς ἂν τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές. Ἐξάλλου ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ διάφοροι κλάδοι τῆς Γεωμετρίας θὰ εἶναι συνεπεῖς ἂν ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἶναι συνεπής. Ἐπιπλέον εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἢ μέρος αὐτοῦ, χρησιμεύει γιὰ νὰ ἑρμηνευθοῦν πολλοὶ κλάδοι τῆς Ἄλγεβρας. Κατὰ συνέπεια οἱ κλάδοι αὐτοὶ τῆς Ἄλγεβρας θὰ εἶναι συνεπεῖς ἂν τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές.

Καταλήγομε λοιπὸν στὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ μεγαλύτερος καὶ κυριότερος ὄγκος τῶν Μαθηματικῶν τῆς σήμερον θὰ εἶναι συνεπὴς (ἀπαλλαγμένος ἀντινομιῶν) ἂν τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω συνειδητοποιεῖ κανεὶς τὴν τεράστια σημασία ποὺ ἔχει *καὶ τὸν καθοριστικὸ ρόλο ποὺ παίζει τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν στὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν.*

Ἂς ποῦμε λοιπὸν πρῶτα λίγα λόγια γιὰ τὸ πῶς ἀντιμετωπίσθηκε τὸ πρόβλημα τῆς θεμελιώσεως αὐτοῦ τούτου τοῦ λογικοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὸ ἔγινε κατὰ δύο τρόπους ποὺ φυσικὰ εἶναι «ἰσοδύναμοι».

Ὁ πρῶτος τρόπος συνίστατο στὴν εὕρεση ἑνὸς συνόλου ἀξιωμάτων τὰ ὁποῖα θὰ ὅριζαν κατὰ τρόπο «μονοσήμαντο» τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεύτερος τρόπος, στὸν ὁποῖο καὶ θὰ σταθοῦμε περισσότερο, εἶναι ὁ λεγόμενος «γενετικὸς» ἢ «ἱστορικὸς» τρόπος, εἶναι δὲ σὲ γενικὲς γραμμὲς ὁ ἀκόλουθος: Ἀναφέραμε προηγουμένως ὅτι ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία μπορεῖ νὰ προκύψει, νὰ θεμελιωθεῖ ἐπάνω στὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τ' ἀξιώματα ποὺ ορίζουν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, εἶναι δυνατὸν (δίνοντας τοὺς κατάλληλους ὁρισμοὺς μὲ τὴ χρήση πραγματικῶν ἀριθμῶν) νὰ καταλήξομε σὲ μιὰ ἑρμηνεία τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, καὶ νὰ φθάσομε στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ συνέπεια τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἐξαρτᾶται ἀπ' τὴ συνέπεια τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Διερωτήθηκαν λοιπὸν οἱ ἐρευνητὲς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἂν παρόμοιος δρόμος μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἀκολουθήθηκε γιὰ νὰ βασισθεῖ ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία στὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ μποροῦσε νὰ ὁδηγήσει στὴ θεμελίωση αὐτοῦ τούτου τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Μὲ ἄλλα λόγια οἱ ἐρευνητὲς σκέφθηκαν ὅτι θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ ξεκινήσει ἀπὸ μερικὰ ἀξιώματα πιὸ «βασικὰ» πιὸ «προφανῆ» ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ προέκυψαν μὲ τὸν πρῶτο τρόπο, ἔτσι ὥστε, δίνοντας τοὺς κατάλληλους ὁρισμοὺς νὰ καταλήξει στὸ νὰ ἑρμηνεύσει τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπως ἀκριβῶς αὐτὸ ἔγινε στὴν περίπτωση τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας. Ἂν κάτι τέτοιο ἦταν κατορθωτό, αὐτὸ θὰ σήμαινε ὅτι ἡ συνέπεια τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ συνέπεια ὁλοκλήρου τοῦ οἰκοδομήματος τῶν Μαθηματικῶν) θὰ ἐξαρτᾶτο ἀπὸ τὴ συνέπεια ἑνὸς ἁπλουστέρου συστήματος.

