Ἀγαπητὲ Συνάδελφε:

Ἡ μέχρι σήμερα δράση σας ὡς ἐρευνητοῦ-γεωμέτρη καὶ πανεπιστημιακοῦ Διδασκάλου, δράση τὴν ὁποίαν ἐν συντομίᾳ μόνο προσπάθησα νὰ ἐκθέσω κατὰ τὴν σημερινὴ ἐπίσημη ὑποδοχή σας, ἀποτελεῖ ἀπόδειξη ὅτι ἡ διὰ τῆς προσφάτου ἐκλογῆς σας ἔνταξή σας στὸ Σῶμα τῶν Ἀντεπιστελλόντων Μελῶν τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἀποτελεῖ δικαίαν καταξίωσιν.

Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ σᾶς καλωσορίζομε στοὺς κόλπους τοῦ Ἀνωτάτου Πνευματικοῦ Ἱδρύματος τῆς χώρας μὲ τὴν εὐχὴ νὰ ἐνισχύσετε καὶ ἀπὸ τὴν θέση αὐτὴ τὴν ἐπιστήμη τὴν ὁποία ὑπηρετήσατε ἕως τώρα μὲ ἐπιτυχία καὶ ἀρετή.

Εὐχαριστῶ.

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ

Κύριε Πρόεδρε,

Κύριοι Ἀκαδημαϊκοί,

Κυρίες καὶ Κύριοι,

Μὲ εὔλογη συγκίνηση ἀνέρχομαι στὸ βῆμα τοῦ Ἀνωτάτου Πνευματικοῦ Ἱδρύματος τῆς Χώρας. Θεωρῶ εὐχάριστο καθῆκον νὰ ἐκφράσω εὐγνώμονες εὐχαριστίες πρὸς τὴν Ὁλομέλεια τῆς Ἀκαδημίας καὶ ἰδιαιτέρως πρὸς τὴν Τάξη τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν γιὰ τὴν τιμητικὴ ἐκλογή μου.

Εὐχαριστῶ θερμὰ τὸν κ. Πρόεδρο γιὰ τὸν χαιρετισμὸ καὶ τὸν ἀκαδημαϊκὸ κ. Ἀρτεμιάδη γιὰ τὴν προσφώνηση.

Ὁ τίτλος τῆς ὁμιλίας μου εἶναι: *Ἡ ἐξέλιξη τῆς Γεωμετρίας.*

Μετὰ τὸν δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, παρατηρήθηκε μία ἁλματώδης αὔξηση τῶν πρωτοτύπων μαθηματικῶν ἐργασιῶν. Τὰ τρία τελευταῖα χρόνια δημοσιεύθηκαν περίπου ἑκατὸν πενήντα χιλιάδες ἐρευνητικὲς ἐργασίες, οἱ ὁποῖες ἀναφέρονται στοὺς κλάδους τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης. Ἕνα σημαντικὸ μέρος ἀπὸ αὐτὲς εἶναι γεωμετρικοῦ περιεχομένου

Μέχρι σήμερα ἔχουν διαμορφωθεῖ ἐκτενέστατοι κλάδοι τῆς Γεωμετρίας, ὅπως εἶναι ἡ Ἐφηρμοσμένη Γεωμετρία, ἡ Ἀναλυτικὴ καὶ ἡ Συνθετικὴ Γεωμετρία, ἡ Διαφορικὴ Γεωμετρία, οἱ Γεωμετρίες τῶν Riemann καὶ Finsler, οἱ Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες, ἡ Θεωρία τῶν Κυρτῶν Συνόλων καὶ Πολυτόπων, ἡ Ὁλοκληρωτικὴ καὶ Στοχαστικὴ Γεωμετρία, ἡ Τοπολογικὴ Διαφορικὴ Γεωμετρία, οἱ Γεωμετρίες τῶν Möbius, Laguerre, Minkowski καὶ Lie, ἡ Γεωμετρία τῶν Ἀλγεβρῶν, οἱ Πεπερασμένες Γεωμετρίες καὶ ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals.

Ἂν λάβουμε ἐπὶ πλέον ὑπόψη, ὅτι ὑπάρχουν ἐργασίες, οἱ ὁποῖες δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐνταχθοῦν σὲ ἕνα μόνο κλάδο, γίνεται σαφές, ὅτι σήμερα εἶναι ἀδύνατο στὸν μαθηματικὸ νὰ ἔχει σαφὴ εἰκόνα τῆς προόδου τῆς ἐπιστήμης του.

Ἕνα σημαντικὸ αἴτιο, ποὺ συνετέλεσε στὴν τεράστια ἔκταση τῆς Γεωμετρίας, εἶναι ὁ στενὸς δεσμός της μὲ τὴ Φυσική, τὴν Ἀστρονομία, τὴ Μηχανικὴ καὶ γενικώτερα μὲ τὶς Ἐφαρμογές. Στὸ πρόσφατο παρελθὸν προκάλεσε ἔκπληξη ὁ δεσμὸς ποὺ ἀνακαλύφθηκε μεταξὺ Γεωμετρίας, Fractals καὶ βιολογικῶν διαδικασιῶν.

Στὴ σημερινή μου ὁμιλία, ἡ ὁποία ἀπευθύνεται καὶ σὲ μὴ μαθηματικούς, θὰ προσπαθήσω νὰ παρουσιάσω μία εἰκόνα τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως τῆς Γεωμετρίας.

Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ Γεωμετρία ἄρχισε νὰ δημιουργεῖται ἀπὸ πρακτικὰ προβλήματα καὶ ἰδιαίτερα ἀπὸ τὴν ἀνάγκη ὁριοθετήσεως καὶ μετρήσεως τμημάτων τῆς γῆς. Τὰ πρῶτα ἐμπειρικὰ συμπεράσματα βρέθηκαν ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους αἰγυπτίους γεωδαῖτες μὲ τὴ χρήση τοῦ νήματος. Ὅμως, γενικὴ εἶναι ἡ παραδοχή, ὅτι ὁ αὐστηρὸς ἐπιστημονικὸς συλλογισμὸς ἀρχίζει μὲ τοὺς ἕλληνες τῆς ἀρχαιότητος.

Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος παρουσίασε ἀποδείξεις γεωμετρικῶν προτάσεων, εἶναι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος τὸν ἕκτο π.Χ. αἰώνα. Ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χίος (περὶ τὸ 440 π.Χ.) θεωρεῖται ὡς ὁ πρῶτος συγγραφέας μιᾶς συστηματικῆς Γεωμετρίας. Τὸν τρίτο π.Χ. αἰώνα κυκλοφόρησαν στὴν Ἀλεξάνδρεια τὰ περίφημα «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐπεξεργασία καὶ ἐπέκταση τῆς Γεωμετρίας τοῦ Ἱπποκράτους. Ὁ Εὐκλείδης εἶναι ὁ ἱδρυτὴς τῆς περίφημης γεωμετρικῆς σχολῆς τῆς Ἀλεξάνδρειας.

