ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΤΑΚΤΗ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 5ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1998

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΑΓΑΠΗΤΟΥ Γ. ΤΣΟΠΑΝΑΚΗ

Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΣΟΝΑΤΕΣ ΓΙΑ ΠΙΑΝΟ ΤΟΥ W.A. MOZART

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

Κύριε Πρόεδρε,
Κυρία καὶ Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ἡ σημερινὴ ὁμιλία, ὅπως καὶ ἀρκετὲς ἐξ ὅσων ἔχω ἐκφωνήσει ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ, ἐμπίπτει στὴν κατηγορία ἐκείνη τῶν ὁμιλιῶν, ὅπου ἐπιχειρεῖται ἡ λεγόμενη «ἐκλαΐκευση» τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὐτὴ φράση συχνὰ παρερμηνεύεται, ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ νὰ ἐπαναλάβω ἐν συντομίᾳ μερικὲς διευκρινιστικὲς ἀπόψεις ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, τὶς ὁποῖες ἔχω ἐκφράσει καὶ στὸ παρελθόν.

Εἶναι λυπηρὸ τὸ γεγονὸς ὅτι μιὰ μεγάλη μερίδα συνανθρώπων μας, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ πολλοὶ διανοούμενοι, θεωροῦν ὅτι ἡ μελέτη καὶ ἡ ἐκμάθηση τῶν μαθηματικῶν, ἔστω καὶ τῶν βασικοτέρων κλάδων αὐτῶν, ἀπὸ ἄτομα ποὺ ἀνήκουν στὸ εὐρύτερο κοινό, εἶναι πολὺ δύσκολη καὶ ὄχι ἀναγκαία. Στὴν ἐποχή μας ὅμως ἔχει ἤδη καταστεῖ πασιφανὲς ὅτι ἂν θέλομε νὰ κατανοήσομε τὴν Φύση πρέπει νὰ συνομιλοῦμε μὲ αὐτὴν στὴν γλώσσα στὴν ὁποία ἐκείνη μᾶς μιλᾶ, δηλαδὴ στὴν γλώσσα τῶν μαθηματικῶν.

Γιὰ νὰ γίνομε σαφέστεροι θὰ κάνομε ἕνα τεχνητὸ διαχωρισμὸ τῶν μαθηματικῶν σὲ δύο εἴδη. Τὸ πρῶτο εἶδος εἶναι ἡ Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν αὐτὴ καθ' ἑαυτήν, τὸ εἶδος δηλαδὴ ἐκεῖνο ὅπου τὸ κύριο μέλημα εἶναι ἡ ἐπιστημονικὴ ἔρευνα καὶ μὲ τὸ ὁποῖο κατὰ κανόνα ἀσχολοῦνται οἱ «ἐπαγγελματίες» μαθηματικοί, ἤτοι αὐτοὶ ποὺ ἀσχολοῦνται μόνο μὲ τὴν ἔρευνα. Τὰ μαθηματικὰ τοῦ δευτέρου εἴδους θεωροῦνται ὅτι εἶναι ἕνα ἐκλεπτυσμένο, ἕνα ραφιναρισμένο, ὄργανο σκέψης, ἡ χρησιμοποίηση τοῦ ὁποίου, σὲ ὅλες σχεδὸν τὶς ἀνθρώπινες δραστηριότητες, εἶναι καθοριστική.

Ἴσως δὲν θὰ ἦταν ὑπερβολὴ νὰ ἰσχυρισθεῖ κανεὶς ὅτι ἡ «καλὴ ὑγεία» τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν ἐξαρτᾶται κατὰ ἕνα ποσοστὸ πολὺ μεγαλύτερο ἀπὸ ὅ,τι νομίζομε, ἀπὸ τὸν βαθμὸ ἐπιτυχίας κατὰ τὸν ὁποῖο μεταφέρομε τὰ νεώτερα μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα καὶ τὶς ἐφαρμογές τους στὸ εὐρὺ κοινὸ καὶ ὄχι μόνο στὸν στενὸ κύκλο τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν ἐκπαιδευτικῶν. Ἕνας ὁρισμὸς ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ δοθεῖ στὴν ἔννοια «ἐκλαΐκευση τῆς ἐπιστήμης» εἶναι ὅτι πρόκειται γιὰ τὴν καταβαλλόμενη προσπάθεια νὰ γεφυρωθεῖ τὸ ὑπάρχον «χάσμα» μεταξὺ τῆς προόδου καὶ τῶν ἐφαρμογῶν τῆς ἐπιστήμης ἀφ' ἑνός, καὶ τῶν ὅσων γνωρίζει γι' αὐτὲς τὸ εὐρὺ κοινό, πέραν τῶν ὅσων τοῦ παρέχει ἡ μέση καὶ ἡ ἀνωτέρα παιδεία, ἀφ' ἑτέρου. Στὸν ὁρισμὸ αὐτὸ πρέπει νὰ προστεθεῖ ὅτι οἱ πρὸς τὸν σκοπὸ αὐτὸν πραγματοποιούμενες ἐνημερωτικὲς διαλέξεις πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ γίνονται κατὰ τέτοιο τρόπο ὥστε νὰ δημιουργοῦν στὸν ἀκροατὴ τὸ κίνητρο καὶ τὸ ἐνδιαφέρον γιὰ τὴν ἀπόκτηση τῆς ἐπιπλέον παρεχόμενης γνώσης καὶ ἐνημέρωσης. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δύσκολα ἐπιτυγχάνεται. Θὰ μποροῦσε λ.χ. ὁ ἑκάστοτε ὁμιλητής, ἐπεκτείνοντας καταλλήλως τὴν συνήθη μαθηματικὴ γλώσσα καὶ τὸν συμβολισμὸ ποὺ χρησιμοποιεῖ, νὰ καταφέρει ὥστε ὁ ἀκροατὴς νὰ ἀποδεχθεῖ, ἔστω καὶ διαισθητικά, τὶς γνώσεις καὶ τὶς ἐνημερωτικὲς πληροφορίες ποὺ τοῦ παρέχονται, χωρὶς δηλαδὴ νὰ τοῦ δοθοῦν πλήρεις καὶ λεπτομερεῖς μαθηματικὲς ἀποδείξεις.

Τὸ θέμα τῆς σωστῆς ἐκλαϊκεύσεως τῆς ἐπιστήμης εἶναι πράγματι κεφαλαιώδους σημασίας, διότι, ἂν τὸ εὐρὺ κοινὸ εἶναι καλύτερα καὶ σωστὰ ἐνημερωμένο γιὰ τὶς προόδους τῆς ἐπιστήμης, τότε ὁ προερχόμενος ἐξ αὐτοῦ ἐπιστήμων τοῦ μέλλοντος «ξεκινάει» τὴν ἐπιστημονική του πορεία ἀπὸ μιὰ ὑψηλότερη βαθμίδα. Ὁ Albert Einstein ἐπίστευε ὅτι εἶναι πολὺ σημαντικὸ νὰ δώσουμε, εὐσυνείδητα καὶ μὲ τρόπο εὐφυῆ, τὴν εὐκαιρία στὸ πλατὺ κοινὸ νὰ ἀποκτήσει ἐμπειρίες ἀπὸ τὶς προσπάθειες καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπιστημονικῆς ἔρευνας. Δὲν ἀρκεῖ ὁ καθένας μας νὰ ἀπευθύνεται στοὺς ὀλίγους «εἰδικοὺς» τοῦ κάθε τομέα τῆς ἐπιστήμης. Περιορίζοντας τὴν γνώση σὲ μιὰ μικρὴ ὁμάδα, ὁδηγοῦμε σὲ νέκρωση τὸ φιλοσοφικὸ πνεῦμα τοῦ λαοῦ μας, κι αὐτὸ ὁδηγεῖ σὲ πνευματικὴ πενία.