Αὐτὸς εἶναι σὲ συντομία ὁ δεύτερος τρόπος θεμελιώσεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν παρήχθη, προέκυψε κατευθείαν ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χωρὶς νὰ γίνει καμμιὰ ἐπιπλέον ὑπόθεση, δίνοντας μόνο τοὺς κατάλληλους ὁρισμούς. Μὲ ἄλλα λόγια ὡς ἁπλούστερο σύστημα θεμελιώσεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐλήφθη τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Σχηματικὰ ἡ ὁδὸς ποὺ ἀκολουθήθηκε ἦταν ἡ ἑξῆς:

Φυσικοὶ ἀριθμοὶ → Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ → Κλασματικοὶ ἀριθμοὶ → Πραγματικοὶ ἀριθμοὶ → Μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

Ὁ δεύτερος αὐτὸς τρόπος θεμελιώσεως τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὀφείλεται κυρίως στούς: Karl Weirstrass, Richard Dedekind (1813-1916), Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932) καὶ ἄλλους.

Τὸ μεγάλο αὐτὸ ἐπίτευγμα τῶν μαθηματικῶν αὐτῶν δημιούργησε στὴ μαθηματικὴ κοινότητα ἕνα αἴσθημα ἀσφαλείας ἀναφορικὰ μὲ τὴ «συνέπεια» καὶ τὶς βάσεις τῶν Μαθηματικῶν. Ἡ δημιουργία τοῦ αἰσθήματος αὐτοῦ ἀσφαλείας ὀφείλετο στὸ ὅτι τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, αὐτὸ δηλαδὴ ποὺ χρησιμοποιοῦμε καὶ στὴν καθημερινὴ ζωὴ γιὰ νὰ μετροῦμε, εἶναι διαισθητικὰ ἁπλό, ἁπλούστερο ἀπὸ κάθε ἄλλο μαθηματικὸ σύστημα, εἶναι ἕνα σύστημα ποὺ κατὰ τὴ μακροχρόνια χρήση καὶ μελέτη του δὲν παρουσίασε, μέχρι στιγμῆς, καμμιὰ ἐσωτερικὴ ἀντινομία.

Στὴν κορυφὴ λοιπὸν τῆς ἀνεστραμμένης πυραμίδας, κορυφὴ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπ' τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, στηρίζεται τὸ οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν. Ἂν τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές, τότε καὶ τὸ μαθηματικὸ οἰκοδόμημα εἶναι συνεπές.

Ἔτσι ἡ ἄποψη τῶν Πυθαγορείων ὅτι ὅλα ἐξαρτῶνται ἀπ' τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς (τουλάχιστον σὲ ὅ,τι ἀφορᾶ τὰ Μαθηματικὰ) ἐπαληθεύθηκε, καὶ αὐτὸς ἦταν ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖον ἡ γῆ, ὅπως ἀνέφερα στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας μου, ἐσείσθη διότι ἐπρόκειτο γιὰ μιὰ ἀκόμα κορυφαία στιγμὴ στὰ Μαθηματικά.

Μετὰ τὴ δικαίωση αὐτὴ τοῦ Πυθαγόρα, γίνεται εὔκολα ἀντιληπτὴ ἡ ἀκόλουθη παρατήρηση τοῦ Leopold Kronecker: Die ganzen zahlen hat goot gemacht, alles andere ist menschenwerk.

Μεταφραζόμενη στὰ ἑλληνικὰ ἡ παρατήρηση αὐτὴ ἔχει ὡς ἑξῆς:
Ὁ Θεὸς ἔκανε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἔργον τοῦ ἀνθρώπου.

Ὕστερα ἀπὸ ὅσα ἐκθέσαμε παραπάνω, εἶναι πολὺ φυσικὸ νὰ τεθεῖ τὸ ἐρώτημα: Εἶναι συνεπὲς τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν;

Θὰ δοῦμε σὲ λίγο ὅτι «κατὰ κάποια ἔννοια» ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ δὲν ὑπάρχει καὶ «δὲν θὰ ὑπάρξει ποτέ».

Ἡ προσπάθεια νὰ ἀπαντηθεῖ τὸ ἐν λόγῳ ἐρώτημα ὁδήγησε σὲ μιὰ ἀκόμα κορυφαία στιγμὴ στὰ Μαθηματικά.

