ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 16ΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1996

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΙΩΑΝΝΟΥ ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ὁ σκοπὸς τῆς σημερινῆς ὁμιλίας εἶναι νὰ ἐξετάσομε, ἐν συντομία, τὴν συμπεριφορὰ τῶν κατὰ καιροὺς ἰσχυσάντων καὶ ἰσχυόντων Ἐκπαιδευτικῶν Συστημάτων (ΕΣ) ἔναντι τῆς Μαθηματικῆς Παιδείας, νὰ ἐκθέσομε τὴν ἀπὸ μακροῦ χρόνου ἐπικρατούσα νοσηρὴ κατάσταση στὸν τομέα αὐτὸ (καὶ ὄχι μόνο στὴν Ἑλλάδα) καὶ νὰ καταλήξομε σὲ γενικὰ μὲν ἀλλὰ σαφῆ συμπεράσματα ποὺ ἀφοροῦν ἀναγκαῖα μέτρα τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ληφθοῦν γιὰ τὴν ἐξυγίανση τῆς ἐν λόγῳ καταστάσεως.

Ἐξάλλου μιὰ προσπάθεια ὅπως ἡ σημερινὴ ἐμπίπτει στοὺς σκοποὺς τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπιτυγχάνονται δι' ἀνακοινώσεων, συζητήσεων, ὁμιλιῶν, δημοσιευμάτων κλπ., ἤτοι διὰ πράξεων καὶ ἔργων προερχομένων εἴτε ἐκ τῆς ἰδίας πρωτοβουλίας τῆς Ἀκαδημίας εἴτε ὅταν αὐτὴ ἀποδέχεται τὴν ἐκτέλεση ἔργων ἀνατιθεμένων εἰς αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Κράτους ἢ ἄλλων ἱδρυμάτων καὶ ἰδιωτῶν.

Καὶ προχωρῶ στὴν ἀνάπτυξη τοῦ θέματός μου.

Θὰ ἤθελα ἐξ ἀρχῆς νὰ καταστήσω γνωστὸ ὅτι τὶς ἰδέες καὶ ἀπόψεις τὶς ὁποῖες θὰ προσπαθήσω νὰ παρουσιάσω συμμερίζεται ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς συναδέλφων μαθηματικῶν ἐδῶ στὴν Ἑλλάδα καὶ στὸ Ἐξωτερικό.

Τὰ ΕΣ τὰ ὁποῖα ἔχω ὑπόψη εἶναι τῶν χωρῶν ἐκείνων ὅπου ἔτυχε νὰ ἐργασθῶ ὑπὸ τὴν ἐπιστημονική μου ἰδιότητα. Ἔχω ὅμως τὴν γνώμη ὅτι ὅσα θὰ λεχθοῦν ἰσχύουν καὶ γιὰ πολλὰ ἄλλα ΕΣ.

Τὰ περισσότερα ἐκ τῶν ἐν λόγω ΕΣ θεώρησαν τὰ μαθηματικὰ ὡς μία τεχνικὴ ἱκανότητα γιὰ ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς, μερικοὶ μάλιστα χρησιμοποίησαν τὸν ὅρο «ποσοτικῶς σκέπτεσθαι» γιὰ νὰ περιγράψουν τὴν ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν σὲ περιοχὲς ποὺ ἀφοροῦν ἄλλες ἐπιστῆμες.

Ἡ παραπάνω ἀντίληψη εἶναι τελείως ἐσφαλμένη καὶ παρεκώλυσε σοβαρὰ τὴν ἱκανότητα τῶν σπουδαστῶν μας νὰ ἀντιληφθοῦν σπουδαῖες προόδους ποὺ συντελέσθηκαν στὸν χῶρο τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῆς φιλοσοφικῆς σκέψης, καὶ τοῦτο διότι κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο ἀγνοήθηκε τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ μαθηματικὰ ἀποτελοῦν τὴν μία ἐκ τῶν συνιστωσῶν κάθε σχεδίου φιλελεύθερης παιδείας. Ὡς μητέρα ὅλων τῶν ἐπιστημῶν, ἡ Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν οἰκοδομεῖ τὴν γόνιμη φαντασία, εἶναι ἡ ὑφάντρια προτύπων καθαρῆς καὶ λεπτῆς σκέψης, ὁ ὁραματιστής, ὁ ποιητής.