Ἕνα γεγονὸς ποὺ ἐνισχύει τὶς παραπάνω ἀπόψεις εἶναι ὅτι στὸ Διεθνὲς Μαθηματικὸ Συνέδριο-1998, ποὺ θὰ λάβει χώραν στὸ Βερολίνο ἀπὸ 18-27 Αὐγούστου 1998, ἕνας ἀπὸ τοὺς 19 τομεῖς δραστηριοτήτων τοῦ συνεδρίου εἶναι ἀφιερωμένος στὴν «Διδασκαλία καὶ Ἐκλαΐκευση τῶν Μαθηματικῶν».

Καὶ τώρα ἐπὶ τοῦ θέματος.

Παντοῦ στὴν φύση, ἡ «χρυσὴ τομὴ» ἐκφράζει τὴν κομψὴ ἀναλογία ποὺ παρατηρεῖται στὸν ἀστερία, στὴν διάταξη τῶν φύλλων κατὰ μῆκος τῶν μίσχων τῶν φυτῶν, στὴν διάταξη τῶν σπόρων τοῦ ἡλίανθου, κ.ἄ. Τὸ φαινόμενο αὐτὸ ἦταν φυσικὸ νὰ ἐπηρεάζει συχνὰ τοὺς καλλιτέχνες, τοὺς ἀρχιτέκτονες καὶ τοὺς μουσουργοὺς [14, 15, 21, 22].

Ὅταν λέμε «χρυσὴ τομὴ» ἐννοοῦμε τὴν διαίρεση ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος σὲ δύο ἄνισα μέρη ἔτσι ὥστε ὁ λόγος τοῦ μικρότερου μήκους a, πρὸς τὸ μεγαλύτερο μῆκος b, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τοῦ μήκους b πρὸς τὸ συνολικὸ μῆκος a + b τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (Σχ. 1), ἤτοι

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

Σχ. 1

Σχ. 2

Γιὰ νὰ ἁπλουστεύσομε τὰ πράγματα ὑποθέτομε ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ὑπὸ διαίρεση εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ἴσον μὲ 1 καὶ ὅτι τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ δύο τμήματα ἔχει μῆκος x, (Σχ. 2). Τότε ἡ χρυσὴ τομὴ εἶναι ἡ διαίρεση τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μήκους 1, γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

Λύνοντας τὴν τελευταία αὐτὴ ἐξίσωση ὡς πρὸς x καὶ συμβολίζοντας μὲ τὸ γράμμα φ τὸν κοινὸ λόγο εὑρίσκομε

$$\varphi = \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

Ὁ λόγος φ ἢ ὁ ἀντίστροφός του ($(\sqrt{5}+1)/2 = 1.618$) καλεῖται «χρυσὸς λόγος» ἢ «χρυσὸς ἀριθμὸς» ἢ «χρυσὴ ἀναλογία», ἢ ὅπως τὸν ἀποκαλοῦσε ὁ Kepler, «θεία ἀναλογία», καὶ θεωρεῖται ἀπὸ αἰσθητικῆς πλευρᾶς ὅτι εἶναι ἡ πιὸ εὐχάριστη ἀναλογία.

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος τῆς χρυσῆς τομῆς εὑρίσκεται στὸ μνημειῶδες ἔργο τοῦ Εὐκλείδη ΣΤΟΙΧΕΙΑ (Βιβλίο II). Τὸ πρόβλημα πιθανὸν νὰ εἶχε ἀπασχολήσει καὶ τοὺς πυθαγορείους.

Μετὰ ἀπὸ 24 αἰῶνες [32] ἡ χρυσὴ τομὴ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἀντικείμενο συζητήσεων καὶ σχολίων. Ἡ ἀναλογία τῆς χρυσῆς τομῆς ἔχει παρατηρηθεῖ στὶς διαστάσεις τοῦ Παρθενῶνα καὶ σὲ ἐκεῖνες διαφόρων ἀγγείων τῆς ἰδίας ἐποχῆς. Ἐπίσης ἡ Μεγάλη Πυραμίδα τῆς Αἰγύπτου καὶ τὸ κτίριο τῶν Ἡνωμένων Ἐθνῶν ἀνταποκρίνονται στὴν χρυσὴ τομή.

Ἡ ἀναλογία τῆς χρυσῆς τομῆς παράγεται, ἐπίσης, ἀπὸ τὴν ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,..., ὅπου κάθε ὅρος (ἐκτὸς τῶν δύο πρώτων) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς εἶναι γνωστοὶ ὡς «ἀριθμοὶ Fibonacci» καὶ ἀνακαλύφθηκαν ἀπὸ τὸν μαθηματικὸ τοῦ 13ου αἰ. Leonardo τῆς Πίζας, ὁ ὁποῖος εἶναι γνωστὸς καὶ ὡς Filius Bonacci. Τὸ πηλίκον κάθε ἀριθμοῦ τῆς ἀκολουθίας διὰ τοῦ προηγουμένου του τείνει στὸν χρυσὸ λόγο $1/\varphi$. Ἔχομε, $13/8 = 1{,}625$, $21/13=1.615$, $55/34=1.618$ κ.ο.κ.

Ἡ ἀναλογία ποὺ παρουσιάζουν οἱ ἀριθμοὶ Fibonacci ἔχει παατηρηθεῖ στὴν κλίση τῶν φύλλων διαφόρων φυτῶν (ὅπως τὸ ἡλιοτρόπιο) ὡς πρὸς τὸν κορμό τους. Στὸν ἄνθρωπο, ὁ λόγος τοῦ ἀναστήματός του πρὸς τὴν ἀπόσταση τοῦ ὀμφαλοῦ ἀπὸ τὰ δάχτυλα τῶν ποδιῶν του εἶναι περίπου ἴσος πρὸς τὸν χρυσὸ λόγο.

Ἂν ὁ λόγος τῶν διαστάσεων ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρυσὸ λόγο, τότε τὸ ὀρθογώνιο καλεῖται «χρυσὸ ὀρθογώνιο». Οἱ ἀναλογίες τοῦ χρυσοῦ ὀρθογωνίου ἐμφανίζονται συχνὰ στὴν κλασσικὴ Ἑλληνικὴ Τέχνη καὶ στὴν ἀρχιτεκτονική, εἶναι δὲ τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τὰ πιὸ εὐχάριστα στὴν ὅρασή μας.

Οἱ Γερμανοὶ ψυχολόγοι Gustav Theodor Fechner (1801-1887) καὶ Wilhelm Wundt (1832-1920) παρατήρησαν, σὲ μιὰ σειρὰ ψυχολογικῶν πειραμάτων, ὅτι οἱ περισσότεροι ἄνθρωποι προτιμοῦν, ὑποσυνείδητα, τὶς διαστάσεις τοῦ χρυσοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν αὐτοὶ ἐπιλέγουν ζωγραφικοὺς πίνακες, κάρτες, καθρέπτες, δέματα καὶ ἄλλα ἀντικείμενα αὐτοῦ τοῦ σχήματος. Ὅμως οἱ ψυχολόγοι δὲν φαίνεται νὰ γνωρίζουν γιατί τὸ χρυσὸ ὀρθογώνιο ἀσκεῖ μιὰ τόσο μεγάλη αἰσθητικὴ γοητεία.

Ἡ σχέση τῆς χρυσῆς τομῆς προσέλαβε σχεδὸν μυστικιστικὲς διαστάσεις στὶς ἀπόψεις ὁρισμένων στοχαστῶν τῆς Ἀναγέννησης καὶ χρησιμοποιήθηκε κατὰ κόρον ἀπὸ ζωγράφους ὅπως ὁ Pierro della Francesca (1410-1492).

Τὸ ἔντονο ἐνδιαφέρον γιὰ ἕνα σύστημα ἀναλογιῶν ποὺ νὰ προσεγγίζει τὴν χρυσὴ τομὴ ὤθησε τοὺς «Ὀρφιστὲς» (ὁ ὅρος ἐπινοήθηκε τὸ 1913 ἀπὸ τὸν ποιητὴ Guillaume Apollinaire, 1880-1918) νὰ δώσουν τὸν τίτλο Section d'Or, σὲ ἔκθεση ποὺ ὀργάνωσαν τὸ 1912, καὶ σὲ ἕνα περιοδικὸ ποὺ ἐξέδωσαν τὸν ἴδιο χρόνο.

