ἀπὸ γενικωτέρας ἀκόμη ἀπόψεως, ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ γλῶσσα, κατὰ σθένος ἀνάγκης ἀδήριτον ἐκτενῶς διδασκομένη εἰς τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, ποτὲ δὲν θὰ παύσῃ ἐξασκοῦσα ἐπὶ τῆς οἱασδήποτε νεοελληνικῆς διαλέκτου τὴν καθ' ὁμοιότητα ἑλκτικήν της ἐπίδρασιν, οὐδέποτε δ' ἀφ' ἑτέρου χωρὶς τὴν καθαρεύουσαν —τὸ διαγωγικὸν τοῦτο μεσάζον μεταξὺ τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς καὶ τῆς δημώδους— θὰ ἠδύνατο ἡ δημοτικὴ νὰ διεκδικήσῃ τὴν θέσιν κοινῆς γραφομένης γλώσσης.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—Ἐπὶ τῶν κανονικῶν οἰκογενειῶν τῶν ἀκεραίων καὶ μερομόρφων συναρτήσεων πεπερασμένης τάξεως ὑπὸ ***Ἰωάννου Ἀν. Ἀναστασιάδου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. ***Κωνστ. Μαλτέζου***.

1. Μία οἰκογένεια συναρτήσεων $\{f(z)\}$ ὁλομόρφων εἰς τόπον (D) λέγεται κανονικὴ εἰς αὐτὸν τὸν τόπον, ἐὰν ἀπὸ οἱανδήποτε ἀκολουθίαν συναρτήσεων τῆς οἰκογενείας δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν μερικὴν ἀκολουθίαν, ἡ ὁποία νὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως ἐντὸς τοῦ (D) πρὸς συνάρτησιν, ἡ ὁποία δύναται νὰ εἶναι καὶ ἡ σταθερὰ ἄπειρον.

Ὁ τόπος (D) δύναται νὰ εἶναι καὶ ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον, ὅτε πρόκειται περὶ οἰκογενείας ἀκεραίων συναρτήσεων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ νὰ εἶναι ἡ οἰκογένεια κανονική, πρέπει νὰ εἶναι κανονικὴ εἰς πάντα κύκλον μὲ κέντρον τὴν ἀρχήν.

Αἱ οἰκογένειαι τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων δὲν εἶναι γενικῶς κανονικαί.

Οὕτως ἡ οἰκογένεια,

$$f_n(z) = e^{k^n z},$$

ὅπου k σταθερὰ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἐνῷ εἶναι οἰκογένεια ἀκεραίων συναρτήσεων, δὲν εἶναι κανονικὴ ἐντὸς κύκλου μὲ κέντρον σημεῖον z_0 τοῦ φανταστικοῦ ἄξονος καὶ ἀκτῖνα ὁσονδήποτε μικράν[1].

Εἶναι λοιπὸν οὐσιῶδες διὰ τὴν μελέτην τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων νὰ διαπιστώνωμεν ἑκάστοτε, ἐὰν μία οἰκογένεια εἶναι κανονικὴ ἢ ὄχι.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξετάζονται περιπτώσεις ἀρκετὰ γενικαί, ἵνα μία οἰκογένεια ἀκεραίων ἢ μερομόρφων συναρτήσεων εἶναι κανονική.

Τὰ κυριώτερα συμπεράσματα εἶναι τὰ ἑξῆς:

2. « Αἱ ἀκέραιαι συναρτήσεις πεπερασμένης τάξεως p_n ($p_n \leq k$ σταθεροῦ)

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m ,$$

---

* *Jean A. Anastassiades*, Sur les familles normales de fonctions entières et méromorphes d'ordre fini.

[1] Βλ. *P. Montel*, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques etc. Paris, Gauthier-Villars, 1927.

αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξαιρετικὴν τιμὴν ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος R καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες

$$|c_i^{(n)}| \leqslant M \ (i=0,1,\dots,p_n) \quad |c_1^{(n)}| \geqslant \mu > 0$$

ἀποτελοῦν κανονικὴν οἰκογένειαν »

I. Ὑποθέτομεν πρῶτον ὅτι αἱ συναρτήσεις $f_n(z)$ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως p, ὑποχρεωτικῶς ἀκεραίας. Εἶναι

$$f_n(z) = \alpha_n + e^{P_n(z)}, \quad P'_n(z) = \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_r^{(n)} z^r$$

ἑπομένως

$$|\lambda_r^{(n)}| \leqslant N \quad (r=0,1\dots,p-1), \quad |\lambda_0^{(n)}| \geqslant \nu > 0.$$

Τὰ σημεῖα $c_0^{(n)}$, ἐπειδὴ $|c_0^{(n)}| \leqslant M$, ἔχουν ὁρικὸν σημεῖον, ἓν τοὐλάχιστον, τὸ c_0, καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκολουθίαν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$n_0, \ n_0', \ n_0'', \dots$$