Τὸ 1931 δημοσιεύθηκε στὸ περιοδικὸ Monatshefte für Mathematik und Physik μιὰ ἐργασία ὑπὸ τὸν τίτλο:
«Über formal unentsheibare sätze der principia mathematica und verwandter systeme».

Ὁ τίτλος αὐτὸς μεταφραζόμενος περιφραστικὰ σημαίνει ὅτι ἡ ἐργασία ἀσχολεῖται μὲ τὶς Προτάσεις ἐκεῖνες ποὺ περιέχονται στὸ μνημειῶδες ἔργο τοῦ Isaac Newton καὶ τὰ συναφῆ μὲ αὐτὸ συστήματα. Προτάσεις τῶν ὁποίων τὸ «ἀληθὲς» ἢ τὸ «ψευδὲς» δὲν εἶναι δυνατὸν «τύποις» νὰ ἀποδειχθεῖ. Τὸ ἔργο αὐτὸ τοῦ Newton δημοσιεύθηκε πρὸ 300 ἀκριβῶς ἐτῶν.

Ὁ κάπως δυσνόητος αὐτὸς τίτλος τῆς ἐν λόγῳ ἐργασίας, μᾶς «προειδοποιεῖ» ὅτι πρόκειται γιὰ ἕνα δύσκολο, λεπτεπίλεπτο, ἀκανθῶδες θέμα, τὸ ὁποῖο πολὺ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ νὰ εἶναι στοιχειῶδες.

Ὁ συγγραφέας τῆς ἐργασίας αὐτῆς ἦταν ὁ 25ετὴς τότε, αὐστριακὸς μαθηματικὸς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βιέννης, Kurt Gödel. Ἡ δημοσίευση τῆς ἐργασίας προσείλκυσε κατ' ἀρχὰς πολὺ λίγο τὴν προσοχὴ τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, καὶ τοῦτο διότι τὸ ἀντικείμενο τῆς ἐργασίας ἐνέπιπτε σὲ μιὰ περιοχὴ τῶν Μαθηματικῶν ἡ ὁποία δὲν ἀπασχολοῦσε πολλοὺς ἐρευνητὲς καὶ διότι οἱ χρησιμοποιούμενες ὑπὸ τοῦ Gödel μέθοδοι ἀποδείξεων ἦταν νέες καὶ ἀκατάληπτες ἀπὸ τὴν πλειονότητα τῶν ἀναγνωστῶν.

Ὕστερα ὅμως ἀπὸ λίγα χρόνια ἡ ἐργασία ἔγινε εὐρύτατα γνωστὴ καὶ ἀποδεκτή, ἀποτελεῖ δὲ μιὰ νέα κορυφαία στιγμὴ στὴν πορεία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Τὸ 1938 ὁ Gödel ἐξελέγη μόνιμο μέλος τοῦ Institute for Advaced Studies στὸ Princeton τῶν U.S.A. τὸ δὲ 1952 τοῦ ἀπενεμήθη τιμητικὸς τίτλος ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Harvard τῶν U.S.A., γεγονὸς σπάνιο στὰ χρονικὰ τοῦ διεθνοῦς ἀκτινοβολίας πνευματικοῦ αὐτοῦ ἱδρύματος. Ὁ Gödel πέθανε στὶς 14/1/1978 στὸ Princeton τῶν U.S.A.

Ἡ περίφημη αὐτὴ ἐργασία τοῦ Gödel ἀπεκάλυψε τὴν ὕπαρξη, ἀγνώστων μέχρι τότε, περιοριστικῶν πλαισίων στὴν ἀξιωματικὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν. Πιὸ συγκεκριμένα τὰ βασικὰ ἐπιτεύγματα τῆς ἐργασίας εἶναι τὰ ἑξῆς:

1. Διέψευσε τὴν μέχρι τότε ὑπάρχουσα πίστη ὅτι ἡ πλήρης ἀξιωματικὴ θεμελίωση ὅλων τῶν ἀξιόλογων κλάδων τῶν Μαθηματικῶν εἶναι δυνατή.

2. Ματαίωσε κάθε ἐλπίδα ἀποδείξεως τῆς ὑπάρξεως «συνεπείας» στὸ οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν, ἀποδείξεως ποὺ νὰ ἀκολουθεῖ τὶς κατευθυντήριες γραμμὲς πούς εἶχε ὁραματισθεῖ ὁ David Hilbert.

3. Ἄνοιξε τὸ δρόμο γιὰ μιὰ ἐπανεξέταση, μιὰ ἀναθεώρηση (ἡ ὁποία ἀκόμα δὲν ἔχει ὁλοκληρωθεῖ) τῶν διαφόρων φιλοσοφιῶν τῶν Μαθηματικῶν.

4. Εἰσήγαγε στὶς μελέτες ἐκεῖνες ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν, μιὰ ἰσχυρὴ καὶ γόνιμη τεχνικὴ ἡ ὁποία ὑπέδειξε καὶ συνετέλεσε στὸ νὰ ἀνοιχθοῦν νέες λεωφόροι στὴ μαθηματικὴ ἔρευνα.

Θὰ ἀπαιτοῦντο πολλὲς ὡραῖες ὁμιλίες, καθὼς καὶ εἰδικὲς γνώσεις ἀπ' τὸν *ἀκροατὴ γιὰ νὰ ἀναπτυχθοῦν καὶ νὰ σχολιασθοῦν λεπτομερῶς τὰ τέσσερα αὐτὰ ἐπιτεύγματα τοῦ Gödel. Στὸ χρόνο ποὺ ὑπολείπεται θὰ προσπαθήσομε νὰ φωτίσομε μερικὰ μόνο ἀπ' τὰ οὐσιώδη σημεῖα τῶν τριῶν πρώτων ἐπιτευγμάτων. Γιὰ λόγους καθαρὰ τεχνικοὺς θὰ ἀποφύγουμε καθ' ὁλοκληρίαν νὰ θίξομε τὸ τέταρτο ἐπίτευγμα.*

Ἕνα ἀπ' τὰ κεντρικὰ σημεῖα τοῦ πρώτου ἐπιτεύγματος εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Πρῶτο θεώρημα τοῦ Gödel:

Σὲ κάθε «συνεπὲς» λογικὸ σύστημα τὸ ὁποῖο περιλαμβάνει τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὑπάρχουν Προτάσεις τῶν ὁποίων τὸ ἀληθὲς ἢ τὸ ψευδὲς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθεῖ ἐντὸς τοῦ θεωρουμένου συστήματος.

Τὸ μήνυμα ποὺ μᾶς στέλνει τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι μᾶλλον ἀπογοητευτικό. Γνωρίζομε ὅτι στὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (τὸ ὁποῖο ὅπως ἐπανειλημμένως τονίσαμε περιλαμβάνει τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν) ὑπάρχουν Προτάσεις-Εἰκασίες τῶν ὁποίων τὸ ἀληθὲς ἢ τὸ ψευδὲς δὲν ἔχει μέχρι σήμερα ἀποδειχθεῖ. Μιὰ τέτοια εἰκασία ἀποτελεῖ τὸ γνωστὸ μὲ τὴν ὀνομασία «Τὸ τελευταῖο Θεώρημα τοῦ Fermat» *(διατυπώθηκε κατὰ τὰ μέσα τοῦ 17ου αἰώνα ἀπὸ τὸν Fermat) ποὺ λέει ὅτι:* Δὲν ὑπάρχουν ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, Χ,Ψ,Ζ, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐπαληθεύουν τὴ σχέση $X^{\nu}+\Psi^{\nu}=Z^{\nu}$ ὅπου τὸ ν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 2.

Ἔχοντας ὑπόψη τὸ πρῶτο Θεώρημα τοῦ Gödel, μπορεῖ κανεὶς νὰ κάνει τὴ σκέψη ὅτι ἴσως μιὰ ἀπ' τὶς Προτάσεις τῶν ὁποίων δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ τὸ ἀληθὲς ἢ τὸ ψευδές, εἶναι ἡ παραπάνω Εἰκασία τοῦ Fermat, καὶ ὅτι ἴσως αὐτὸς εἶναι ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο κανεὶς μέχρι σήμερα δὲν ἀπέδειξε τὸ ἀληθὲς ἢ τὸ ψευδὲς τῆς Εἰκασίας αὐτῆς.