Οἱ J. Benjafield καὶ J. Adams - Webber [2], («The golden section hypothesis», British Journal of Psychology 67, 1976) διετύπωσαν τὴν λεγόμενη «Ὑπόθεση τῆς χρυσῆς τομῆς» κατὰ τὴν ὁποίαν, ὅταν κάποιος πρόκειται νὰ χωρίσει μιὰ ποσότητα σὲ δύο ἄνισα μέρη, ἔχει τὴν τάση νὰ χωρίσει τὴν ποσότητα ἔτσι ὥστε ἡ διαίρεση νὰ προσεγγίζει τὴν χρυσὴ τομή.

Μετὰ τὰ σχετικὰ περὶ χρυσῆς τομῆς τὰ ὁποῖα ἀναφέραμε παραπάνω καὶ τὰ ὁποῖα ἦταν ἀναγκαῖα γιὰ τὴν πληρότητα τοῦ κειμένου ποὺ θὰ δοθεῖ στὰ Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἐρχόμαστε στὸ κύριο μέρος τῆς ὁμιλίας ὅπου εἰδικότερα θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν χρυσὴ τομὴ στὶς σονάτες γιὰ πιάνο τοῦ Mozart.

Σὲ μερικές, σχετικῶς πρόσφατες, δημοσιευθεῖσες ἐργασίες ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀποτελεῖ καὶ διδακτορικὴ διατριβὴ (Ph.D), ὑποστηρίζεται ὅτι τὸ ἔργο τοῦ Mozart ἀντανακλᾶ τὴν ὕπαρξη σ' αὐτὸ τῆς χρυσῆς τομῆς (7,35].

Στὰ ὅσα ἀκολουθοῦν θὰ προσπαθήσουμε νὰ μεταφέρομε [37] μερικὰ ὑπάρχοντα, σχετικὰ μὲ τὸ θέμα, δεδομένα (data) γιὰ νὰ κρίνομε ἂν ὄντως ὑπάρχουν λόγοι οἱ ὁποῖοι συνηγοροῦν ὑπὲρ τῆς ὑπάρξεως τῆς δομῆς τῆς χρυσῆς τομῆς στὸ ἔργο αὐτὸ τοῦ Mozart.

Ἀκόμα καὶ ἕνας ἁπλὸς ἀκροατὴς ὁ ὁποῖος δὲν ἀκούει τακτικὰ μουσικὴ τοῦ Mozart, διακρίνει σ' αὐτὴν κάτι ποὺ τοῦ εἶναι γνώριμο. Ἡ μουσικὴ δηλαδὴ τοῦ μεγάλου αὐτοῦ καλλιτέχνη δὲν εἶναι μόνο θαυμάσια, ἀλλὰ μετὰ τὸ ἄκουσμά της παραμένει μέσα μας, στὴν μνήμη μας. Οἱ ἀσχοληθέντες καὶ οἱ ἀσχολούμενοι μὲ τὸ ἔργο τοῦ Mozart [34,1,20] δὲν παύουν νὰ ἐπαναλαμβάνουν ὅτι ἡ ἰδιοφυΐα τοῦ συνθέτη διαφαίνεται στὴν μορφή, στὴν τέλεια ἰσορροπία καὶ στὶς συμμετρικὲς ἀναλογίες ποὺ ὑπάρχουν στὸ ἔργο του. Ὁ συνθέτης χαρακτηρίζεται ὡς ἔχων σύμφυτη τὴν αἴσθηση τῶν ἀναλογιῶν. Ὁ Eric Blom [5] γράφει ὅτι ὁ Mozart διέθετε ἕνα ἀλάνθαστο αἰσθητήριο γιὰ νὰ ἐκφράζει στὸ ἔργο του μὲ ἀκρίβεια τὸ «σωστὸ» θέμα στὴν «κατάλληλη» στιγμὴ καὶ νὰ δίνει σ' αὐτὸ τὸ «σωστὸ» μῆκος.

Εἶναι γνωστό, ἀκόμα καὶ ἀπὸ τοὺς ἀρχαιότατους χρόνους, ὅτι τὰ μαθηματικὰ καὶ ἡ μουσικὴ διαπλέκονται ἁρμονικὰ μεταξύ τους ἔτσι ὥστε δὲν ἐκπλήσσει καθόλου τὸ γεγονὸς ἡ ὕπαρξη σὲ ἕνα ἄτομο ταλέντου στὴν μουσικὴ ἢ στὰ μαθηματικὰ νὰ συνοδεύεται στὸ ἴδιο ἄτομο μὲ τὴν ὕπαρξη ἐνθουσιασμοῦ γιὰ τὰ μαθηματικὰ ἢ γιὰ τὴν μουσικὴ ἀντιστοίχως. Αὐτὸ συνέβη μὲ τὸν Mozart. Μεγάλος ἦταν ὁ ἐνθουσιασμός του γιὰ τὰ μαθηματικά. Ἡ ἀδελφή του, ἡ Nannerl, ἀναφέρει ὅτι τὴν ἐποχὴ ποὺ ὁ ἀδελφός της μάθαινε ἀριθμητική, εἶχε αὐτὸς ἀφοσιωθεῖ ὁλοκληρωτικὰ στὴ μελέτη τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων τους σὲ τέτοιο βαθμὸ ὥστε «δὲν μιλοῦσε καὶ δὲν σκέφτονταν τίποτε ἄλλο ἐκτὸς ἀπὸ ἀριθμούς»[19]. Ἡ Nannerl θυμᾶται ὅτι ὁ Mozart εἶχε καλύψει τοὺς τοίχους τοῦ κλιμακοστασίου καὶ ὅλων τῶν δωματίων του σπιτιοῦ τους μὲ ἀριθμούς, στὴ συνέχεια δὲ ἔκανε τὸ ἴδιο, ἐπεκταθεὶς στὰ σπίτια τῶν γειτόνων τους!

Ὅταν ὁ Mozart ἦταν 14 ἐτῶν, εἶχε γράψει στὴν ἀδελφή του καὶ τῆς εἶχε ζητήσει νὰ τοῦ στείλει ἀριθμητικοὺς πίνακες καὶ περισσότερες ἀσκήσεις ἀριθμητικῆς [25], (γράμμα 21 Ἀπριλίου 1770, καὶ γράμμα 19 Μαΐου 1770).

Στὰ περιθώρια τοῦ χειρογράφου, τοῦ ἔργου του «Fantasia and Fugue» σὲ ντὸ μείζονα, διακρίνονται οἱ ὑπολογισμοὶ ποὺ εἶχε κάνει ὁ Mozart προσπαθώντας νὰ βρεῖ ποιὰ ἦταν ἡ πιθανότητα νὰ κερδίσει σὲ κάποιο λαχεῖο [18].

Ὁ Alfred Einstein, ἕνας ἀπὸ τοὺς βιογράφους τοῦ Mozart γράφει: «Ἡ εὐχαρίστηση νὰ παίζει μὲ τοὺς ἀριθμοὺς παρέμεινε στὸν Mozart ἐφ' ὅρου ζωῆς». Ἔτσι, ἀσχολήθηκε κάποτε μὲ τὸ «πρόβλημα», ποὺ ἦταν πολὺ δημοφιλὲς στὴν ἐποχή του, τῆς συνθέσεως «μινουέτων» κατὰ τρόπον «μηχανικό», θέτοντας δηλαδὴ δίμετρα μελωδικὰ τμήματα τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο κατὰ ὁποιαδήποτε τάξη. Ἐπίσης σώζεται σελίδα μὲ μουσικὰ σχεδιάσματα (sketches) στὴν ὁποία εἶχε ἀρχίσει νὰ ὑπολογίζει τὴν ἀμοιβὴ ποὺ ὁ ἐφευρέτης τοῦ σκακιοῦ εἶχε ζητήσει ἀπὸ τὸν βασιλιὰ στὸν ὁποῖο εἶχε παρουσιάσει τὴν ἐφεύρεσή του [9].