τοιαύτην, ὥστε ἡ ἀκολουθία

$$c_0^{(n_0)}, \ c_0^{(n_0')}, \ c_0^{(n_0'')}, \dots$$

νὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως πρὸς τὸ c_0.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν

$$c_1^{(n_0)}, \ c_1^{(n_0')}, \ c_1^{(n_0'')}, \dots,$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι, κατὰ μέτρον, εἶναι $\leqslant M$ καὶ $\geqslant \mu > 0$. Ἑπομένως ἔχουν ἓν τοὐλάχιστον ὁρικὸν σημεῖον, ἔστω τὸ c_1 $(\neq 0)$ καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκολουθίαν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$n_0, \ n_1, \ n_1', \ n_1'', \dots$$

τοιαύτην, ὥστε ἡ ἀκολουθία

$$c_1^{(n_0)}, \ c_1^{(n_1)}, \ c_1^{(n_1')}, \ c_1^{(n_1'')}, \dots$$

νὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως πρὸς τὸ c_1 $(\neq 0)$.

Γενικῶς, ἐπειδὴ

$$|c_j^{(n)}| \leqslant M \quad (j=0, 1, \dots p),$$

ἡ ἀκολουθία

$$c_j^{(n_0)}, \ c_j^{(n_1)}, \dots \ c_j^{(n_{j-1})}, \ c_j^{(n_{j-1}')}, \ c_j^{(n_{j-1}'')}, \dots$$

ἔχει ἓν τοὐλάχιστον ὁρικὸν σημεῖον τὸ c_j καὶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκολουθίαν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$n_o,\ n_1,\dots\ n_j,\ n_j',\ n_j'',\dots$$

τοιαύτην, ὥστε ἡ ἀκολουθία

$$c_j^{(n_o)},\ c_j^{(n_1)},\dots,\ c_j^{(n_j)},\ c_j^{(n_j')},\ c_j^{(n_j'')},\dots$$

νὰ συγκλίνῃ ὁμοιομόρφως πρὸς τὸ c_j.

Τέλος καὶ τὰ σημεῖα α_n, ἐφ' ὅσον $|\alpha_n| \leqslant R$, ἔχουν ἓν τοὐλάχιστον ὁρικὸν σημεῖον $\alpha \neq c_o$, διότι ἄλλως θὰ ἔπρεπε τὸ c_1 νὰ εἶναι μηδέν.

Ὑπολογίζομεν ἤδη μονοτίμως τοὺς ἀριθμοὺς

$$\lambda_o,\ \lambda_1,\dots\ \lambda_{p-1}$$

ἐκ τοῦ συστήματος

$$(1)\quad \lambda_o\, c_m + \lambda_1\, c_{m-1} + \dots + \lambda_m\,(c_o - \alpha) = (m+1)\, c_{m+1} \quad (m = 0, 1, \dots, p-1),$$

τοῦ ὁποίου ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Διὰ τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς μεταχειριζόμεθα τὰς σχέσεις

$$(2)\qquad m c_m = \lambda_o\, c_{m-1} + \lambda_1\, c_{m-2} + \dots + \lambda_{p-1}\, c_{m-p} \quad (m \geqslant p+1),$$

τῶν $\lambda_0,\ \lambda_1, \dots,\ \lambda_{p-1}$ ὑπολογισθέντων ἐκ τοῦ συστήματος (1).

Θεωρήσωμεν τώρα τὴν συνάρτησιν

$$f(z) = (c_0 - \alpha)\, e^{\int_{z_0}^{z} P(z)dz} \qquad \left(P(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_{p-1} z^{p-1}\right)$$

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν συναρτήσεων μὲ συντελεστὰς τοὺς ἐκλεγέντας ὡς ἀνωτέρω συγκλίνει ὁμοιομόρφως πρὸς τὴν συνάρτησιν $f(z)$, ἡ ὁποία ἄλλωστε ἀνήκει εἰς τὴν οἰκογένειαν καὶ ἑπομένως ἡ οἰκογένεια εἶναι κανονική.

II. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι αἱ συναρτήσεις τῆς οἰκογενείας δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἔστω, ἐπειδὴ $p_n \leqslant k$, s ἡ μεγαλυτέρα τάξις μεταξὺ αὐτῶν. Ἔχομεν

$$|c_i^{(n)}| \leqslant M \quad (i = 0, 1, \dots, p_n), \quad |\lambda_r^{(n)}| \leqslant N \quad (r = 0, 1, \dots, p_n - 1)$$

Οἱ συντελεσταὶ

$$c_i^{(n)} \quad (i = p_n + 1, \dots, s)$$

ἐξαρτῶνται γραμμικῶς ἀπὸ τοὺς

$$c_i^{(n)} \quad (i = 0, 1, \dots, p_n)$$

καὶ ἀπὸ τοὺς

$$\lambda_r^{(n)} \quad (r = 0, 1, \dots, p_n - 1)$$

χάρις εἰς τὰς σχέσεις

$$(2')\qquad m c_m^{(n)} = \lambda_0^{(n)}\, c_{m-1}^{(n)} + \dots + \lambda_{p_n-1}^{(n)}\, c_{m-p_n}^{(n)}$$

ἐφαρμοζομένων διαδοχικῶς. Ἑπομένως

$$|c_i^{(n)}| \leqslant \Lambda \quad (i = p_n + 1, \ldots s).$$

Ἐὰν

$$L = \max(M, \Lambda),$$

ἔχομεν

$$|c_k^{(n)}| \leqslant L \quad (k = 0, 1, \ldots, s).$$

καὶ ἐπαναπίπτομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἡ οὕτω ὁρισθησομένη ὁρικὴ συνάρτησις θὰ εἶναι τάξεως s.