Εἶναι γνωστό, ὄχι μόνο στὴν Ἑλλάδα ἀλλὰ καὶ σὲ ἄλλες χῶρες, ὅπως λ.χ. στὶς USA, ὅτι παρατηρεῖται ἔντονο ἐνδιαφέρον καὶ ἀνησυχία γιὰ τὴν κατάσταση στὴν ὁποία εὑρίσκεται ἐδῶ καὶ ἀρκετὸ καιρὸ ἡ μαθηματικὴ παιδεία, ἡ δὲ αἰτία γιὰ τὴν ἀνησυχία αὐτὴ φαίνεται νὰ εἶναι οἱ πολλὲς καὶ ποικίλες δυσκολίες ποὺ ἀντιμετωπίζουν οἱ σπουδαστὲς στὰ μαθήματα τῶν μαθηματικῶν. Εἶναι περιττὸν νὰ σᾶς ὑπενθυμίσω τὰ ἀποτελέσματα τῶν τελευταίων ἐτῶν στὶς εἰσαγωγικὲς ἐξετάσεις στὰ Ἀνώτατα καὶ Ἀνώτερα ἐκπαιδευτικὰ ἱδρύματα τῆς χώρας μας.

Ἡ ἀντίδραση τῶν ΕΣ ἔναντι τοῦ φαινομένου αὐτοῦ ὑπῆρξε μιὰ ἀπεγνωσμένη προσπάθεια νὰ ἀναγκάσει τὸν σπουδαστὴ νὰ «μάθει» μαθηματικὰ καθ' οἱονδήποτε τρόπον.

Οἱ συλλογισμοί, κατὰ τὶς μακρὲς συσκέψεις καὶ συζητήσεις, σχετικὰ μὲ τὸ ποιὰ καὶ πόση ὕλη ἐκ τῶν μαθηματικῶν πρέπει νὰ διδάσκεται στὰ σχολεῖα, ἀκολούθησαν δύο ἀλληλοσυγκρουόμενες κατευθύνσεις.

Κατὰ τὴν πρώτη ἐκ τῶν ἀπόψεων αὐτῶν πρέπει νὰ ὑπάρχει ἕνα ἐλάχιστο μέτρο, βάσει τοῦ ὁποίου νὰ παρέχεται σὲ ὅλους ἀνεξαιρέτως τοὺς σπουδαστὲς ἡ ἴδια ὕλη. Οἱ ὑποστηρικτὲς τῆς δευτέρας ἀπόψεως ἐπέμεναν ὅτι ἡ ἑκάστοτε παρεχομένη «δόσις» τῶν μαθηματικῶν πρέπει νὰ περιορίζεται σὲ ὅ,τι εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαῖο, ποὺ σημαίνει ὅτι μαθήματα μαθηματικῶν πρέπει νὰ διδάσκονται μόνο ὅταν αὐτὰ εἶναι προαπαιτούμενα γιὰ τὴν παρακολούθηση κάποιων ἄλλων μαθημάτων.

Κατὰ τὴν διάρκεια τῶν ὡς ἄνω συζητήσεων αὐτοῦ τοῦ εἴδους, αὐτὸ τοῦτο τὸ θέμα «μαθηματικὰ» περιῆλθε, ἀπὸ πλευρᾶς σπουδαιότητας, σὲ δεύτερη μοίρα. Μιὰ τέτοια τοποθέτηση τῶν μαθηματικῶν σὲ θέση δευτερεύουσας σημασίας εἶχε ὡς συνέπεια νὰ θεωρηθοῦν αὐτὰ ὡς ἀντικείμενο ἄκρως ἐσωτερικῆς φύσεως γιὰ τὸ κάθε ἄτομο καὶ ὅτι, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ μαθηματικὰ ἔχουν κάποιες πρακτικὲς ἐφαρμογές, ἀσθενεῖς εἶναι οἱ δεσμοὶ ποὺ ἔχουν μὲ ἄλλες περιοχὲς τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψης. Ἐπίσης παραλείφθηκε στὶς συζητήσεις αὐτὲς κάθε ἀναφορὰ στὴν πνευματικὴ καὶ αἰσθητικὴ διάσταση ποὺ χαρακτηρίζουν τὰ μαθηματικά, μὲ τὴν αἰτιολογία ὅτι μιὰ τέτοια ἀναφορὰ θὰ ἦταν ἄσχετη μὲ τὸ ὑπὸ μελέτην θέμα καὶ ὅτι αὐτή, ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς, κανένα ἄλλον δὲν ἀφορᾶ.