Στὴν ἡλικία τῶν 18 ἐτῶν ὁ Mozart εἶχε ἤδη συνθέσει τὴν πρώτη του σονάτα γιὰ πιάνο [17,29]. Ὡς γνωστὸν ἡ σονάτα εἶναι μουσικὴ σύνθεση, γιὰ ἕνα ἢ δύο ὄργανα, ἀποτελούμενη ἀπὸ τρία ἢ τέσσερα μέρη διαφορετικῆς ρυθμικῆς ἀγωγῆς. Ὁ Mozart συνέθεσε συνολικὰ 19 σονάτες, τὶς περισσότερες σὲ ἡλικία μεταξὺ 18 καὶ 22 ἐτῶν, καὶ σχεδὸν ὅλες ἀποτελοῦνται ἀπὸ τρία μέρη.

Στὴν ἐποχὴ τοῦ Mozart κάθε μέρος μιᾶς σονάτας ἀπετελεῖτο ἀπὸ δύο τμήματα [26,28,30,23], ἤτοι ἀπὸ τὴν «Εἰσαγωγὴ» (Exposition) στὴν ὁποία εἰσάγεται τὸ μουσικὸ θέμα καὶ τὴν «Ἀνάπτυξη καὶ Ἐπανάληψη» (Development and Recapitulation) ὅπου ἀναπτύσσεται τὸ θέμα καὶ ἐπαναλαμβάνεται (Σχ. 3). Κατὰ κανόνα

Σχ. 3

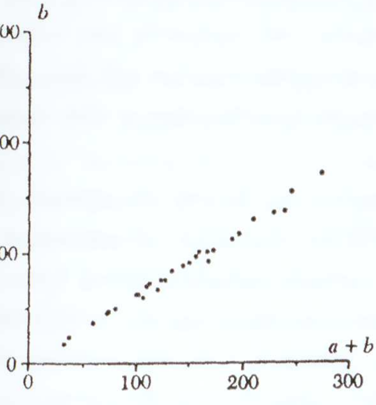
κάθε τμῆμα ἐπαναλαμβάνεται κατὰ τὴν ἐκτέλεση [24] (ὅπως ὑποδεικνύει τὸ πρὸς τοῦτο χρησιμοποιούμενο σύμβολο:|). Ἡ διαίρεση τοῦ μέρους τῆς σονάτας σὲ δύο τμήματα εἶναι καὶ ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο ὁ μελετητὴς θέλει νὰ ἐρευνήσει τὸν τρόπο κατὰ τὸν ὁποῖο ὁ Mozart κάνει τὴν κατανομὴ τῶν μουσικῶν μέτρων στὰ ἔργα αὐτά. Ὁ κατωτέρω πίνακας παρέχει μιὰ συλλογὴ δεδομένων (data) γιὰ ὅλα τὰ μέρη στὶς σονάτες τοῦ Mozart τὰ ὁποῖα εἶναι διηρημένα σὲ δύο τμήματα, τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνεται κατὰ τὴν ἐκτέλεση. Ἀπὸ τὰ 56 μέρη τὰ 29 εἶναι κατασκευασμένα κατὰ τὸν τρόπο ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω. Τὰ δεδομένα (data) εἶναι ἀριθμοὶ [6] οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὸ μῆκος κάθε τμήματος, πόσα δηλαδὴ μουσικὰ μέτρα περιλαμβάνει τὸ κάθε τμῆμα. Πιὸ συγκεκριμένα: τὸ α παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ τμήματος «Εἰσαγωγὴ» καὶ τὸ b παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ τμήματος «Ἀνάπτυξη καὶ Ἐπανάληψη». Γιὰ τοὺς πιὸ ἐνήμερους περὶ τὰ μουσικὰ θέματα θὰ ἤθελα νὰ διευκρινίσω ὅτι τὰ codas, ὅταν αὐτὰ ὑπάρχουν, δὲν θεωροῦνται ὅτι ἀποτελοῦν μέρος τοῦ δευτέρου τμήματος.

ΠΙΝΑΚΑΣ [37]

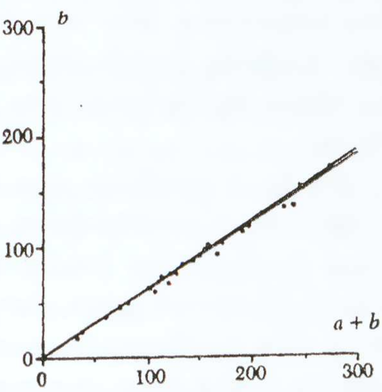
Köchel	*a*	*b*	*a* + *b*
279, I	38	62	100
279, II	28	46	74
279, III	56	102	158
280, I	56	88	144
280, II	24	36	60
280, III	77	113	190
281, I	40	69	109
281, II	46	60	106
282, I	15	18	33
282, III	39	63	102
283, I	53	67	120
283, II	14	23	37
283, III	102	171	273
284, I	51	76	127
309, I	58	97	155
310, I	49	84	133
311, I	39	73	112
330, I	58	92	150
330, III	68	103	171
332, I	93	136	229
332, III	90	155	245
333, I	63	102	165
333, II	31	50	81
457, I	74	93	167
533, I	102	137	239
533, II	46	76	122
545, I	28	45	73
547a, I	78	118	196
570, I	79	130	209

Ὁ Πίνακας ἔχει ληφθεῖ ἀπὸ ἕνα γενικὸ κατάλογο καταγραφῆς μουσικῶν ἔργων (Köchel). Τὸ πρῶτο μέρος τῆς πρώτης σονάτας, ποὺ στὸν κατάλογο φέρει τὸν ἀριθμὸ K279, ἔχει μῆκος 100 μουσικὰ μέτρα καὶ διαιρεῖται ἔτσι ὥστε τὸ τμῆμα «Ἀνάπτυξη καὶ Ἐπανάληψη» νὰ ἔχει μῆκος 62. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 100φ (φ=χρυσὸς λόγος) ἰσοῦται, κατὰ προσέγγιση τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου μὲ 62. (Ἐδῶ τὰ μήκη εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διότι παριστάνουν πλῆθος μουσικῶν μέτρων). Ἔχομε λοιπὸν στὴν πρώτη αὐτὴ σονάτα μιὰ «χρυσὴ τομὴ» τοῦ μήκους τῶν 100 μέτρων στὰ μέρη 38 καὶ 62 ὅπου $38/62 \approx \varphi$.

Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὸ δεύτερο μέρος τῆς ἴδιας σονάτας. Τὸ μῆκος 74 δὲν θὰ μποροῦσε νὰ διαιρεθεῖ πλησιέστερα πρὸς τὴν χρυσὴ τομὴ ἀπὸ τὴν διαίρεση στὰ



Σχ. 4

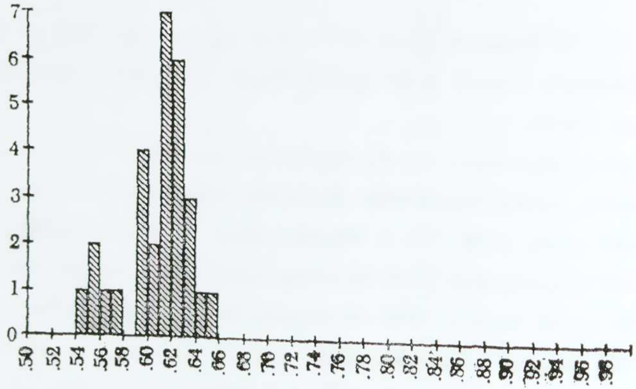


Σχ. 5

μέρη 28 καὶ 46. Ἡ διαίρεση ὅμως τοῦ τρίτου μέρους τῆς ἴδιας σονάτας K279 δὲν εἶναι ἡ πλησιέστερη δυνατὴ στὴν χρυσὴ τομή. Θὰ ἦταν ἡ πλησιέστερη, ἂν ἀντὶ b=102 εἴχαμε b=98.