Ἡ μεθοδολογία τοῦ Εὐκλείδου ἀποτέλεσε ἐπὶ σειρὰν αἰώνων τὸ ὑπόδειγμα τῆς αὐστηρῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου, καὶ τὸ σπουδαιότερο χαρακτηριστικό της εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἀπὸ ὁρισμένες πρωταρχικὲς προτάσεις παράγονται μὲ τοὺς κανόνες τῆς τυπικῆς λογικῆς θεωρήματα. Τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ ἀντικείμενα τῆς λογικῆς αὐτῆς διαδικασίας εἶναι γεωμετρικὰ σχήματα, δὲν ἔχει ἰδιαίτερη σημασία γιὰ τὴ μέθοδο. Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι ἐφαρμόσιμη σὲ κάθε πεδίον προτάσεων. Ἀκόμη καὶ φιλόσοφοι προσπάθησαν κατὰ καιροὺς νὰ ἀναπτύξουν τὶς θεωρίες τους ἀκολουθώντας τὸ πρότυπο τοῦ Εὐκλείδου, ὅπως π.χ. ὁ B. Spinoza (1632-1677) στὸ βιβλίο του «Ethika more geometrico demostrata».

Τὸ ἔργο τοῦ Εὐκλείδου, κρινόμενο μὲ τὰ σύγχρονα ἐπιστημονικὰ κριτήρια, εἶναι κατὰ τὸ μεγαλύτερο μέρος του ἄψογο. Τὰ κενά, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν, ἀνάγονται ἀφ' ἑνὸς στὴ χρήση τῆς ἐποπτείας γιὰ τὴν ἀπόδειξη θεωρημάτων καὶ ἀφ' ἑτέρου στὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ὁρίζονται βασικὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες, ὅπως εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: «Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται». Ἡ πρόταση αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθεῖ σήμερα ὡς ἀκριβὴς ὁρισμός.

Στὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου ὑπάρχει χωρὶς ἀπόδειξη ἡ ἑξῆς πρόταση: «Ἠιτήσθω καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

Πρόκειται γιὰ τὸ περίφημο αἴτημα τῶν παραλλήλων, τὸ ὁποῖο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἀξίωμα: Ἀπὸ σημεῖο ἐκτὸς εὐθείας κείμενο, ἄγεται μόνον μία παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσα.

Τὸ εὐκλείδειο αἴτημα κυριολεκτικῶς συνεκλόνισε τὰ θεμέλια τῆς Γεωμετρίας. Ἤδη στὴν ἀρχαιότητα διατυπώθηκε ἡ εἰκασία, ὅτι δὲν εἶναι ἀξίωμα ἀλλὰ θεώρημα, δηλαδὴ πρόταση ποὺ μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ. Οἱ πρῶτες προσπάθειες ἀποδείξεως ἔγιναν ἀπὸ τὸν Κλαύδιο Πτολεμαῖο (87-165) καὶ τὸν Πρόκλο (410-485). Ὁ J. d'Alembert (1717-1783) χαρακτήρισε τὸ εὐκλείδειο αἴτημα ὡς «τὸ σκάνδαλο τῶν Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας». Ὁ J. L. Lagrange (1736-1813), παρουσιάζοντας στὴ γαλλικὴ Ἀκαδημία μία σχετικὴ ἐργασία του, ξαφνικὰ ἄρχισε νὰ ἀμφιβάλλει γιὰ τὴν ὀρθότητα τῶν συλλογισμῶν του, καὶ μὲ τὴ φράση «ἐπ' αὐτοῦ ὅμως πρέπει νὰ ξανασκεφθῶ» ἀπέσυρε τὸ χειρόγραφό του. Ὁ A. M. Legendre (1752-1833) σὲ ἀλλεπάλληλες ἐκδόσεις τοῦ ἀξιόλογου βιβλίου του «Eléments de Géometrie» παρουσίασε διάφορες ἀποδείξεις τοῦ Εὐκλειδείου αἰτήματος, οἱ ὁποῖες ὅμως κάθε φορὰ ἦταν ἐσφαλμένες.

Ὁ Ἰησουΐτης G. Saccheri (1667-1733) προσπάθησε νὰ βρεῖ μία ἀπόδειξη διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ὑπέθεσε δηλαδή, ὅτι δὲν ἰσχύει τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων καὶ ἤλπιζε, ὅτι μὲ μία σειρὰ συλλογισμῶν θὰ κατέληγε σὲ προφανῶς ἄτοπο συμπέρασμα. Ὁ Saccheri βρῆκε πολλὰ νέα θεωρήματα, ὄχι ὅμως καὶ τὸ ἀναμενόμενο ἄτοπο συμπέρασμα. Ἀποτελεῖ εἰρωνεία τῆς τύχης, ὅτι ὁ Saccheri ὑπῆρξε ὁ πρῶτος ποὺ ἀνακάλυψε μία νέα Γεωμετρία χωρὶς νὰ τὸ καταλάβει.

Τὸν 19ο αἰώνα τρεῖς μαθηματικοί, ὁ ἕνας ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸν ἄλλον, εἶχαν τὴν μεγαλοφυὴ ἰδέα, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργηθεῖ μία μὴ εὐκλείδειος Γεωμετρία ἂν ἀντικατασταθεῖ τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων μὲ τὸ ἀκόλουθο ἀξίωμα: Ὅταν σὲ ἕνα ἐπίπεδο δοθοῦν μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνα σημεῖο Α μὴ κείμενο ἐπὶ τῆς ε, ὑπάρχουν περισσότερες ἀπὸ μία εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὸ Α καὶ δὲν τέμνουν τὴν ε.

Ὁ ἐπαναστατικὸς γιὰ τὴν ἐποχὴ ἐκείνη συλλογισμὸς ἔγινε ἀπὸ τὸν γερμανὸ C. F. Gauss (1777-1855), τὸν ρῶσο N. I. Lobatschewski (1793-1856) καὶ τὸν οὔγγρο Janos Bolyai (1802-1860). Ὁ Gauss οὐδέποτε δημοσίευσε τὰ συμπεράσματά του φοβούμενος, κατὰ τὴν φράση του, «τὴν ὀργὴ τῶν Βοιωτῶν». Τὰ ἀνακοίνωσε μὲ ἐπιστολὲς μόνο σὲ στενὸ κύκλο γνωρίμων του. Ἡ πρώτη δημοσίευση γιὰ τὴ νέα Γεωμετρία, ἡ ὁποία ὀνομάζεται Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία, ἔγινε ἀπὸ τὸν Lobatschewski τὸ 1829. Ἡ ἔρευνα τοῦ Janos Bolyai δημοσιεύθηκε ὡς Παράρτημα τοῦ βιβλίου τοῦ πατέρα του Farkas Bolyai τὸ 1832.