Θὰ ἦταν πολὺ ἐνδιαφέρον ἂν δοθείσης μιᾶς Προτάσεως σὲ ἕνα λογικὸ σύστημα ποὺ περιέχει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, νὰ ὑπῆρχε τρόπος (μέθοδος) νὰ ἀποφανθοῦμε, ἐκ τῶν προτέρων, ἂν ἡ Πρόταση αὐτὴ μπορεῖ ἢ δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ἐντὸς τοῦ θεωρουμένου συστήματος. Καὶ ἐδῶ ὅμως μᾶς περιμένει μιὰ δεύτερη ἀπογοήτευση, ἡ ὁποία ὀφείλεται στὸ ἀκόλουθο θεώρημα τοῦ Ἀμερικανοῦ λογικοῦ Alonzo Church (1936).

Θεώρημα τοῦ Church:

Δοθέντος ἑνὸς οἱουδήποτε συνεποῦς λογικοῦ συστήματος τὸ ὁποῖο περιέχει τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δὲν ὑπάρχει μέθοδος ποὺ νὰ ἐπιτρέπει, ἐκ τῶν προτέρων, νὰ ἀποφανθοῦμε ποιὲς Προτάσεις μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν ἐντὸς τοῦ δοθέντος αὐτοῦ συστήματος.

Ἂς ἔρθουμε τώρα στὸ δεύτερο ἐπίτευγμα τοῦ Gödel, ὅπου ὅπως ἀναφέραμε *καὶ προηγουμένως, οἱ ἐλπίδες ἀποδείξεως τῆς συνεπείας τοῦ μαθηματικοῦ οἰκοδομήματος διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Hilbert διαψεύδονται. Ἡ μέθοδος ποὺ ὑπέδειξε ὁ Hilbert συνοψίζεται ὡς ἑξῆς:*

Γιὰ νὰ ἀποδειχθεῖ ἡ συνέπεια ἑνὸς λογικοῦ συστήματος πρέπει νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι: Ἀκολουθώντας τοὺς ἰσχύοντες στὸ λογικὸ σύστημα κανόνες, εἶναι ἀδύνατον ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα δεδομένο σύνολο ἀξιωμάτων νὰ καταλήξομε σὲ δύο προτάσεις οἱ ὁποῖες νὰ ἀντιφάσκουν μεταξύ τους.

Δὲν θὰ ἐπιχειρήσομε νὰ ἀναπτύξομε περαιτέρω τὴ μέθοδο αὐτή. Εἶναι πολὺ πολύπλοκη. Ὅμως θὰ δώσομε ἕνα ἀνάλογο παράδειγμα ποὺ ἀναφέρεται στὸ παιχνίδι τοῦ σκακιοῦ, παράδειγμα ποὺ θὰ βοηθήσει στὸ νὰ γίνει καλύτερα ἀντιληπτὴ ἡ βασικὴ ἰδέα ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ μέθοδος τοῦ Hilbert.

Ἂς ὑποθέσομε ὅτι θέλομε νὰ ἀποδείξομε ὅτι σὲ μιὰ παρτίδα σκακιοῦ, ὅπου ὁ ἀριθμὸς τῶν κινήσεων εἶναι ἀπεριόριστος, εἶναι ἀδύνατον νὰ φθάσομε στὸ σημεῖο νὰ ὑπάρχουν 10 βασίλισσες τοῦ ἰδίου χρώματος στὴ σκακιέρα. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τοῦ Hilbert μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ διότι μποροῦμε, ἀκολουθώντας τοὺς κανόνες τοῦ παιχνιδιοῦ νὰ ἀποδείξομε ὅτι ὁποιαδήποτε κίνηση κι ἂν κάνομε, αὐτὴ δὲν μπορεῖ νὰ αὐξήσει τὸν ἀριθμὸ ποὺ παριστάνει τὸ σύνολο τῶν βασιλισσῶν καὶ τῶν πιονιῶν τοῦ ἰδίου χρώματος ποὺ ὑπάρχουν τὴ στιγμὴ ἐκείνη στὴ σκακιέρα. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἁπλὴ καὶ προκύπτει ἀπ' τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ σύνολο αὐτό, στὴν ἀρχὴ τοῦ παιχνιδιοῦ εἶναι 9, καὶ ἡ μόνη μεταβολὴ ποὺ μπορεῖ νὰ ἐπέλθει μετὰ ἀπὸ μιὰ κίνηση εἶναι, ἢ νὰ ἐλαττωθεῖ ὁ ἀριθμὸς τῶν πιονιῶν ἢ τῶν βασιλισσῶν κατὰ 1, ἢ ἕνα πιόνι νὰ μετατραπεῖ σὲ βασίλισσα τοῦ ἰδίου χρώματος. Μὲ ἄλλα λόγια τὸ σύνολο τῶν πιονιῶν καὶ τῶν βασιλισσῶν τοῦ ἰδίου χρώματος παραμένει μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ 9, ποὺ σημαίνει ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξουν 10 βασίλισσες τοῦ ἰδίου χρώματος στὴ σκακιέρα.