Στὰ περισσότερα προγράμματα διδασκόμενης ὕλης (curricula) ἡ ὑπάρχουσα ἀποσύνδεση (ἀποστασιοποίηση) τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα ἀντικείμενα μαθήσεως ἀποπροσανατολίζει τὸν σπουδαστή. Παράδειγμα ἀποτελεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι μαθήματα τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν διδάσκονται σχεδὸν πάντα χωρὶς νὰ προϋποθέτουν τὴν γνώση, ὀλίγων ἔστω, μαθηματικῶν ἀπὸ τὸν διδασκόμενο.

Ἐπίσης ἀναμένεται ὁ σπουδαστὴς νὰ μάθει λ.χ. βιολογία χωρὶς νὰ στηριχθεῖ στὶς ἀρχὲς καὶ στὸν φορμαλισμὸ τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν. Πολλοὶ στατιστικολόγοι στὴν ἐποχή μας ἐπιμένουν ὅτι τὸ ἀντικείμενο μὲ τὸ ὁποῖο ἀσχολοῦνται εἶναι κάτι τελείως ξεχωριστὸ ἀπὸ τὰ μαθηματικὰ καὶ ὡς ἐκ τούτου στὰ μαθήματα στατιστικῆς δὲν πρέπει νὰ προαπαιτεῖται καμμία προετοιμασία στὰ μαθηματικά.

Πολλοὶ ἐπιστήμονες στὸν τομέα τῆς Πληροφορικῆς καταλήγουν νὰ ὑποστηρίξουν ὅτι, ἂν κανεὶς καταλαβαίνει τὰ μαθηματικὰ τῶν «μηχανῶν» τους, αὐτὸ εἶναι ἀρκετὸ καὶ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταλάβει τὰ μαθηματικὰ ποὺ ἀπαιτοῦνται γιὰ τὴν ἑρμηνεία τῶν φυσικῶν φαινομένων.

Ὁ σπουδαστὴς ἀπὸ τὴν δική του πλευρά, μὴ ἔχοντας ἐποπτεία τῆς ὅλης καταστάσεως, εἶναι φυσικὸ νὰ εὑρίσκει ὅτι τὰ πάντα ἔχουν καλῶς. Ἔχει τὴν ἐντύπωση ὅτι οἱ παράγοντες ποὺ προσδιορίζουν πότε ἕνα μάθημα εἶναι δύσκολο ἢ εὔκολο, πότε εἶναι γενικῆς φύσεως ἢ ἐξειδικευμένο, εἶναι οἱ δυσκολίες ποὺ παρουσιάζουν οἱ προτεινόμενες σ' αὐτὸν ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρὸς λύσιν καθὼς καὶ τὸ πόσο ὀγκῶδες εἶναι τὸ βιβλίο ἢ τὸ σύγγραμμα στὸ ὁποῖο θὰ ἐξετασθεῖ. Ἐξάλλου ἐλάχιστα ἐνημερώνεται αὐτὸς γιὰ τὴν σημασία ποὺ ἔχει ἡ ἔννοια «αὐστηρότητα» ὅταν αὐτὴ ἀναφέρεται στὴν ἀπόδειξη ἑνὸς θεωρήματος ἢ στὸν ὁρισμὸ μιᾶς μαθηματικῆς ἔννοιας κλπ.

Μιὰ προσεκτικὴ ἐξέταση τῆς φύσης τῆς ἐπιστήμης τῶν μαθηματικῶν ὡς πνευματικῆς δραστηριότητας ἀποκαλύπτει τὸ ἀσυνάρτητο καὶ τὴν δυσαρμονία ποὺ χαρακτηρίζει τὴν ὡς ἄνω κατάσταση. Ἔτσι οἱ σπουδαστές μας ὄχι μόνο δὲν μπόρεσαν νὰ ἐκτιμήσουν τὴν ὀμορφιὰ τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ πολὺ λίγο μπόρεσαν νὰ κατανοήσουν βαθύτερα τὸν φυσικὸ κόσμο, ἡ γνώση τοῦ ὁποίου κατέστη δυνατὴ χάρις στὴν ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν. Οἱ νέοι μας πρέπει νὰ ἀντιληφθοῦν ὅτι τὰ μαθηματικὰ δὲν εἶναι μιὰ ἁπλὴ πνευματικὴ περιέργεια ἢ κάποια χρήσιμη τεχνικὴ ἐπιδεξιότητα, ἀλλὰ ὅτι αὐτὰ ἀποτελοῦν μιὰ ἀπὸ τὶς σπουδαῖες ὄψεις τῆς πλέον χαρακτηριστικῆς ἱκανότητας τοῦ ἀνθρωπίνου εἴδους.