Γιὰ νὰ μπορέσομε ὅμως νὰ ἀξιολογήσομε τὸν βαθμὸ συνεπείας τῶν δεδομένων τοῦ Πίνακος, καταφεύγομε στὴν ἀκόλουθη ἀπεικόνιση τῶν μηκῶν b σὲ σχέση μὲ τὰ συνολικὰ μήκη α+b. Ἂν ὁ Mozart εἶναι ἀπόλυτα συνεπής, ἔκανε δηλαδὴ τὴν διαίρεση σὲ τμήματα ἔτσι ὥστε οἱ λόγοι b/(α+b) νὰ εὑρίσκονται ὅσο τὸ δυνατὸ πιὸ κοντὰ στὴν χρυσὴ τομὴ φ, τότε τὰ σημεῖα (α+b, b) θὰ βρίσκονται πολὺ κοντὰ στὴν εὐθεία τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωση εἶναι $\psi=\varphi\chi$. Στὸ Σχ. 4 βλέπομε τὶς θέσεις τῶν σημείων (α+b, b) ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ δεδομένα τοῦ Πίνακα. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα (α+b, b) πλησιάζουν ὄντως πάρα πολὺ μιὰ εὐθεία. Στὴν Στατιστική, ὅταν βρισκόμαστε ἐνώπιον περιπτώσεων ὅπως αὐτὴ τοῦ Σχ. 4 προσπαθοῦμε νὰ χαράζομε τὴν εὐθεία γραμμὴ ἡ ὁποία πλησιάζει τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος ὅσο τὸ δυνατὸν «περισσότερο» Ἡ γραμμὴ αὐτή καλεῖται «γραμμὴ» παλινδρομήσεως» (regression line) καὶ χαράσσεται μὲ μιὰ μέθοδο ἡ ὁποία καλεῖται «μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων». Ἀφοῦ οἱ στατιστικολόγοι χαράξουν τὴν γραμμὴ παλινδρομήσεως, θέτουν τὸ ἐρώτημα: «πόσο ἱκανοποιητικὰ ἡ γραμμὴ αὐτὴ πλησιάζει τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος μας;» Γιὰ νὰ ἀπαντήσουν στὸ ἐρώτημα αὐτὸ χρησιμοποιοῦν τὸν λεγόμενο «συντελεστὴ συσχετίσεως» (correlation coefficient) ὁ ὁποῖος συμβολίζεται διεθνῶς μὲ τὸ γράμμα r. Ὁ ἀριθμὸς r, ὁ ὁποῖος ὑπολογίζεται βάσει τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος ποὺ μελετοῦμε, κυμαίνεται μεταξὺ τοῦ —1 καὶ τοῦ +1. Ὅσο πιὸ κοντὰ στὸ —1 ἢ στὸ +1 εὑρίσκεται τὸ r τόσο πιὸ ἱκανοποιητικὰ ἡ γραμμὴ παλινδρομήσεως θεωρεῖται ὅτι πλησιάζει τὰ σημεῖα τοῦ σχήματός μας. Ἂν τύχει νὰ ἔχομε r=—1 ἢ r=+1, τότε ἡ γραμμὴ παλινδρομήσεως εἶναι ἀπολύτως ἱκανοποιητικὴ διότι τότε ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σχήματός μας κεῖνται ἐπ' αὐτῆς. Ἀντιθέτως, ἂν r=0, τότε οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων τοῦ σχήματός μας εἶναι τελείως ἄσχετες μεταξύ τους, ἡ δὲ γραμμὴ παλινδρομήσεως τότε εἶναι ἀπαράδεκτη.

Στὸ Σχ. 4 προσθέτομε τώρα δύο γραμμὲς (Σχ. 5) ἤτοι τὴν γραμμὴ ψ=φΧ καὶ τὴν γραμμὴ παλινδρομήσεως ψ=—0,003241+0,6091 x Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γραμμή ψ=φΧ ἐλάχιστα διαφέρει ἀπὸ τὴν γραμμὴ παλινδρομήσεως, ὅπως δείχνει τὸ Σχ. 5. Ἡ γραμμὴ ψ=φΧ εὑρίσκεται ὑπεράνω τῆς γραμμῆς παλινδρομήσεως διότι ἡ κλίση της εἶναι κάπως μεγαλύτερη. Ἐπίσης ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως r εἶναι ἄκρως ἱκανοποιητικὴ διότι ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι r = 0,99.



Σχ. 6

Κατανομὴ συχνότητας τῶν b / (a+b)

Τέλος ἡ ἀπεικόνιση τῆς κατανομῆς συχνότητος τοῦ λόγου b/(α+b) (σχ. 6) δείχνει ὅτι οἱ λόγοι b/(α+b) συγκεντρώνονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον κοντὰ στὸν χρυσὸ λόγο φ.

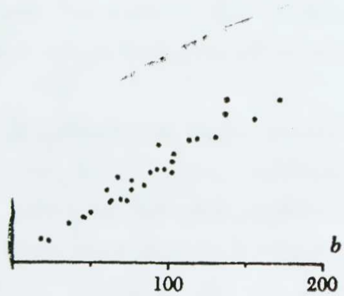
Τὰ παραπάνω ἐκτεθέντα φαίνεται νὰ ἀποτελοῦν μιὰ ἐντυπωσιακὴ ἀπόδειξη ὅτι ὁ Mozart ὑπῆρξε συνεπὴς διότι ἡ διαίρεση τῶν μερῶν στὶς σονάτες του ἀκολουθεῖ τὴν χρυσὴ τομή.

Προτοῦ ὅμως βιαστοῦμε νὰ καταλήξομε σὲ κάποιο τελικὸ συμπέρασμα, ἂς ἀναλύσομε τὰ δεδομένα (data) μας κατὰ ἕνα διαφορετικὸ τρόπο. Ὅπως ἀναφέραμε στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας, ἂν τὸ μέρος κάποιας σονάτας διαιρεθεῖ (περίπου) κατὰ τὴν χρυσὴ τομή, τότε οἱ λόγοι α/b καὶ b/(α+b) ὀφείλουν νὰ εἶναι πολὺ κοντὰ στὸν ἀριθμὸ φ. Ἐμεῖς μέχρι στιγμῆς ἀσχοληθήκαμε μὲ τὸν λόγο b/(α+b). Ἂς δοῦμε τώρα τί συμβαίνει μὲ τὸν λόγο α/b.

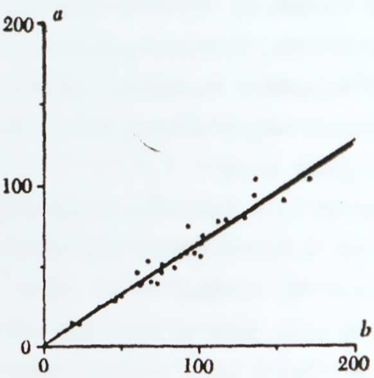
Τὸ Σχ. 7 εἶναι γιὰ τὸν λόγο a/b, τὸ ἀνάλογο τοῦ Σχ. 4 ποὺ ἀφορᾶ τὸν λόγο b/a+b).

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὸ Σχ. 7 τὰ σημεῖα (b, α) πλησιάζουν κάποια εὐθεία, ὄχι ὅμως στὸν βαθμὸ ποὺ πλησιάζουν τὰ σημεῖα (α+b, b) τὴν ἀντίστοιχη εὐθεία στὸ Σχ. 4. Ἂν τώρα στὸ Σχ. 7 προσθέσομε (ὅπως κάναμε καὶ στὴν περίπτωση τοῦ Σχ. 4) τὴν γραμμὴ ψ=φΧ καὶ τὴν γραμμὴ παλινδρομήσεως, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωση στὴν περίπτωση τοῦ λόγου α/b ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι ψ=1, 36+ 0,626 Χ, λαμβάνομε τὸ Σχ. 8. Παρατηροῦμε πάλι ὅτι ἡ γραμμὴ παλινδρομήσεως εὑρίσκεται ὑπεράνω τῆς γραμμῆς ψ=φΧ καὶ ὅτι διαφέρει ἀνεπαίσθητα ἀπὸ αὐτήν. Ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως r στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι r=0,97, εἶναι δηλαδὴ κάπως ὀλιγότερο ἱκανοποιητικὸς ἀπὸ αὐτὸν ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ Σχ. 5. Τέλος ἡ κατανομὴ συχνότητας τοῦ α/b εἶναι λιγότερο ἱκανοποιητικὴ ἀπὸ ἐκείνη ποὺ δίδει τὸ Σχ. 6 (βλ. Σχ. 9).