Δυστυχῶς ἡ μέθοδος τοῦ Hilbert δὲν μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ γιὰ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ μαθηματικὸ οἰκοδόμημα εἶναι συνεπές. Τὴ χαριστικὴ αὐτὴ βολὴ τὴν δίνει τὸ ἀκόλουθο:

Δεύτερο Θεώρημα τοῦ Gödel:

Ἂν ἕνα συνεπὲς λογικὸ σύστημα περιλαμβάνει τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνέπεια αὐτὴ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθεῖ ἐντὸς τοῦ συστήματος, μὲ τὰ μέσα δηλαδὴ ποὺ διαθέτει αὐτὸ τοῦτο τὸ σύστημα.

Ἀπ' τὸ δεύτερο αὐτὸ θεώρημα τοῦ Gödel προκύπτει ὅτι, ἂν τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπές, τότε ἡ συνέπεια αὐτὴ (καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ συνέπεια ὁλοκλήρου τοῦ μαθηματικοῦ οἰκοδομήματος) δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ μὲ τὰ μέσα ποὺ διαθέτει τὸ ἴδιο τὸ σύστημα. Αὐτὸ ἀπαντᾶ καὶ στὸ ἐρώτημα ποὺ θέ-

σαμε παραπάνω ὡς πρὸς τὴ συνέπεια τοῦ συστήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐξ ἄλλου ἀπ᾽ τὸ πρῶτο θεώρημα τοῦ Gödel προκύπτει ὅτι ὁποιοδήποτε συνεπὲς σύνολο ἀξιωμάτων καὶ ἂν ἐπιλέξομε γιὰ τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, θὰ ὑπάρχει πάντα κάποια πρόταση ποὺ θὰ ἀφορᾶ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, τῆς ὁποίας τὸ ἀληθὲς ἢ τὸ ψευδὲς θὰ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθεῖ διὰ τῆς χρήσεως τῶν ὡς ἄνω μόνο ἀξιωμάτων. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πλήρης ἀξιωματικοποίηση τοῦ συστήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀδύνατος.

Ἐρχόμαστε τώρα στὸ τρίτο ἐπίτευγμα, τὸ ὁποῖο ἀναφέρεται στὴν ἀναθεώρηση τῶν μαθηματικῶν φιλοσοφιῶν. Μὲ τὰ δύο θεωρήματα τοῦ Gödel ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, ἀποδείχθηκε ὅτι ἡ πλήρης ἀξιωματικὴ θεμελίωση ὁρισμένων σπουδαίων περιοχῶν τῶν Μαθηματικῶν εἶναι ἀδύνατος.

Ἀποδείχθηκε ἐπίσης ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμιὰ ἀπόλυτη διαβεβαίωση ὅτι οἱ περιοχὲς αὐτὲς εἶναι πλήρως ἀπαλλαγμένες ἐσωτερικῶν ἀντινομιῶν. Οἱ διαπιστώσεις αὐτὲς ἀποτελοῦν σοβαρὲς ἀδυναμίες τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου καὶ δείχνουν ὅτι οἱ διαδικασίες ποὺ ἀκολουθοῦνται σὲ μιὰ μαθηματικὴ ἀπόδειξη μπορεῖ νὰ μὴ συμπίπτουν, καὶ πιθανῶς δὲν συμπίπτουν, μὲ τὶς διαδικασίες ποὺ ὑπαγορεύει ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος.

Ὁδηγούμαστε ἔτσι στὴν ἄποψη ὅτι δὲν μποροῦμε, ἐκ τῶν προτέρων, νὰ ἐπιβάλομε περιορισμοὺς στὴν ἐφευρετικὴ ἱκανότητα τῶν μαθηματικῶν νὰ ἐπινοοῦν νέες διαδικασίες ἀποδείξεως.

Τὰ φαινόμενα δείχνουν ὅτι οἱ πηγὲς ἀπ᾽ τὶς ὁποῖες ἀντλεῖ τὸ ἀνθρώπινο πνεῦμα, οἱ πηγὲς ἐφοδιασμοῦ του, δὲν ὑπόκεινται σὲ πλήρη ἀξιωματικοποίηση, καὶ αὐτὸ εἶναι μιὰ ἔνδειξη ὅτι ἐπίκειται ἡ ἀνακάλυψη καὶ ἡ ἐπινόηση νέων ἀποδεικτικῶν ἀρχῶν.

Ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ στὸ σημεῖο αὐτό, Κυρίες καὶ Κύριοι, νὰ ἐκφράσω μιὰ προσφιλὴ προσωπική μου ἄποψη, ἡ ὁποία κατόπιν τῶν ὅσων ἐξέθεσα εἶναι καὶ ἀρκετὰ θεμελιωμένη: Πιστεύω ὅτι ἡ ἄποψη ὅτι οἱ πηγὲς ἀπ᾽ τὶς ὁποῖες ἀντλεῖ τὸ ἀνθρώπινο πνεῦμα δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὲς ἀξιωματικοποιήσεως, μεταφερόμενη καὶ σὲ ἄλλους χώρους προβληματισμῶν ὅπως εἶναι οἱ πολιτικοί, οἱ κοινωνικοὶ κ.ἄ., μπορεῖ, ἡ ἄποψη αὐτή, νὰ φωτίσει εὐεργετικὰ τὰ ὑπάρχοντα στοὺς χώρους αὐτοὺς προβλήματα, ἰδίως ἐκεῖνα ὅπου ἐπιχειρεῖται κάτι ἀνάλογο μὲ τὴν πλήρη ἀξιωματικοποίηση ἢ δογματικοποίηση.

Τὰ δύο θεωρήματα τοῦ Gödel εἶναι ἀναμφισβήτητα ἀπ᾽ τὰ πιὸ σπουδαῖα στὸ εἶδος τους. Ἀξιόλογος εἶναι ὁ ἀκόλουθος σύντομος καὶ ἀκριβὴς χαρακτηρισμὸς τῶν θεωρημάτων αὐτῶν ἀπὸ τὸν Ἀμερικανὸ μαθηματικὸ F. De Sua.

Τὰ θεωρήματα τοῦ Gödel, γράφει ὁ De Sua, δείχνουν ὅτι τὰ μέχρι σήμερα γνωστὰ λογικὰ συστήματα ἐπὶ τῶν ὁποίων μποροῦν νὰ θεμελιωθοῦν τὰ Μαθημα-

τικὰ δὲν εἶναι ἀσφαλῆ, ὑπὸ τὴν ἔννοια ὅτι ἡ συνέπειά τους δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ἐντὸς τοῦ ἑκάστοτε θεωρουμένου συστήματος, ἐνῶ ἀντίθετα κάθε σύστημα ποὺ γνωρίζομε ὅτι εἶναι ἀσφαλές, ὅτι εἶναι συνεπές, δὲν εἶναι κατάλληλο γιὰ νὰ θεμελιωθεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ μαθηματικὸ οἰκοδόμημα.

Στὴ συνέχεια ὁ De Sua διατυπώνει μιὰ περίεργη ἀλλὰ καὶ ἐνδιαφέρουσα ἄποψη, ἡ ὁποία δὲν θὰ ἔπρεπε μὲ κανένα τρόπο νὰ παρερμηνευθεῖ. Ἡ παρατήρηση τοῦ De Sua ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἂς ὑποθέσομε ὅτι καλοῦμε, ἐξ ὁρισμοῦ, «θρησκεία» κάθε σύνολο ἢ σύστημα κανόνων τὰ θεμέλια τοῦ ὁποίου στηρίζονται σὲ ἕνα στοιχεῖο πίστεως τελείως ἀνεξάρτητο ἀπὸ κάθε ἄλλο λογικὸ στοιχεῖο ποὺ τυχὸν ἐνυπάρχει στὸ σύστημα.

Ἡ Κβαντομηχανική, λόγου χάριν, θὰ ἦταν σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ μιὰ θρησκεία. Ὅμως, συνεχίζει ὁ De Sua, τὰ Μαθηματικὰ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ θὰ μποροῦσαν νὰ θεωρηθοῦν ὅτι ἀποτελοῦν τὸν μοναδικὸ ἐκεῖνο κλάδο τῆς Θεολογίας ὁ ὁποῖος θὰ ἦταν ἐπιπλέον σὲ θέση νὰ δώσει, δι' ἰδίων μέσων, καὶ μιὰ λογική, αὐστηρή, ἀπόδειξη ὅτι ὄντως τὰ Μαθηματικὰ ἀποτελοῦν κλάδο τῆς Θεολογίας.

Εἶναι φανερό, ἀπ' ὅσα ἐκθέσαμε παραπάνω, τί ἦταν ἐκεῖνο ποὺ ὤθησε τὸν De Sua νὰ κάνει τὴν παρατήρηση αὐτή.

Γενικότερα ὅλες οἱ παραπάνω σκέψεις ἔχουν, προφανῶς, ἀντίκτυπο καὶ ἐπηρεάζουν κάθε φιλοσοφικὴ ἄποψη ἢ θεωρία, ἢ τουλάχιστον ἐκεῖνες τὶς θεωρίες ποὺ ἀφοροῦν τὰ Μαθηματικά. Ἡ περαιτέρω ἀνάπτυξη τοῦ θέματος πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτὴ θὰ μποροῦσε νὰ ἀποτελέσει θέμα πολλῶν ἄλλων διαλέξεων.

Ἡ σημερινὴ ὁμιλία σκοπὸ εἶχε τὴ σύντομη παρουσίαση μερικῶν μόνο κορυφαίων στιγμῶν στὴν πορεία τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης. Ἀκολουθώντας τὴ σύντομη αὐτὴ ἀναδρομὴ στὸ παρελθόν, ὁ ἀκροατὴς διέκρινε ἴσως καὶ τὸν ἰδιότυπο τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ἐξελίσσονται τὰ Μαθηματικά. Εἰδικότερα ὁ νεαρὸς ἐκεῖνος πρωτοετὴς φοιτητὴς ξεφυλλίζοντας τὸ σύγγραμμα τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ παρατηρεῖ μὲ δέος ὅτι οἱ διάφοροι ὁρισμοί, ἔννοιες καὶ Προτάσεις γιὰ νὰ πάρουν τὴ θέση ποὺ κατέχουν σὲ μερικὲς μόνο σελίδες τοῦ βιβλίου του ἔπρεπε νὰ περάσουν ἑκατοντάδες χρόνια ὑπομονῆς καὶ σκληρῆς ἐργασίας.

Ἡ ἀναδρομὴ στὶς κορυφαῖες ἐκεῖνες στιγμὲς τῶν Μαθηματικῶν ποὺ ἐπιχειρήσαμε σήμερα μοιραίως διέρχεται ἀπὸ τὴ φοβερὰ δύσβατη καὶ γεμάτη «κινδύνους» περιοχὴ ποὺ λέγεται «Θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν». Ὡς ἐκ τούτου ἡ τυχὸν μὴ ἱκανοποιητικὴ παρουσίαση τοῦ ὅλου θέματος, εἶναι πιθανὸν νὰ μὴν ὀφείλεται μόνο στὸν ὁμιλητὴ ἀλλὰ καὶ στὴν ἀκανθώδη φύση του πρὸς ἀνάπτυξη ἀντικειμένου μέσα σὲ σχετικῶς βραχὺ χρονικὸ διάστημα.