Γιὰ τοὺς παραπάνω λοιπὸν λόγους θὰ προσπαθήσομε νὰ ἐξετάσομε ἀπὸ πιὸ κοντὰ τὴν φύση καὶ ἄλλες ὄψεις τῶν μαθηματικῶν.

Ὡς ἕνα γενικὸ ὁρισμό, μποροῦμε νὰ δεχθοῦμε ὅτι μαθηματικὰ εἶναι ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ χώρου. Γιὰ νὰ μπορέσουν ὅμως οἱ μαθηματικοὶ νὰ μιλήσουν γιὰ τὰ πράγματα αὐτὰ ἔπρεπε πρῶτα ἀπ' ὅλα νὰ ἐπινοήσουν ἕνα κατάλληλο λεξιλόγιο καὶ ἕνα ἀλφάβητο. Τὰ ὁριζόμενα ἀντικείμενα εἶναι ἀφηρημένα καὶ τὰ «βλέπομε» μόνο μὲ τὴν ἀνθρώπινη φαντασία. Τὰ μαθηματικὰ εἶναι κατανοητὰ ἀκριβῶς διότι εἶναι ἀφηρημένα καὶ διαφέρουν ἀπὸ τὶς ἄλλες γλῶσσες, διότι εἶναι πλήρως ἀποσυνδεδεμένα ἀπὸ τὶς πολυπλοκότητες ποὺ μᾶς δημιουργεῖ ἡ ἐμπειρία τῆς ἀπευθείας παρατηρήσεως. Καὶ εἶναι σκόπιμο ἐδῶ νὰ ὑπενθυμίσομε κάτι ποὺ θὰ μᾶς χρησιμεύσει ἀργότερα, ὅτι δηλαδὴ ἡ «φαντασία» καὶ ἡ «ἀφαίρεση» ἀποτελοῦν μέρη τῆς ἐμπειρίας κάθε ἀνθρώπου καὶ ὄχι μόνο τοῦ μαθηματικοῦ.

Κατ' ἀρχὴν ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο ἐπινοήθηκαν τὰ μαθηματικὰ ὡς γλώσσα ὑπῆρξε ἡ ἀδυναμία τῆς ὑφισταμένης γλώσσας νὰ χειρισθεῖ τὸ ἐν λόγῳ ἀντικείμενο. Ὁ Newton π.χ. θεώρησε ἀναγκαῖο νὰ ἐφεύρει τὸν Διαφορικὸ Λογισμὸ γιὰ νὰ μπορέσει νὰ ἀναπτύξει καὶ νὰ ἐκφράσει τὶς ἰδέες του. Τὸ νὰ ἐπιχειρήσει κανεὶς νὰ καταλάβει τὰ λεγόμενα ἀπὸ τὸν Newton χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσει τὸν Διαφορικὸ Λογισμὸ εἶναι σὰν νὰ προσπαθεῖ νὰ καταλάβει τὸν *Σοφοκλῆ* χωρὶς τὴν χρήση λέξεων. Θὰ μποροῦσε βέβαια κάποιος νὰ παρουσιάσει τὴν *Ἀντιγόνη* μὲ μιὰ σειρὰ εἰκόνων. Ἂν αὐτὸ γίνει μὲ προσοχὴ καὶ καλὴ τεχνική, τὰ κύρια σημεῖα τῆς ὅλης ἱστορίας θὰ μποροῦσαν νὰ γίνουν καταληπτά. Ὅμως τὸ ὅλο ἔργο προφανῶς δὲν περιορίζεται μόνο σὲ μιὰ ἱστορία ποὺ ἀναφέρεται σὲ ὁρισμένα ἄτομα τὰ ὁποῖα πεθαίνουν ὑπὸ τραγικὲς συνθῆκες. Ὑπάρχουν πολὺ περισσότερα πράγματα σ' αὐτό. Οἱ ὀπτικὲς εἰκόνες, ὅσο σπουδαῖες καὶ ἂν εἶναι γιὰ τὴν ἐπικοινωνία τῶν ἀνθρώπων μεταξύ τους, δὲν ἀποτελοῦν εἶδος γλώσσας, ἐνῶ ἀντιθέτως τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἕνα εἶδος γλώσσας.

Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ μαθηματικοὶ ἐπινόησαν τὴν γλώσσα αὐτή, προσπάθησαν χρησιμοποιώντας την νὰ ἀποκαλύψουν, σὲ σχέση μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸν χῶρο, ποιὰ πράγματα εἶναι δυνατὰ καὶ ποιὰ δὲν εἶναι.

Ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία ποὺ τόσο πολὺ ἐκτιμᾶται γιὰ τὸ κάλλος της εἶναι ἀποτέλεσμα μιᾶς τέτοιας διαδικασίας. Ὁ A. Einstein συνήθιζε νὰ λέγει: «Ἂν ὁ Εὐκλείδης δὲν κατάφερε νὰ διεγείρει τὸν νεανικό σου ἐνθουσιασμό, τότε δὲν εἶσαι γεννημένος γιὰ νὰ γίνεις ἐπιστήμονας-στοχαστής».

Ὅταν κανεὶς καταλαβαίνει τὴν γλώσσα, τότε δὲν ξέρει μόνο τί εἶναι τὸ τρίγωνο, ἀλλὰ γνωρίζει καὶ τί μπορεῖ νὰ λεχθεῖ γιὰ τὰ τρίγωνα ἐν γένει.

Ἐρχόμαστε τώρα στὸν ρόλο τὸν ὁποῖο παίζει ἡ ἀφηρημένη αὐτὴ μαθηματικὴ γλώσσα στὶς πειραματικὲς ἐπιστῆμες. Ἐκεῖ ὁ ἐπιστήμων χρησιμοποιεῖ τὰ μαθηματικὰ γιὰ τὴν κατασκευὴ τῶν λεγομένων «μεταφορῶν», ἤτοι ἐνοραμάτων τὰ ὁποῖα συντελοῦν στὸ νὰ γνωρίσομε καλύτερα τοὺς ἐσωτερικοὺς μηχανισμοὺς λειτουργίας τῆς φύσης.

Ὅπως καὶ στὴν ποίηση, ἡ χρήση μεταφορῶν ἀποτελεῖ καὶ στὶς θετικὲς ἐπιστῆμες κοινὸν τόπον. Ὅμως αὐτὸ ποὺ διακρίνει τὴν μαθηματικὴ μεταφορὰ ἀπὸ τὶς ἄλλες, εἶναι ἡ ἐκπληκτικὴ ἰσχὺς ποὺ ἔχει αὐτὴ ἡ γλώσσα νὰ ἀποκαλύπτει τὶς ἐπιπτώσεις ποὺ ἔχει ἡ θεωρουμένη ἰδέα. Οἱ μεταφορὲς δὲν παρέχουν ἀπαντήσεις σὲ ἐρωτήματα, ἀποκαλύπτουν ὅμως, ὅπως ἐτόνισα, συνέπειες ἢ ἐπιπτώσεις. Ὅταν λ.χ. λέμε ὅτι ἡ γῆ εἶναι μιὰ σφαίρα, ἡ μεταφορὰ αὐτὴ ἀποτελεῖ μιὰ βαρυσήμαντη δήλωση διότι γνωρίζομε καὶ μποροῦμε νὰ ποῦμε πολλὰ πράγματα γιὰ τὶς σφαῖρες. Τέτοιες κατασκευὲς ἀποκαλοῦνται ἀπὸ μερικοὺς «πρότυπα» (models).

Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἕνας ἀκόμα λόγος ποὺ ἐξηγεῖ τὸν σπουδαῖο ρόλο τὸν ὁποῖο τὰ μαθηματικὰ διαδραματίζουν στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες. Πρόκειται γιὰ τὸ ποσοστὸ ἐκεῖνο «βεβαιότητας» ποὺ αὐτὰ ἐξασφαλίζουν σ' αὐτές, κάτι ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ ἀποκτηθεῖ κατὰ κανένα ἄλλο τρόπο.

Ὅπως συμβαίνει σὲ κάθε ἐπιστήμη, σὲ κάθε πνευματικὴ δραστηριότητα, ἡ κατανόηση ἑνὸς πράγματος ἐπιτυγχάνεται κατόπιν κριτικῆς σκέψης καὶ ὄχι ἁπλῶς μετὰ ἀπὸ σκληρὴ ἐργασία ρουτίνας. Ὅπως προσφυῶς παρατηρεῖ ὁ Paul Dirac: «Κατανοῶ τὴν σημασία μιᾶς ἐξισώσεως ἂν διαθέτω κάποιο τρόπο νὰ ἀντιληφθῶ τὶς χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τῆς λύσης της χωρὶς νὰ λύσω τὴν ἴδια τὴν ἐξίσωση». Αὐτὸ ἀκριβῶς ἐννοοῦμε μὲ τὴν λέξη «ἐνόραμα» ποὺ χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Πρόκειται γιὰ τὴν διαίσθηση ἐκείνη ἡ ