## ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Sur un problème de Monge*** *par A. Tsortsis.*
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

**1.** M. Goursat[1] en étendant la théorie classique de Monge, relative aux *courbes intégrales* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, à une équation à $n+1$ variables indépendantes, a démontré que l'équation de Monge correspondante est remplacée elle-même par une relation entre $n$ variables indépendantes, deux fonctions inconnues de ces $n$ variables et leurs dérivées partielles du premier ordre. Ce sont les équations de Monge à plusieurs variables indépendantes. Les multiplicités analogues aux *courbes intégrales* pour une équation à deux variables indépendantes sont les *multiplicités singulières* $M_n$ de l'équation à $n+1$ variables indépendantes.

Dans ce qui suit nous indiquons, par une voie directe, comment on pourrait obtenir la solution de ce problème de Monge, en étendant à une équation à plusieurs variables indépendantes, la méthode de M. Bottasso[2] pour une équation de Monge habituelle de la forme la plus générale.

**2.** Soit une équation de la forme:

$$(1) \qquad f(x_1, \dots x_{n+1}, x_{n+2}; p_1, \dots p_n; q_1, \dots q_n) = 0$$

où $p_1, \dots p_n; q_1, \dots q_n$ sont les dérivées partielles des variables $x_{n+1}, x_{n+2}$ par rapport aux $x_1, \dots x_n$ respectivement.

On demande à *exprimer explicitement les variables* $x_1, \dots x_{n+2}$ *en fonction de $n$ paramètres auxiliaires, d'une fonction arbitraire de ces paramètres et de ses dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé.*

A cet effet, adjoignons à l'équation (1) les $2n$ équations suivantes:

$$(2) \qquad q_i = P_i + P_{n+1} p_i$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} P_{n+1} = 0 \qquad (i = 1, \dots n)$$

$P_1, \dots P_{n+1}$ désignant des nouvelles variables. On obtient les (3) en dérivant le (1) par rapport à $p_i$ et en tenant compte de (2).

* A. ΤΖΩΡΤΖΗ. — Ἐπί τινος προβλήματος τοῦ Monge.

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **186**, 1928, p. 1469-1472.

[2] *Comptes rendus*, **140**, 1905, p. 1579.

L'élimination des $p_i$ et $q_i$ entre les équations (1), (2) et (3) nous conduit à une équation de la forme:

$$(4) \qquad F(x_1, \dots x_{n+1}, x_{n+2}; P_1, \dots P_{n+1}) = 0.$$

**3.** Si l'on considère $x_1, \dots x_{n+1}$ comme variables indépendantes, $x_{n+2}$ comme la fonction inconnue et que l'on pose:

$$P_j = \frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \dots n+1),$$

l'équation (4) devient une équation aux dérivées partielles du premier ordre et, adjointe aux (2), exprime qu'une multiplicité ponctuelle $M_n$ de l'espace à $n+2$ dimensions appartient à une multiplicité intégrale $M_{n+1}$ de l'équation (4).

*Toute multiplicité $M_n$ remplissant les équations (1) (2) et (3) n'est qu'une multiplicité singulière de l'équation (4).*

En effet, supposons qu'on a résolu les équations (2) et (3) par rapport à $p_i$ et $q_i$ et qu'on les a remplacées par leurs valeurs dans l'équation (1). On en déduit les relations:

$$\frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial P_i} + P_{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial P_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\psi_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda}\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial P_{n+1}} + P_{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial P_{n+1}}$$

$\psi_i$ désignant les valeurs des $p_i$ tirées des équations (2) et (3). En tenant compte du système (3) on obtient:

$$\frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\psi_\lambda,$$

d'où il vient:

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} - \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial P_\lambda} p_\lambda = 0.$$

Cette équation ainsi que les (2) et (4), doivent être vérifiées par les *multiplicités singulières $M_n$* de l'équation (4).

Inversement, *toute multiplicité singulière $M_n$ de l'équation (4) est une multiplicité intégrale de l'équation (1).*

On l'obtient de suite par les relations:

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial p_i} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial P_\lambda} p_\lambda - \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} - \frac{\partial F}{\partial P_i} P_{n+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial P_i} + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial P_{n+1}} - \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial q_i} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial P_\lambda} p_\lambda$$

$\Phi_j$ étant les valeurs de $P_j$ tirées du système formé par les équations (2) et (5), en tenant compte de la relation (5) elle-même.

**4.** Voici maintenant comment on peut appliquer la méthode de Bottasso pour obtenir la solution de l'équation (1).

Soit:

$$(6) \qquad V(x_1, \ldots. x_{n+2}\,;\, \alpha_1, \ldots. \alpha_{n+1}) = 0,$$

une intégrale complète de l'équation (4).

Supposons qu'une multiplicité ponctuelle $M_n$ de l'espace à $n+2$ dimensions appartienne à une intégrale générale $M_{n+1}$ de (4), obtenue par l'élimination des $\alpha_j$ $(j = 1, \ldots. n+1)$, entre l'équation (6) et les $n+1$ équations suivantes:

$$(7) \qquad \varphi(\alpha_1, \ldots. \alpha_{n+1}) = 0\,, \quad \frac{D(V,\varphi)}{D(\alpha_i,\, \alpha_{n+1})} = 0 \quad (i = 1, \ldots. n),$$

$\varphi$ étant arbitraire.

*Les $n+2$ équations, (6), (7), et l'équation suivante:*

$$\frac{D\left[\dfrac{D(V,\varphi)}{D(\alpha_1,\, \alpha_{n+1})}, \ldots. \dfrac{D(V,\varphi)}{D(\alpha_n,\, \alpha_{n+1})}, \varphi\right]}{D(\alpha_1, \ldots. \alpha_{n+1})} = 0$$

*nous fournissent, sous une forme explicite, l'intégrale de l'équation (1).*

En effet, on exprime, au moyen de ces équations, explicitement, les variables $x_1, \ldots. x_{n+2}$ en fonction de n paramètres auxiliaires, d'une fonction arbitraire de ces paramètres et de ses dérivées jusqu'au second ordre.

En prenant pour la fonction $\varphi$ la forme $\alpha_{n+1} - f_1(\alpha_1, \ldots. \alpha_n)$ on retrouve les relations de M. Goursat.

## ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ Τζώρτζης ἀναφερόμενος εἰς τύπον ἐξισώσεων τοῦ Monge, τὰς ὁποίας ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς Goursat ἐθεώρησεν εἰς ἀνακοίνωσίν του τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων, λύει ταύτας ἀπ' εὐθείας ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μεθόδου τοῦ Ἰταλοῦ Μαθηματικοῦ Botasso διὰ τὰς συνήθεις ἐξισώσεις τοῦ Monge, μεθόδου ἣν ἐπεκτείνει εἰς τὸν νέον τοῦτον τύπον τῶν ἐξισώσεων τοῦ Monge.

Κ. Α. Κς