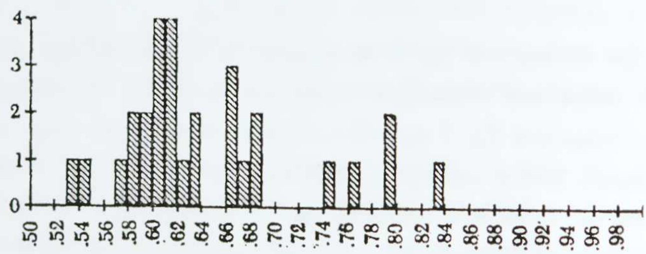
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω προβάλλει φυσιολογικὰ τὸ ἐρώτημα: γιατί οἱ δύο αὐτὲς ἀναλύσεις τῶν δεδομένων (data) δὲν μᾶς ὁδηγοῦν στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα; Ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ δίδεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο θεώρημα τὸ ὁποῖο μᾶς βεβαιώνει ὅτι αὐτὸ ποὺ παρατηρήσαμε νὰ συμβαίνει μὲ τὰ δεδομένα μας στὴν συγκεκριμένη περίπτωση ποὺ ἐξετάζομε (ὅταν δηλαδὴ οἱ δύο ἀναλύσεις δὲν μᾶς ὁδηγοῦν στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα) συμβαίνει καὶ μὲ τὰ δεδομένα ποὺ ἔχει κανεὶς σὲ ὁποιαδήποτε ἄλλη περίπτωση. Μὲ ἄλλα λόγια ὁ λόγος b/(α+b) εὑρίσκεται πάντοτε πιὸ κοντὰ στὸ φ ἀπὸ ὅτι εἶναι τὸ α/b.



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9
Κατανομὴ συχνότητας τῶν α/b

Θ ε ώ ρ η μ α [10]

Αν $0 \leq \alpha \leq b$ τότε

$$\left| \frac{b}{\alpha+b} - \varphi \right| \leq \left| \frac{\alpha}{b} - \varphi \right|$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ η. Θέτομε $x=\alpha/b$. Θὰ ἀποδείξομε ὅτι

$$\left| \frac{1}{1+x} - \varphi \right| \leq \left| x - \varphi \right|, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Θέτομε $f(x)=1/(x+1)$. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς ἔχομε ὅτι γιὰ κάθε $x \varepsilon [0,1]$ ὑπάρχει ἕνα $\xi \varepsilon (0,1)$ τέτοιο ὥστε

$$\left| f(x) - f(\varphi) \right| = \left| f'(\xi) \right| \left| x - \varphi \right|$$

῾Η παράγωγος $f'(x)=-1/(x+1)^2$ ἱκανοποιεῖ τὴν σχέση

$$\frac{1}{4} < \left| f'(x) \right| < 1$$

γιὰ $x\varepsilon(0,1)$. ῞Ενας ἁπλὸς ὑπολογισμὸς ἀποδεικνύει ὅτι τὸ φ εἶναι ἕνα σταθερὸ σημεῖο τῆς ἀπεικονίσεως f.

῎Ητοι $f(\varphi)=\varphi$. Συνεπῶς γιὰ ὅλα τὰ $x\varepsilon[0,1]$ εἶναι

$$\left| \frac{1}{1+x} - \varphi \right| \leq \left| x - \varphi \right|$$

ἡ δὲ ἰσότητα λαμβάνει χώραν γιὰ $x=\varphi$.

Γνωρίζομε λοιπὸν ὅτι δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ b, ὅπου $0 \leqslant \alpha \leqslant b$, τότε ὁ λόγος $b/(\alpha+b)$ εἶναι πλησιέστερα στὸ φ ἀπὸ τὸν λόγο α/b. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ὅταν πρόκειται νὰ ἀναλύσομε δεδομένα (data) σὲ περιπτώσεις σὰν κι αὐτὴν ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ στὴν παροῦσα ὁμιλία, εἶναι φρονιμότερο νὰ περιορίσομε τὴν ἔρευνά μας στὸ πῶς συμπεριφέρεται ὁ λόγος α/b.

῎Εχοντας τώρα κατὰ νοῦν τὴν τελευταία αὐτὴ πληροφορία ποὺ προέκυψε ἀπὸ τὸ παραπάνω θεώρημα, εἶναι φυσικὸ νὰ ἀναρωτηθεῖ κανεὶς ποιὲς τιμὲς θὰ ἦταν «λογικότερο» νὰ ἀναμένομε νὰ ἔχει ὁ λόγος α/b.

Βεβαίως θὰ ἦταν παράλογο νὰ σκεφθοῦμε ὅτι ἕνας συνθέτης, τουλάχιστον τῆς κλασσικῆς περιόδου, θὰ ἔγραφε ἕνα μέρος σονάτας συνολικοῦ μήκους, ἔστω 200 μουσικῶν μέτρων, τὸ ὁποῖο ἀστόχαστα θὰ διαιροῦσε σὲ δύο μέρη ὅπως 1 καὶ 199, ἢ 2 καὶ 198 ἢ ἀκόμα 10 καὶ 190, διότι τότε δὲν θὰ ὑπῆρχε ἀρκετὸ διάστημα νὰ ἐπιτύχει τὸν σκοπὸ ποὺ ἔχει νὰ ἐπιτελέσει τὸ πρῶτο τμῆμα, δηλαδὴ τὴν εἰσαγωγὴ τοῦ θέματος. ῾Ο Quantz ὑποστηρίζει ὅτι εἶναι ἀπαραίτητο νὰ ὑπάρχει κάποια ἰσόρροπη σχέση μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων. Κατ᾽ ἀρχὴν τὸ πρῶτο τμῆμα πρέπει νὰ εἶναι βραχύτερο ἀπὸ τὸ δεύτερο [27]. ῎Ετσι, ἂν ὅλο τὸ μέρος ἔχει μῆκος $m=\alpha+b$, τότε τὸ α, τὸ μικρότερο, πρέπει νὰ ἀπέχει κάποια «πρακτικὴ» ἀπόσταση ἀπὸ τὸ 0, νὰ μὴν εἶναι δηλαδὴ πολὺ κοντὰ στὸ 0 καὶ νὰ μὴν ὑπερβαίνει τὸ $m/2$. ῍Ας ὑποθέσομε λοιπὸν πρὸς στιγμὴν ὅτι $m/4 \leqslant \alpha \leqslant m/2$. Τὸ διάστημα αὐτὸ ἱκανοποιεῖ κατὰ κάποια ἔννοια τὶς τελευταῖες αὐτὲς συνθῆκες. ῍Ας ὑποθέσομε ὅτι οἱ τιμὲς τοῦ α εἶναι τυχαῖα κατανεμημένες στὸ διάστημα αὐτό. Τότε ἡ «ἀναμενόμενη τιμὴ» τοῦ λόγου α/b, ἡ ὁποία συμβολίζεται E (α/b), ἰσοῦται μὲ

$$E\,(a\,/\,b) \approx \frac{1}{m/4} \int_{m/4}^{m/2} \frac{x}{m-x}\, dx =$$

$$\frac{4}{m}\left(x + m \ln|x-m|\right)_{m/2}^{m/4} = 4 \ln \frac{3}{2} - 1 \approx 0{,}6219$$

Ἡ τιμὴ αὐτὴ διαφέρει ἀπὸ τὴν φ περίπου κατὰ 0,6%.

Φυσικὰ πρέπει νὰ παρατηρήσομε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα διαστήματα τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὶς ἀπαιτήσεις ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω καὶ τὰ ὁποῖα παρέχουν «ἀναμενόμενες τιμὲς» οἱ ὁποῖες ποικίλλουν κατὰ πολὺ μεταξύ τους. Τὰ δεδομένα τοῦ Πίνακός μας ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις $0{,}348\text{m} \leqslant \alpha \leqslant 0{,}455$ m. Στὸ τελευταῖο αὐτὸ διάστημα ἀντιστοιχεῖ ἡ «ἀναμενόμενη τιμὴ» $E(\alpha/b) \approx 0{,}6753$.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ κάνω μιὰ μικρὴ παρένθεση γιὰ νὰ ἐξηγήσω μὲ λίγα λόγια τί ἀκριβῶς σημαίνει στὴν «Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων» ὁ ὅρος «ἀναμενόμενη τιμὴ» ἢ ὅπως ἀλλιῶς λέγεται «μαθηματικὴ ἐλπὶς» (mathematical expectation).

Ὅταν ἕνας ὑπάλληλος μιᾶς ἀσφαλιστικῆς ἑταιρείας λέγει σὲ ἕνα ἄτομο 20 ἐτῶν ὅτι μπορεῖ νὰ «ἀναμένει» (νὰ ἐλπίζει) ὅτι θὰ ζήσει 53 χρόνια ἀκόμη, αὐτὸ βέβαια δὲν σημαίνει ὅτι τὸ ἄτομο αὐτὸ ἀφοῦ γιορτάσει τὴν 73η ἐπέτειο τῶν γενεθλίων του θὰ πεθάνει τὴν ἑπόμενη μέρα. Ἡ λέξη «ἀναμένει» στὴν περίπτωση αὐτὴ δὲν χρησιμοποιεῖται μὲ τὴν σημασία ποὺ ἔχει στὸν καθημερινὸ λόγο ἀλλὰ μὲ τὴν ἔννοια κάποιου μέσου ὅρου, μὲ τὴν ἔννοια τῆς λεγόμενης «μαθηματικῆς ἐλπίδας».

Ἡ ἔννοια «μαθηματικὴ ἐλπὶς» ἀνέκυψε γιὰ πρώτη φορὰ σὲ σχέση μὲ τὰ τυχερὰ παιχνίδια καὶ ἐσήμαινε τὸ γινόμενο τῆς πιθανότητας ποὺ ἔχει ὁ παίκτης νὰ κερδίσει, ἐπὶ τὸ ποσὸν ποὺ θὰ κερδίσει. Ἔτσι ὅταν παίζει κάποιος «κορώνα ἢ γράμματα», ἂν τὸ κέρδος εἶναι 1000 δρχ. στὴν περίπτωση ποὺ τὸ νόμισμα πέφτει κορώνα, τότε ἡ μαθηματικὴ ἐλπίδα εἶναι $(1/2) \times 1000 = 500$ δρχ. Ὁμοίως, ἂν ἀγοράσομε ἕνα ἀπὸ τοὺς 1000 λαχνοὺς ποὺ πουλιοῦνται γιὰ τὴν κλήρωση μιᾶς τηλεοράσεως ἀξίας 200.000 δρχ., τότε ἡ πιθανότητα κάθε λαχνοῦ νὰ κληρωθεῖ εἶναι 1/1000, ἡ δὲ μαθηματικὴ ἐλπὶς εἶναι $200000 \times (1/1000) = 200$ δρχ. Συνεπῶς θὰ ἦταν παράλογο νὰ πληρώσομε παραπάνω ἀπὸ 200 δρχ. γιὰ ἕνα λαχνό, ἤτοι παραπάνω ἀπὸ τὴν μαθηματικὴ ἐλπίδα ποὺ ἔχει κάθε λαχνός. Μιὰ πρώτη γενίκευση τῆς ἔννοιας τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδας δίδεται ἀπὸ τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό:

«Ἂν οἱ πιθανότητες νὰ κερδίσει κανεὶς τὰ ποσὰ α_1, α_2,..., αk ειναι ἀντιστοίχως p_1, p_2,..., p_k, τότε ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς εἶναι $\alpha_1 p_1 + \alpha_2, p_2 ... + \alpha \kappa p \kappa$». Μὲ ἄλλα λόγια κάθε ποσὸ πολλαπλασιάζεται μὲ τὴν ἀντίστοιχη πιθανότητα ποὺ ἔχει ὁ παίκτης νὰ τὸ κερδίσει, ἡ δὲ μαθηματικὴ ἐλπὶς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ποὺ λαμβάνομε κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α_1, α_2, ... αk εἶναι θετικοὶ ὅταν παριστάνουν κέρδη γιὰ τὸν παίκτη καὶ ἀρνητικοὶ ὅταν παριστάνουν ζημίες γι' αὐτόν. Π.χ. ἂν κανεὶς βάλει στοίχημα νὰ κερδίζει 1000 δρχ., ὅταν τὸ νόμισμα πέσει κορώνα καὶ νὰ χάνει 1000 δρχ. ἂν τὸ νόμισμα πέσει γράμματα, τότε τὰ παραπάνω ποσὰ α_1 καὶ α_2 εἶναι 1000 καὶ —1000, οἱ ἀντίστοιχες πιθανότητες εἶναι $p_1{=}0,50$, $p_2{=}0,50$ ἡ δὲ μαθηματικὴ ἐλπὶς εἶναι $1000 \times (0.50) + (-1000) \times (0,50) = 0$.

Ἐξάλλου σὲ κάθε ἔντιμο παιχνίδι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

Ὁ παραπάνω γενικευμένος ὁρισμὸς τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδας μπορεῖ νὰ γενικευθεῖ καὶ στὶς περιπτώσεις ὅπου τὸ α λαμβάνει τὶς τιμὲς μιᾶς συνεχοῦς μεταβλητῆς, ὅπως λ.χ. στὴν περίπτωση ποὺ μᾶς ἀπασχόλησε, ὅπου τὸ α μποροῦσε νὰ λάβει τιμὲς μεταξὺ τοῦ m/4 καὶ m/2. Τὸν γενικότερο αὐτὸ ὁρισμὸ ἐφαρμόσαμε προηγουμένως γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδας $E(\alpha/b){=}0,6219$. Ὅμως ἐπ' αὐτοῦ δὲν θὰ ἐπεκταθοῦμε περισσότερο.

Ἂς ἐξετάσομε ὅμως, ἐν κατακλεῖδι, ποῦ μᾶς ὁδηγεῖ ἡ παραπάνω ἀνάλυση τῶν δεδομένων γιὰ τὶς σονάτες τοῦ Mozart.

Ἡ σονάτα ὡς μουσικὴ σύνθεση ὁρισμένου ὕφους (style) ἐπιβάλλει ἀφ' ἑαυτῆς ὁρισμένους περιορισμοὺς οἱ ὁποῖοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὶς ὑποθέσεις ποὺ κάμνομε, δηλαδὴ ἀπὸ τοὺς γενικοὺς περιορισμοὺς ποὺ θέτομε ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς τοῦ μήκους τοῦ πρώτου τμήματος τοῦ μέρους τῆς σονάτας, ἤτοι τῆς μεταβλητῆς α. Οἱ περιορισμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἐκεῖνοι ποὺ ὑποχρεώνουν τὸν λόγο α/b νὰ πλησιάσει τὸν χρυσὸ λόγο, σὲ μερικὲς μάλιστα περιπτώσεις νὰ τὸν πλησιάσει πάρα πολύ. Ἐπιπλέον ἂς μὴ ξεχνοῦμε ὅτι οἱ σονάτες γιὰ τὶς ὁποῖες γίνεται λόγος στὴν σημερινὴ ὁμιλία εἶναι ἔργο μιᾶς μουσικῆς μεγαλοφυΐας ἡ ὁποία ἐλάτρευε τὰ μαθηματικὰ καὶ στὴν ὁποία ἄρεσε ὑπερβολικὰ νὰ παίζει μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ μὲ τὶς ἰδιότητές τους. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι πολὺ πιθανὸ ὁ Mozart νὰ ἐγνώριζε τὴν «χρυσὴ τομὴ» καὶ νὰ τὴν χρησιμοποίησε στὸ ἔργο του. Ἐξάλλου ἀπὸ τὴν ἀνάλυση ποὺ ἔγινε παραπάνω προκύπτουν ἰσχυρότατες ἐνδείξεις ὑπὲρ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς.