Προτοῦ ἀνακαλυφθεῖ ἡ Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία, ἦταν ἑδραιωμένη ἡ πεποίθηση, ὅτι ἡ μόνη δυνατὴ Γεωμετρία εἶναι ἡ εὐκλείδειος. Κάθε γεωμετρικὸ σύστημα, ποὺ δὲν συμφωνοῦσε πλήρως μὲ τὸ εὐκλείδειο, ἐθεωρεῖτο ὡς ἀνοησία. Ὁ φιλόσοφος I. Kant (1724-1804) εἶχε διατυπώσει τὸν ἰσχυρισμό, ὅτι τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου εἶναι συμφυὴ μὲ τὸ ἀνθρώπινο πνεῦμα καὶ συνεπῶς ἔχουν ἀντικειμενικὴ ἰσχὺ στὸν πραγματικὸ χῶρο. Τὴν ἐποχὴ ἐκείνη ἡ ἐπιρροὴ τῆς διδασκαλίας τοῦ Kant ἦταν τεράστια. Γιὰ τὸ λόγο αὐτό, ὁ Gauss δὲν τόλμησε νὰ δημοσιεύσει τὴν ἔρευνά του, φοβούμενος, ὅπως ἀνέφερα, τὴν κατακραυγή. Παρ' ὅλα αὐτὰ θεωροῦσε τὴν Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία ὡς πλήρως ἰσότιμη μὲ τὴν εὐκλείδειο.

Ἡ Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία ἔτυχε στὴν ἀρχὴ πολὺ μικρῆς προσοχῆς, ὄχι μόνον λόγω τῶν φιλοσοφικῶν θεωριῶν τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, ἀλλὰ καὶ λόγω τῆς ἐλλείψεως σχημάτων καὶ συμπερασμάτων συμβατῶν μὲ τὴν ἐποπτεία. Παραδείγματος χάριν, ἦταν δύσκολο νὰ γίνει παραδεκτό, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερο τῶν δύο ὀρθῶν. Θεωρήθηκε ὡς μία φανταστικὴ Γεωμετρία.

Ἡ ὕπαρξη καὶ ἡ μεγάλη σημασία τῆς Ὑπερβολικῆς Γεωμετρίας γιὰ τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴ Φυσικὴ ἀναγνωρίσθηκαν πλήρως μετὰ ἀπὸ μία σπουδαία καὶ ὡραία ἀνακάλυψη ποὺ ἔγινε τὸ 1868. Ὁ E. Beltrami (1835-1900) ἀπέδειξε, ὅτι ἡ Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθεῖ ἐπάνω σὲ μία ἐπιφάνεια σταθερῆς ἀρνητικῆς καμπυλότητας. Ἕνα παράδειγμα τέτοιας ἐπιφάνειας εἶναι ἡ ψευδοσφαίρα, δηλαδὴ ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει ὡς γενέτειρα τὴν ἕλκουσα (ἢ καμπύλη τοῦ σκύλου). Οἱ γεωδαισιακὲς γραμμὲς τῆς ἐπιφάνειας εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, οἱ εὐθεῖες τῆς Ὑπερβολικῆς Γεωμετρίας. Ἡ ἐργασία τοῦ Beltrami περιέχει καὶ τὸ συμπέρασμα, ὅτι, ἂν ὑπάρχει οἱαδήποτε ἀντινομία στὴν Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία, αὐτὴ θὰ ἔχει ὡς συνέπεια μία ἀντινομία στὴν εὐκλείδειο Γεωμετρία. Ἦταν ἑπομένως φυσικὸ νὰ στραφεῖ ἡ προσοχὴ τῶν ἐρευνητῶν στὴν ἀξιωματικὴ θεμελίωση τῆς εὐκλειδείου Γεωμετρίας.

Τὸ 1899 κυκλοφόρησε τὸ περίφημο βιβλίο τοῦ D. Hilbert (1862-1943) «Grundlagen der Geometrie». Ὁ Hilbert, ἐπηρεασμένος ἀπὸ προγενέστερες ἐργασίες τῶν M. Pasch (1843-1930) καὶ H. Wiener, θεμελίωσε ἀξιωματικῶς τὴν εὐκλείδειο Γεωμετρία μὲ μία μέθοδο, τῆς ὁποίας ἡ βασικὴ ἰδέα εἶναι ἡ ἑξῆς: Θεωροῦμε τρία σύνολα. Ὀνομάζουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου συνόλου «σημεῖα», τοῦ δευτέρου «εὐθεῖες» καὶ τοῦ τρίτου «ἐπίπεδα». Τὰ σημεῖα, οἱ εὐθεῖες καὶ τὰ ἐπίπεδα ὀνομάζονται «στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου». Τὸ ἐρώτημα τί εἶναι χῶρος, ἐρώτημα ποὺ προκάλεσε, ὡς γνωστόν, ἔντονες ἀντιπαραθέσεις κατὰ τὸν 19ο αἰώνα, ἀπαντήθηκε ἀπὸ τὸν Hilbert ὡς ἑξῆς: Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν ἀφορᾶ τὸν γεωμέτρη. Οἱ ἔννοιες τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζονται ἔμμεσα ἀπὸ τὰ ἀξιώματα στὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται. Τὸ ἐὰν ὑπάρχουν στὴ Φύση τέτοια στοιχεῖα καὶ τί ὄψη ἔχουν, ἐνδιαφέρει τὸν Φυσικὸ καὶ ὄχι τὸν Μαθηματικό. Ὑποθέτουμε, ὅτι τὰ σημεῖα, οἱ εὐθεῖες καὶ τὰ ἐπίπεδα συνδέονται μεταξύ τους μὲ σχέσεις τὶς ὁποῖες ἐκφράζουμε μὲ τὶς λέξεις «βρίσκεται πάνω», «βρίσκεται μεταξὺ» κ.λπ. Ἡ πλήρης περιγραφὴ τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐπιτυγχάνεται μὲ τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας, τὰ ὁποῖα ὁ Hilbert κατέταξε στὶς ἑξῆς πέντε ὁμάδες: Ἀξιώματα συνδέσεως, διατάξεως, ἰσότητος, συνεχείας καὶ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων.

Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων, πάνω στὸ ὁποῖο θεμελιώνεται ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, πρέπει α) νὰ στερεῖται ἀντιφάσεων, δηλαδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν μὲ χρήση τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῆς τυπικῆς λογικῆς νὰ ἀποδειχθεῖ ἕνα συμπέρασμα, τὸ ὁποῖο ἀντιφάσκει σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἀξιώματα, β) νὰ εἶναι πλῆρες, δηλαδὴ κάθε θεώρημα τοῦ κλάδου νὰ προκύπτει ὡς συνέπεια τῶν ἀξιωμάτων καὶ γ) νὰ περιέχει ἀνεξάρτητα ἀξιώματα, δηλαδὴ κανένα ἀπὸ τὰ ἀξιώματα τοῦ συστήματος δὲν εἶναι συνέπεια τῶν ὑπολοίπων.

Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τοῦ Hilbert ἱκανοποιεῖ καὶ τὶς τρεῖς συνθῆκες, ἀλλὰ μὲ τὴν ἑξῆς διευκρίνηση: Ὁ Hilbert ἀπέδειξε: Ἂν τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τῆς ἀριθμητικῆς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν στερεῖται ἀντιφάσεων, τότε καὶ τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τῆς εὐκλειδείου γεωμετρίας στερεῖται ἀντιφάσεων. Τὸ θεμελιῶδες ἐρώτημα, ἂν τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τῆς ἀριθμητικῆς στερεῖται ἀντιφάσεων, μένει μέχρι σήμερα ἀναπάντητο.

Τὸ ἔργο τοῦ Hilbert ἀποτελεῖ ἕνα σημαντικὸ σταθμὸ στὴν ἐξέλιξη τῆς Γεωμετρίας. Ὁ H. Poincaré (1854-1912) κρίνοντας τὸ ἔργο αὐτὸ γράφει (1902) μεταξὺ τῶν ἄλλων καὶ τὰ ἑξῆς: «Πρέπει νὰ μπορεῖ κανεὶς νὰ ἐμπιστευθεῖ τὰ γεωμετρικὰ ἀξιώματα σὲ μία μηχανή, καὶ κατόπιν νὰ δεῖ ὁλόκληρη τὴ Γεωμετρία νὰ βγαίνει ἀπὸ τὴ μηχανή».

Ἕνας ἄλλος σταθμὸς ἐξαιρετικῆς σημασίας ὑπῆρξε ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν. Ἡ διαπίστωση, ὅτι σὲ κάθε τετράγωνο, πλευρὰ καὶ διαγώνιος δὲν ἔχουν κοινὸ μέτρο, θεωρεῖται ὡς μία ἀπὸ τὶς σημαντικώτερες συμβολὲς τῶν ἀρχαίων ἑλλήνων γεωμετρῶν στὶς ἐπιστῆμες. Ἡ θεωρία τοῦ Εὐδόξου (408;-355;), ὅπως αὐτὴ ἐκτίθεται στὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου, ἀποτελεῖ ἕνα ἀριστουργηματικὸ τμῆμα τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν.

Ἂν θεωρήσουμε πάνω στὸν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὸ σημεῖο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν $\sqrt{2}$, τὸ σημεῖο αὐτὸ δὲν συμπίπτει μὲ κανένα ρητὸ σημεῖο τοῦ ἄξονα. Ὥστε, τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, παρὰ τὸ ὅτι εἶναι παντοῦ πυκνό, δὲν καλύπτει ὁλόκληρο τὸν ἄξονα τῶν ἀριθμῶν. Τὸ συμπέρασμα αὐτό, ποὺ εἶναι ἀδύνατον νὰ αἰτιολογηθεῖ ἐμπειρικά, ἀποτέλεσε πρόκληση καὶ ἐρέθισμα γιὰ τὸ πνεῦμα τῶν ἀρχαίων σοφῶν. Ἀλλὰ καὶ σήμερα ἀκόμη τίποτα δὲν βοηθᾶ τὴν ἐποπτεία, ὥστε νὰ μπορέσουμε νὰ ξεχωρίσουμε τὰ ἄρρητα ἀπὸ τὰ ρητὰ σημεῖα τοῦ ἄξονα.

Ἡ βαθύτερη σημασία τῆς θεωρίας τοῦ Εὐδόξου ἀποκρυσταλλώθηκε καὶ ἀξιοποιήθηκε πρὸς τὸ τέλος τοῦ 19ου αἰώνα, ὅταν οἱ K. Weierstrass (1815-1897), R. Dedekind (1831-1916) καὶ G. Cantor (1845-1918) ἀνέπτυξαν μία αὐστηρὴ θεωρία τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.

Ἡ Γεωμετρία διακρίνεται σὲ συνθετικὴ καὶ ἀναλυτικὴ μὲ τὴν εὐρύτερη ἔννοια. Κλασσικὰ ἔργα τῆς συνθετικῆς Γεωμετρίας εἶναι τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου καὶ τὰ «Κωνικὰ» τοῦ Ἀπολλωνίου (262-190).

Ἡ νεώτερη συνθετικὴ Γεωμετρία εἶναι ἡ Προβολικὴ Γεωμετρία, ἡ ὁποία στὴν πρωταρχική της μορφὴ ἐρευνᾶ ἰδιότητες τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ποὺ μένουν ἀναλλοίωτες κατὰ τὶς κεντρικὲς προβολὲς καὶ τομές. Μία θεμελιώδης προβολικὴ ἀναλλοίωτος εἶναι ὁ διπλὸς λόγος τεσσάρων συνευθειακῶν σημείων. Στὴν Προβολικὴ Γεωμετρία εἰσάγονται τὰ κατ' ἐκδοχὴν ἢ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς πλήρως ἰσότιμα μὲ τὰ γνήσια σημεῖα τοῦ χώρου. Ἡ ἔννοια τῆς παραλληλίας εἶναι ἀνύπαρκτη. Δύο τυχοῦσες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ἔχουν πάντοτε κοινὸ σημεῖο. Ἡ εὐθεῖα θεωρεῖται ὡς κλειστὴ γραμμή. Θεμελιώνεται ἡ βασικὴ Ἀρχὴ τοῦ Δυασμοῦ, μὲ χρήση τῆς ὁποίας ἀπὸ κάθε θεώρημα προκύπτει ἕνα δυϊκὸ θεώρημα, μὲ κατάλληλη ἐναλλαγὴ τῶν στοιχείων καὶ τῶν σχέσεων ποὺ τὰ συνδέουν.

Τὴν Προβολικὴ Γεωμετρία ἀνεκάλυψε ὁ J. V. Poncelet (1788-1867), ὁ σπουδαιότερος μαθητής του G. Monge (1746-1818) στὴν περίφημη Ecole Polytechnique. Ἀξίζει νὰ ἀναφερθεῖ, ὅτι ὁ Poncelet, ὁ ὁποῖος ἦταν μηχανικὸς καὶ γεωμέτρης, συμμετεῖχε στὴν ἐκστρατεία τοῦ Ναπολέοντος ἐναντίον τῆς Ρωσίας, συνελήφθη αἰχμάλωτος καὶ κατὰ τὴ διάρκεια τῆς αἰχμαλωσίας του βρῆκε τὴ δύναμη καὶ τὸν χρόνο νὰ δημιουργήσει τὴν Προβολικὴ Γεωμετρία. Μετὰ τὴν αἰχμαλωσία ἐξέδωσε στὸ Παρίσι τὸ 1882 τὸ μνημειῶδες ἔργο του «Traité des propriétés projectives des figures».

Ἡ εἰσαγωγὴ ὑπολογιστικῶν μεθόδων στὴν Προβολικὴ Γεωμετρία ὀφείλεται κυρίως στὸν φυσικὸ καὶ γεωμέτρη J. Plücker (1801-1868) καὶ στὸν A. F. Möbius (1790-1868).

Ὁ E. Laguerre (1834-1886) εἰσήγαγε μιὰ προβολικὴ μετρικὴ ἐκφράζοντας ἀποστάσεις καὶ γωνίες μὲ χρήση τοῦ λογαρίθμου τοῦ διπλοῦ λόγου τεσσάρων συνευθειακῶν σημείων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν μιᾶς ἐπίπεδης δέσμης. Ὁ A. Cayley (1821-1895) ἐπεξέτεινε τὴν μετρικὴ τοῦ Laguerre καὶ κατέληξε στὸ ἐκπληκτικὸ γιὰ τὴν ἐποχή του συμπέρασμα, ὅτι ἡ Μετρικὴ Γεωμετρία εἶναι δυνατὸν νὰ ἐνταχθεῖ στὴν Προβολική. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἔδωσε ἀφορμὴ στὸν Cayley νὰ ἰσχυριστεῖ «All geometry is projective».

Ἡ θεμελίωση τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας χωρὶς χρήση μετρικῶν ἐννοιῶν ἔγινε γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Chr. von Staudt (1798- 1868) τὸ 1847. Στὸν Staudt ὀφείλεται ἐπίσης ἡ ἑρμηνεία τῶν φανταστικῶν στοιχείων τῶν προβολικῶν χώρων.

Ἡ Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία στὴν πρωταρχικὴ μορφή της εἶναι ἐφαρμογὴ τῆς Ἄλγεβρας στὴ Γεωμετρία. Ἐμφανίστηκε σχετικὰ ἀργά, καὶ ὡς ἔτος γεννήσεώς της θεωρεῖται τὸ 1637, κατὰ τὸ ὁποῖο κυκλοφόρησε τὸ βιβλίο «Géométrie» τοῦ R. Descartes (1596-1650). Ἡ μεθοδολογία τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας εἶναι σὲ γενικὲς γραμμὲς ἡ ἑξῆς: Ἀποκαθίσταται μία ἀμφιμονότιμη ἀπεικόνιση μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ συνόλου τῶν ζευγῶν διατεταγμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀνάλογα, θεωροῦμε μία ἀμφιμονότιμη ἀπεικόνιση μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ τριδιάστατου χώρου καὶ τοῦ συνόλου τῶν διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ σημείου. Οἱ καμπύλες καὶ οἱ ἐπιφάνειες, ποὺ ἐξετάζονται στὰ πλαίσια τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, εἶναι φορεῖς σημείων, τῶν ὁποίων οἱ συντεταγμένες ἱκανοποιοῦν συνθῆκες ποὺ μποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν ὑπὸ μορφὴν ἀλγεβρικῶν σχέσεων. Τὸ γεωμετρικὸ πρόβλημα μεταφράζεται, ἂν εἶναι δυνατόν, σὲ ἀλγεβρικὲς σχέσεις, οἱ ὁποῖες συνδυάζονται καὶ μετασχημκτίζονται μὲ ἀλγεβρικὲς πράξεις. Ὅταν ἡ ὑπολογιστικὴ διαδικασία παρουσιάσει ἁπλοποιημένες ἀλγεβρικὲς μορφές, ποὺ ἐπιδέχονται γεωμετρικὴ ἑρμηνεία, μεταφράζονται στὴ γεωμετρικὴ γλώσσα καὶ ἔτσι προκύπτει ἡ λύση τοῦ προβλήματος. Προβλήματα, ποὺ ἦταν ἀπρόσιτα γιὰ τὴ Συνθετικὴ Γεωμετρία, λύθηκαν πολὺ εὔκολα μὲ τὶς μεθόδους τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας.

Ἡ ἀνακάλυψη τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ ἀπὸ τὸν I. Newton (1643-1727) καὶ τὸν G. W. Leibniz (1646-1716) ἔδωσε τὴ δυνατότητα νὰ ἐξετασθοῦν ἐρωτήματα τῶν καμπυλῶν καὶ ἐπιφανειῶν, τὰ ὁποῖα ἦταν ἀδύνατον νὰ ἀπαντηθοῦν μὲ χρήση τῆς Ἄλγεβρας. Ἡ χρησιμοποίηση τῶν διαφορίσιμων συναρτήσεων γιὰ τὴ λύση μεμονωμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων, ἦταν ἡ ἀρχὴ τῆς διαμορφώσεως τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας.

Ὁ Chr. Huygens (1629-1695) μελετώντας τὴν κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὁδηγήθηκε στὴν εὕρεση τῆς ἐνειλιγμένης καὶ τῶν ἐξειλιγμένων μιᾶς καμπύλης.

Ὁ Johann I. Bernoulli (1667-1748) ἐξήτασε τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐλαχίστου δρόμου, ποὺ συνδέει δύο σημεῖα μιᾶς ἐπιφάνειας καὶ κατέληξε στὶς διαφορικὲς ἐξισώσεις τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν. Τὸ 1760 δημοσιεύθηκαν οἱ ἐργασίες τοῦ L. Euler (1707 - 1783) γιὰ τὴν καμπυλότητα τῶν ἐπιφανειακῶν καμπυλῶν καὶ τοῦ Lagrange γιὰ τὶς ἐπιφάνειες ἐλαχίστης ἐκτάσεως, οἱ ὁποῖες συνδέονται ὡς γνωστὸν μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ J. Plateau (1801-1883).

Τὸ 1795 δημοσιεύθηκε ἡ σπουδαία μονογραφία τοῦ Monge «Application de l'Analyse à la Géométrie», στὴν ὁποία δίνονται οἱ λύσεις πολλῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων μὲ χρήση τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ.

Ἡ βασικώτερη ὅμως πραγματεία, ποὺ ἀποτέλεσε τὸ θεμέλιο γιὰ τὴ δημιουργία τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας, ὡς συστηματικοῦ καὶ αὐτοδύναμου κλάδου, εἶναι ἡ περίφημη ἐργασία τοῦ Gauss «Disquisitiones generales circa superficies curvas» (Γενικὴ Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν). Τὸ ἐρέθισμα γιὰ τὴν ἔρευνα αὐτὴ προῆλθε ἀπὸ τὴν πράξη. Ὁ Gauss διεξήγαγε γεωδαιτικὲς μετρήσεις μιᾶς μεγάλης περιοχῆς τοῦ Ἀννοβέρου. Δὲν χρησιμοποίησε καρτεσιανὲς συντεταγμένες, ἀλλὰ εἰσήγαγε τὶς λεγόμενες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Παρουσιάζεται γιὰ πρώτη φορὰ ἡ ἔννοια τοῦ τοπικοῦ χάρτου, ἡ ὁποία εἶναι θεμελιώδους σημασίας γιὰ τὴ σύγχρονη Διαφορικὴ Γεωμετρία καὶ Τοπολογία. Ὁ Gauss παρετήρησε, ὅτι στὶς μετρήσεις του ὄφειλε νὰ λάβει ὑπόψη τὴν καμπυλότητα τῆς γῆς καὶ ἔτσι ὁδηγήθηκε σὲ ἕνα βασικὸ θεώρημα, ποὺ ὁ ἴδιος τὸ ὀνόμασε «Theorema Egregium». Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα αὐτό, ἡ καμπυλότητα ἐπιφάνειας σὲ ἕνα σημεῖο της, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθεῖ διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς, ἡ ὁποία ορίζει τὴ μετρικὴ τῆς ἐπιφάνειας. Ἐνῶ λοιπὸν ἡ καμπυλότητα ἐπιφάνειας ὁρίζεται μὲ χρήση ἐννοιῶν τοῦ εὐκλείδειου χώρου ποὺ τὴν περιβάλλει, ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Gauss προκύπτει, ὅτι ἡ καμπυλότητα εἶναι μία ἰσομετρικὴ ἀναλλοίωτος, ἄρα εἶναι ἔννοια τῆς ἐσωτερικῆς γεωμετρίας τῆς ἐπιφάνειας.

Ἡ ἀριθμοποίηση τῆς Γεωμετρίας ὑπῆρξε θεμελιώδους σημασίας γιὰ τὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴ Φυσικὴ καὶ κατέστησε δυνατὸν νὰ δοθεῖ μὲ ἁπλότητα καὶ σαφήνεια ὁ ὁρισμὸς τῶν πολυδιάστατων χώρων. Ὅπως ἀνέφερα προηγουμένως, ἕνα σημεῖο τοῦ τριδιάστατου χώρου ἐκπροσωπεῖται ἀπὸ μία διατεταγμένη τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μποροῦμε ἀκόμη νὰ ποῦμε, ὅτι τὸ σημεῖο ταυτοποιεῖται μὲ τὴν ἀντίστοιχή του τριάδα. Θεωροῦμε τώρα τυχόντα φυσικὸ ἀριθμὸ n. Κάθε συγκρότημα n διατεταγμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν τὸ ὀνομάζουμε σημεῖο. Ἐφοδιάζουμε τὸ σύνολο τῶν σημείων μὲ μία μετρική, δηλαδὴ μὲ ἕναν τρόπο μετρήσεως τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων. Τὸ σύνολο τῶν σημείων μαζὶ μὲ τὴ μετρικὴ ὀνομάζεται n-διάστατος μετρικὸς χῶρος.

Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐντοπισθεῖ μὲ ἀκρίβεια, πότε καὶ ἀπὸ ποιὸν θεωρήθηκε γιὰ πρώτη φορὰ χῶρος, τοῦ ὁποίου ἡ διάσταση εἶναι μεγαλύτερη τοῦ 3. Ὁ d'Alembert σὲ ἄρθρο του μὲ τίτλο «Dimension», ποὺ ἔγραψε γιὰ τὴν «Encyclopédie», πρότεινε νὰ θεωρηθεῖ ὁ χρόνος ὡς τέταρτη διάσταση. Ὁ Lagrange στὸ ἔργο του «Mécanique analytique» χρησιμοποίησε συντεταγμένες, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 3. Ἡ ὁρολογία «n-διάστατη Γεωμετρία» ἐμφανίζεται γιὰ πρώτη φορὰ τὸ 1843 στὴν ἐργασία τοῦ Cayley «Chapters in the analytical geometry of (n)-dimensions».

Στὴν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν πολυδιάστατων χώρων συνετέλεσε ἡ μονογραφία τοῦ H. Grassmann (1809-1877) «Ausdehnungslehre» (1844) καθὼς καὶ ἡ ἐργασία τοῦ L. Schlaefli (1814-1895) «Theorie der vielfachen Kontinuität» ποὺ ἀνάγεται στὰ ἔτη 1850-1852.

Τὸ 1854 ὁ B. Riemann (1826-1866), στὰ πλαίσια τῆς διαδικασίας ἀνακηρύξεώς του ὡς ὑφηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Göttingen, ἔκανε μία διάλεξη μὲ τίτλο «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς ἕνας σημαντικώτατος σταθμὸς γιὰ τὴν πρόοδο τῶν Μαθηματικῶν. Διετύπωσε γιὰ πρώτη φορὰ τὸν ὑποθετικὸ χαρακτῆρα τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας καὶ διεμόρφωσε τὴν ἔννοια τῆς n-διάστατης πολλαπλότητας ἐφοδιασμένης μὲ μετρική. Ἀργότερα, ἡ πολλαπλότητα καὶ ἡ μετρικὴ ὀνομάσθηκαν ἀντίστοιχα χῶρος καὶ μετρικὴ τοῦ Riemann. Δύο χρόνια μετὰ τὸ θάνατο τοῦ Riemann δημοσιεύθηκε μὲ φροντίδα τοῦ Dedekind ἡ περίφημη αὐτὴ ὁμιλία καὶ ἔτσι ἔγιναν γνωστὲς στὸ εὐρύτερο ἐπιστημονικὸ κοινὸ οἱ πρωτοποριακές του ἰδέες. Ἕνα μέρος τῶν συμπερασμάτων του ἀνέπτυξε ὁ Riemann σὲ κείμενο ποὺ ὑπέβαλε στὴν Ἀκαδημία τοῦ Παρισιοῦ, συμμετέχοντας σὲ διαγωνισμό, ποὺ ἀφοροῦσε στὴ θερμικὴ ἀγωγιμότητα. Ἡ πυκνότητα καὶ τὸ δυσνόητο τῶν συλλογισμῶν του ἄφησε πολλὰ ἐρωτηματικὰ γιὰ τὴν ὀρθότητα τῶν ἐξαγομένων. Τὸ ἀποτέλεσμα ἦταν νὰ μὴ βραβευθεῖ ἀπὸ τὴν Ἀκαδημία. Σὲ μεταγενέστερες ὅμως ἐργασίες τῶν E. B. Christoffel (1829-1900) καὶ R. Lipschitz (1832-1903), ποὺ ἀναφέρονται στὶς τετραγωνικὲς διαφορικὲς μορφές, ἀποδείχθηκε ἡ ὀρθότητα τῶν συλλογισμῶν τοῦ Riemann.

Τὸ 1901 δημοσιεύθηκε ἡ ἐργασία τῶν G. Ricci-Curbastro (1853-1925) καὶ T. Levi-Civita (1873-1941) «Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», στὴν ὁποία πρωτοεμφανίζεται καὶ θεμελιώνεται ὁ Τανυστικὸς Λογισμός. Ὁ καινούριος αὐτὸς Λογισμὸς ἔγινε εὔχρηστο καὶ ἀποτελεσματικὸ ἐργαλεῖο στὴ Γεωμετρία τοῦ Riemann, στὴ Μηχανικὴ καὶ στὴν Εἰδικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητος τοῦ A. Einstein (1879-1955).