3. Ἐὰν

$$z = re^{\varphi i}, \quad \lambda_l^{(n)} = \lambda_l'^{(n)} + i\,\lambda_l''^{(n)}, \quad (l = 0, 1, \ldots, p_n - 1)$$

θὰ εἶναι

$$\Re\,[P_n(z)] = b_{pn-1}^{(n)}(\varphi)\, r^{p_n} + b_{pn-2}^{(n)}(\varphi)\, r^{p_n - 1} + \ldots$$

$$|b_{pn-1}^{(n)}| \leqslant K \leqslant N, \quad \text{διὰ} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

ἐπομένως, δι' ἀρκούντως μέγα r,

$$(3) \qquad |f_n(z)| - \alpha_n| \leqslant e^{k(1+\varepsilon)}\, r^{p_n}$$

καὶ

$$(4) \qquad \max_{|z| = r} |f_n(z) - \alpha_n| \geqslant e^{k(1-\varepsilon) r^{p_n}}$$

ἐνῷ διὰ τυχὸν r

$$(5) \qquad |f_n(z) - \alpha_n| \leqslant e^{A_n \left(\frac{r}{r-1}\right)^{p_n+1}}, \quad A_n = \max(|N| \log (c_0^{(n)} - \alpha_n)|)$$

Διὰ τὴν ὁρικὴν συνάρτησιν αἱ σχέσεις (3), (4) καὶ (5) γίνονται ἀντιστοίχως

$$(3') \qquad |f(z) - \alpha| \leqslant e^{k(1+\varepsilon) r^s}, \quad \text{διὰ } r > \varrho$$

$$(4') \qquad \max_{|z| = r} |f(z) - \alpha| \geqslant e^{k(1-\varepsilon) r^s}, \quad \text{διὰ } r > \varrho$$

$$(5') \qquad |f(z) - \alpha| \leqslant e^{A\left(\frac{r-1}{r-1}\right)^{s+1}}, \quad A = \max(N, \log|(c_0 - \alpha)|), \quad \text{διὰ τυχὸν } r$$

Εἶναι ἐπομένως αἱ συναρτήσεις τῆς οἰκογενείας τύπου k.

4. Μὲ μέθοδον ἀνάλογον δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν διὰ τὰς μερομόρφους συναρτήσεις, τὸ ἑξῆς θεώρημα·

«Αἱ μερόμορφοι συναρτήσεις πεπερασμένης τάξεως p_n ($p_n \leqslant K$ σταθεροῦ)

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m = \frac{g_n(z)}{h_n(z)} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m}{\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m^{(n)} z^m}$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐξαιρετικὴν τιμὴν ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος R καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες

$$|c_i^{(n)}| \leqslant M, \ |b_i^{(n)}| \leqslant M \ (i=0, 1, \ldots, p_n), \ |c_1^{(n)}| \geqslant \mu > 0, \ |b_1^{(n)}| \geqslant \mu > 0$$

ἀποτελοῦν κανονικὴν οἰκογένειαν».

Αἱ συναρτήσεις τῆς οἰκογενείας δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχουν ὅλαι μίαν ἢ ὅλαι δύο ἐξαιρετικὰς τιμάς. Δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλαι μὲν μίαν, ἄλλαι δὲ δύο. Ἡ ὁρικὴ συνάρτησις, ἡ ὁποία θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν οἰκογένειαν, θὰ ἔχῃ μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν πᾶσαι αἱ συναρτήσεις τῆς οἰκογενείας ἔχουν δύο ἐξαιρετικὰς τιμάς, ὅτε καὶ αὕτη θὰ ἔχῃ δύο.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὴν μελέτην τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων

$$g_n(z) - \alpha_n h_n(z)$$

ὅπου α_n ἡ ὑπάρχουσα ἐξαιρετικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f_n(z)$.

RÉSUMÉ

On sait qu'une famille de fonctions entières ou méromorphes n'est pas, en général, normale. Il est intéressant, d'autre part, de connaître les cas dans lesquelles une telle famille est normale.

Pour les familles de fonctions entières d'ordre fini l'auteur dans la présente communication arrive au théorème suivant.

« Si l'on donne p_n ($\leqslant k$) et les inégalités

$$|c_i^{(n)}| \leqslant M \ (i=0, 1, \ldots, p_n), \ |c_1^{(n)}| \geqslant \mu > 0,$$

toutes les fonctions entières d'ordre p_n

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m,$$

ayant une valeur exceptionnelle dans un cercle de rayon R, forment une famille normale».

On peut trouver une limite supérieure des modules ainsi que le type des fonctions de la famille.

On obtient des résultats analogues pour les familles de fonctions méromorphes d'ordre fini.