Κατὰ γενικὴν ὁμολογίαν ἡ χρυσὴ τομὴ πράγματι ἀποτελεῖ τὴν πλέον εὐχάριστη ἀναλογία, καὶ ἴσως ἡ τέλεια αἴσθηση τῆς «φόρμας» ποὺ εἶχε ὁ Mozart νὰ τὸν ὁδήγησε πρὸς τὴν χρυσὴ τομὴ τὴν ὁποία ἐθεώρησε ὡς προσφέρουσα τὴν ἰδανικὴ ἰσορροπία μεταξὺ ἀκραίων καταστάσεων. Διατυπώνουμε ἁπλῶς μιὰ ρομαντικὴ σκέψη.

Θὰ τελειώσω τὴν ὁμιλία μου μὲ τὰ γραφέντα τὸ 1854 ἀπὸ τὸν Τσέχο μουσικοκριτικὸ Eduard Hanslick (1824-1904) [13].

«Ἡ μουσικὴ τῆς Φύσης καὶ ἡ μουσικὴ τοῦ ἀνθρώπου ἀνήκουν σὲ δύο διαφορετικὲς κατηγορίες. Ἡ ὁδὸς μεταβάσεως ἀπὸ τὴν πρώτη κατηγορία στὴν δεύτερη διέρχεται διὰ τῆς Ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν». Μιὰ ἐνδιαφέρουσα καὶ πολλὰ σημαίνουσα πρόταση.

Ὡστόσο θὰ ἦταν λάθος νὰ ἐκληφθεῖ μὲ τὴν πρόταση αὐτὴ ὅτι ὁ ἄνθρωπος κατεσκεύασε τὸ μουσικό του σύστημα ἐκ προθέσεως, βάσει προκατασκευασμένων ἐπὶ τούτῳ ὑπολογισμῶν, διότι τὸ σύστημα αὐτὸ ἀνέκυψεν διὰ μέσου λεπτεπίλεπτων διαδικασιῶν, ἀπὸ τὴν μὴ συνειδητὴ ἐφαρμογὴ τῶν προϋπαρχουσῶν ἐννοιῶν τῆς «ποσότητας» καὶ τῆς «ἀναλογίας». Τοὺς νόμους ὅμως οἱ ὁποῖοι διέπουν τὶς ἐν λόγω διαδικασίες ἀνεκάλυψε καὶ ἀπέδειξε ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη ἀργότερα.

Σᾶς εὐχαριστῶ ποὺ εἴχατε τὴν ὑπομονὴ νὰ μὲ ἀκούσετε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. H. F. Amiel, *Amiel's Journal*, 2nd edition, Bretano's, New York, 1928.
2. J. Benjafield and J. Adams-Webber, The golden section hypothesis, *British Journal of Psychology* 67 (1976) 11-15.
3. J. Benjafield and C. Davis, The golden number and the structure of connotation, *Journal of Aesthetics and Art Criticism* 36 (1978) 423-427.
4. David Bergamini, *Mathematics*, Time - Life Books, New York, 1972.
5. Eric Blom, *Mozart*, J. M. Dent and Sons Ltd., London, 1962.
6. Nathan Broder, *Mozart: Sonatas and Fantasies for the Piano*, revised ed., Theodore Presser, Bryn Mawr, PA, 1960.
7. E. J. P. Camp, Temporal proportion: A study of sonata forms in the piano sonatas of Mozart, Ph. D. dissertation, Florida State University, 1968.
8. G. Duckworth, *Structural Patterns and Proportions in Virgil's Aeneid*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1962.
9. Alfred Einstein, *Mozart: His Character, His Work*, translated by Arthur Mendel and Nathan Broder, Oxford University Press, London, 1945.
10. Roger Fischler, How to find the «golden number» without really trying. *Fibonacci Quarterly* 19 (1981), 406-410.
11. Matila Ghyka, The Pythagorean and Platonic scientific criterion of the beautiful in classical western art, in *Ideological Differences and World Order*: Studies *in the Philosophy and Science of the World's Cultures*, edited by F. S. C. Northrop, Yale University Press, New Haven. CT, 1949.
12. Jay Hambidge, *The Elements of Dynamic Symmetry*, Yale University Press, New Haven, CT, 1959.

13. Eduard Hanslick, *The Beautiful in Music*, translated by Gustav Cohen, Liberal Arts Press, Indianapolis, 1957.
14. H. Hedian, The golden section and the artist, *Fibonacci Quarterly* 14 (1976) 406-418.
15. Roy Howat, *Debussy in Proportion: A Musical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
16. H. E. Huntley, *The Divine Proportion*, Dover Publications, Mineola, NY, 1970.
17. Arthur Hutchings, The keyboard music, in *The Mozart Companion*, edited by H. C. Robbins London and Donald Mitchell, W. W. Norton, New York, 1969.
18. A. Hyatt King, Mozart's piano music, The Music Review 5 (1944) 163-191.
19. A. Hyatt King, *Mozart* in *Retrospect*, Greenwood Press, Westport, CT, 1976.
20. H. C. Robbins London, The concertos:(2) Their musical origin and development, in *The Mozart Companion*, edited by H. Robbins London and Donald Mitchell, W. W. Norton, New York, 1969.
21. Le Corbusier, Le modulor, in *Le Corbusier, Oeuvres Completes* 1946-1952, 3e édition, Editions Girsberger, Zurich, 1961.
22. Ermö Lendvai, Béla Bartók: *An Analysis of His Music*, Kahn and Averill, London, 1971.
23. George Markowsky, Misconceptions about the golden ratio, Col. Math. J. 23 (1992) 2-19.
24. F. Helena Marks, *The Sonata, Its Form and Meaning as Exemplified in the Piano Sonatas by Mozart*, William Reeves, London, 1921.
25. Wolfgang A. Mozart et al., *The Letters of Mozart and His Family*, Vol. I, 2nd edition, translated by Emily Anderson, Macmillan, London, 1966.
26. William S. Newman, *The Sonata in the Classic Era*, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1963.
27. Johann Joachim Quantz, From the *Versuch einer Anweisung die Flote traversiere zu spielen, in Source Readings in Music History*, edited by Oliver Strunk, W. W. Norton, New York, 1950.
28. Leonard Ratner, Harmonic aspects of classic form, *J. of the Amer. Musicological Soc.* 2 (1949) 159-168.
29. Thomas Richner, *Interpreting Mozart's Piano Sonatas*, Paterson's Publications, London, 1978.
30. Charles Rosen, *Sonata Forms*, W. W. Norton, New York, 1980.
31. Edmund W. Sinnott, *Plant Morphogenesis*, McGraw-Hill, New York, 1960.
32. David Eugene Smith, *History of Mathematics, Vol. II Special Topics of Elementary Mathematics*, Ginn and Co., Boston, 1925.
33. J. Raymond Tobin, *Mozart and the Sonata Form*, Da Capo Press, New York, 1971.
34. Donald Francis Tovey, *The Forms of Music*, Meridian Books, New York, 1957.
35. J.H. Douglas Webster, Golden-mean form, in *Music & Letters* 31 (1950) 238-248.
36. Margaret F. Willerding, *Mathematical Concepts*: A Historical Approach, Vol. 5, Prindle Weber & Schmidt, Boston, 1967.
37. J. F. Putz, The American Math. Monthly, Vol. 68, 1995.