Τὸ 1917 θεωρεῖται ὡς ἡ ἀρχὴ τῆς νεώτερης Διαφορικῆς Γεωμετρίας, διότι ὁ Levi-Civita εἰσήγαγε στὴ Γεωμετρία τὴν ἔννοια τῆς ἀπόλυτης παραλληλίας. Στὸ εὐκλείδειο ἐπίπεδο κάθε παράλληλη μεταφορὰ ἀφήνει ἀναλλοίωτο τὸ μῆκος κάθε διανύσματος. Ἐπίσης, ἡ γωνία δύο τυχόντων διανυσμάτων μένει ἀναλλοίωτη. Ἐξάλλου, κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα αὐτοῦ. Ὥστε, ἡ παράλληλη μεταφορὰ στὸ ἐπίπεδο ἀπεικονίζει ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα σὲ ἐφαπτομενικὸ καὶ δὲν μεταβάλλει οὔτε τὸ μῆκος διανύσματος οὔτε τὴ γωνία δύο διανυσμάτων. Ὅταν ὅμως θεωρήσουμε ἕνα ἐφαπτομενικὸ διάνυσμα μιᾶς ἐπιφάνειας τοῦ τριδιάστατου χώρου καὶ μία παράλληλη μετατόπιση, τὸ διάνυσμα παύει, ἐν γένει, νὰ εἶναι ἐφαπτομενικὸ τῆς ἐπιφάνειας. Ἀκριβῶς αὐτὸ τὸ ἐμπόδιο παρέκαμψε ὁ Levi-Civita μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῆς ἔννοιας τῆς ἀπόλυτης παραλληλίας. Βρῆκε μία διαδικασία, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει ἐφαπτομενικὰ διανύσματα σὲ ἐφαπτομενικὰ καὶ ἐπὶ πλέον ἀφήνει ἀναλλλοίωτα μέτρα καὶ γωνίες διανυσμάτων.

Ἡ ἀπόλυτη παραλληλία ὁδήγησε στὴ θεμελιώδη ἔννοια τῆς συνάφειας. Ἕνας ἀπὸ τοὺς μεγαλύτερους γεωμέτρες τοῦ αἰώνα μας, ὁ E. Cartan (1869-1951), θεώρησε τὴ συνάφεια ὑπὸ γενικώτερη μορφὴ καὶ τὴν ἐπεξέτεινε κάνοντας χρήση τοῦ κινουμένου συστήματος συντεταγμένων, τοῦ ὁποίου οἱ ρίζες ἀνάγονται στὸν A. Ribaucour (1845-1893) καὶ στὸν G. Darboux (1842-1917). Ἡ θεωρία τῶν καλουμένων ἰνωδῶν δεσμῶν ἐπέτρεψε στὸν C. Ehresmann καὶ στοὺς συνεργάτες του νὰ παρουσιάσουν μία σύνθεση τῶν ἐργασιῶν τοῦ Cartan, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ σήμερα τὴ συνήθη μορφὴ ἐκθέσεως τῆς μοντέρνας Διαφορικῆς Γεωμετρίας.

Ἂς ἐπανέλθουμε στὸν 19ο αἰώνα καὶ μάλιστα στὴν ἐποχὴ τοῦ Felix Klein. Τὸ 1872 ὁ Klein σὲ ἡλικία μόλις 23 ἐτῶν γίνεται τακτικὸς καθηγητὴς στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Erlangen. Στὸν ἐναρκτήριο λόγο του μὲ τίτλο «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» παρουσιάζει ἕνα πρόγραμμα ταξινομήσεως τῶν μέχρι τότε γνωστῶν Γεωμετριῶν μὲ χρήση τῆς ἐννοίας τῆς ὁμάδος. Σὲ γενικὲς γραμμὲς ἡ κωδικοποίηση αὐτὴ γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἡ μετρικὴ Γεωμετρία περιλαμβάνει ὅλες ἐκεῖνες τὶς γεωμετρικὲς ἰδιότητες ποὺ μένουν ἀναλλοίωτες ὡς πρὸς τὴν ὁμάδα τῶν ἰσομετρικῶν ἀπεικονίσεων. Ἀνάλογα, ἡ Ὁμοπαραλληλικὴ καὶ ἡ Προβολικὴ Γεωμετρία ἐξετάζουν ἰδιότητες ποὺ μένουν ἀναλλοίωτες ὡς πρὸς τὴν ὁμάδα τῶν ὁμοπαραλληλικῶν καὶ προβολικῶν μετασχηματισμῶν ἀντίστοιχα. Ἡ μέθοδος τοῦ Klein ποὺ ἔμεινε στὴν Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν ὡς Πρόγραμμα τοῦ Erlangen, κυριάρχησε ἐπὶ σειρὰν δεκαετιῶν στὴ γεωμετρικὴ ἔρευνα. Ὅμως, ἡ πολύπλευρη ἀνάπτυξη τῶν διαφόρων γεωμετριῶν καὶ ἡ ἀνακάλυψη νέων, ἔδειξε ὅτι ὑπάρχουν Γεωμετρίες, οἱ ὁποῖες δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐνταχθοῦν στὸ Πρόγραμμα τοῦ Erlangen. Ὁ Cartan προσπάθησε νὰ ἀναθεωρήσει καὶ νὰ συμπληρώσει τὴ θεωρία τοῦ Klein. Παρόλα αὐτὰ θεωρεῖται σήμερα ἀμφίβολο ἂν κάθε γεωμετρικὴ θεωρία πρέπει νὰ συνδέεται μὲ τὴν ἔννοια τῆς ὁμάδος.

Μία νέα Γεωμετρία ἄρχισε νὰ δημιουργεῖται στὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος, ἡ ὁποία ὀνομάσθηκε στὴν ἀρχὴ Analysis Situs καὶ ἀργότερα Τοπολογία. Ἡ Τοπολογία στὴν πρωταρχική της μορφὴ εἶχε ὡς σκοπὸ τὴ μελέτη ἰδιοτήτων τῶν ἐπιφανειῶν, ποὺ μένουν ἀναλλοίωτες κατὰ τὶς ἀμφιμονότιμες καὶ συνεχεῖς πρὸς τὶς δύο κατευθύνσεις ἀπεικονίσεις. Παραδείγματος χάριν, μία σφαίρα μπορεῖ νὰ μετασχηματισθεῖ τοπολογικῶς σὲ κύβο καὶ ἀντιστρόφως. Συνεπῶς ἀπὸ τοπολογικῆς ἀπόψεως δὲν ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ κύβου καὶ σφαίρας. Τὸ πρῶτο μεμονομένο συμπέρασμα, τοῦ ὁποίου ἡ τοπολογικὴ σημασία ἀναγνωρίσθηκε ἀργότερα ἀπὸ τὴν Poincaré, εἶναι τὸ θεώρημα τῶν Descartes καὶ Euler, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο, σὲ κάθε ἁπλὸ πολύεδρο τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκμῶν σὺν δύο. Ἡ πρώτη περίοδος συστηματικῆς ἔρευνας τῆς Τοπολογίας ἀρχίζει μὲ τὸν Riemann, ὁ ὁποῖος ἀντελήφθη τὴ μεγάλη σημασία της γιὰ τὴν ἔρευνα τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς. Σήμερα ἡ Τοπολογία ἀποτελεῖ ἰδιαίτερο μαθηματικὸ κλάδο καὶ χωρίζεται σὲ συνολοθεωριακή, ἀλγεβρικὴ καὶ διαφορικὴ Τοπολογία.

Θὰ ἀναφερθῶ τώρα μὲ συντομία καὶ σὲ ἄλλους κλάδους τῆς Γεωμετρίας, ποὺ ἀποτελοῦν σήμερα ἐπίσης ἐνδιαφέρουσες ἐρευνητικὲς περιοχές.

Τὰ ἰσοπεριμετρικὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἔθεσαν πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι ἕλληνες καὶ ἀφοροῦν στὶς ἰδιότητες μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τῆς περιφερείας κύκλου καὶ τῆς σφαίρας, ἦταν ἡ ἀφορμὴ γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς Θεωρίας τῶν Κυρτῶν Συνόλων καὶ Πολυέδρων. Οἱ ἐργασίες τῶν διαπρεπῶν μαθηματικῶν A. Cauchy (1789-1857), J. Steiner (1796-1863), H. Minkowski (1864-1909), W. Blaschke (1885-1962), A. D. Alexandrow, H. Hadwiger καὶ ἄλλων ἀποτελοῦν τὸν πυρήνα τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Ἐξάλλου, ὁ Blaschke, κατὰ τὴ δεκαετία 1930-1940, ἔχοντας ὡς ἀφετηρία μεμονωμένους ὁλοκληρωτικοὺς τύπους τῶν Cauchy, M. W. Crofton καὶ Poincaré, δημιουργεῖ μὲ μία ὁμάδα μαθητῶν καὶ συνεργατῶν του τὴν Ὁλοκληρωτικὴ καὶ Στοχαστικὴ Γεωμετρία.

Τὰ τελευταῖα χρόνια, ἕνας νέος κλάδος, ποὺ τιτλοφορεῖται Γεωμετρία τῶν Fractals, προσείλκυσε τὴν ἰδιαίτερη προσοχὴ ὄχι μόνον διακεκριμένων μαθηματικῶν ἀλλὰ καὶ πολλῶν ἄλλων ἐπιστημόνων μεταξὺ τῶν ὁποίων συγκαταλέγονται καὶ βιολόγοι. Παρὰ τὶς ὑπάρχουσες πρὸς τὸ παρὸν ὀξύτατες ἀντιπαραθέσεις γιὰ τὴ σπουδαιότητα καὶ τὸ μέλλον τοῦ κλάδου αὐτοῦ, διατυπώνονται εἰκασίες, σύμφωνα μὲ τὶς ὁποῖες ἡ Θεωρία τῶν Fractals θὰ ἀλλάξει ριζικὰ τὸν τρόπο ἀντιμετωπίσεως ὁρισμένων προβλημάτων τῆς Φυσικῆς, τῆς Χημείας καὶ τῆς Βιολογίας.

Τελειώνοντας θὰ ἤθελα νὰ παρατηρήσω, ὅτι τὴν τελευταία εἰκοσαετία ὑπάρχει ἔντονη ἐρευνητικὴ προσπάθεια γιὰ τὴ λύση πρακτικῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων μὲ τὴ χρήση ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν. Προβλήματα τῆς αὐτοκινητοβιομηχανίας, τῆς ἀεροναυπηγικῆς καὶ τῆς ὀρθοπεδικῆς ἀντιμετωπίσθηκαν μὲ μεγάλη ἐπιτυχία. Ἡ ἐξέλιξη αὐτὴ εἶναι ἕνα εὐοίωνο σημεῖο, διότι κατὰ τὶς τελευταῖες δεκαετίες, ἕνα μέρος τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας ἀναφέρεται σὲ ἐξαιρετικὰ ἀφηρημένες περιοχές. Ἡ προσπάθεια τονισμοῦ τοῦ «Μοντέρνου» ὁδήγησε σὲ μεγάλες ὑπερβολές, ποὺ ἀφήνουν πολλὰ ἐρωτηματικὰ ὡς πρὸς τὸ νόημα καὶ τὴ χρησιμότητα τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν. Ἡ Γεωμετρία, καὶ γενικώτερα τὰ Μαθηματικά, ἀντλοῦν ἰδέες ἀπὸ τὴν ἐποπτεία καὶ ἀπὸ πρακτικὰ προβλήματα. Οἱ ἐφηρμοσμένες ἐπιστῆμες περιμένουν ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς βοήθεια στὴ λύση τῶν προβλημάτων τοῦ ἀνθρωπίνου γένους. Πρέπει πάντοτε νὰ κυριαρχεῖ ἡ πεποίθηση, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι μόνον μία ἔξοχη δημιουργία τοῦ πνεύματος καὶ μία ὡραιότης, ἀλλὰ καὶ ἐπιστήμη μεγάλης πρακτικῆς σημασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ν. Κ. Ἀρτεμιάδης, Ἡ Γεωμετρία τῶν Fractals, ΠΑΑ Τόμ. 63 (1988), 480-949.

2. Ν. Κ. Ἀρτεμιάδης, Χάος-Fractals-Δυναμικὰ Συστήματα, ΠΑΑ Τόμ. 69 (1994), 3-23.

3. W. Benz, Grundlagen der Geometrie. Ursprünge und Fortentwicklung anhand ausgewählter Beispiele. Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 6, 231-267. Friedr. Wieweg, Braunschweig.

4. L. Boi-D. Flament-J. M. Salanskis (Eds), 1830-1930 A Century of Geometry. Springer, Berlin 1992.

5. N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques. Paris, Hermann 1971.

6. W. Burau, 100 Jahre Erlanger Programm von Felix Klein. Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg Band X, 155-164 (1974).

7. S. S. Chern, Differential geometry; Its past and its future. Actes, Congres intern. math., 1970, Tome I, p. 41 à 53.

8. J. Dieudonné, Geschichte der Mathematik. Vieweg, Braunschweig 1985.

9. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, Leipzig 1899.

10. B. Kerékjártó, Les Fondements de la Géométrie I, II. Gauthier-Villars, Paris 1969.

11. F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie. Springer, Berlin 1926.

12. F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Springer, Berlin 1979.

13. Ὁ. Πυλαρινός, Ἡ κωδικοποίησις τῆς Γεωμετρίας. Δελτίο τῆς ΕΜΕ, t. 30 (1956), 100-125.

14. K. Strubecker, Carl Friedrich Gauss - Mathematicorum Princeps. Bild der Wissenschaft 5-1977, 118-126.

15. B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser, Basel 1956.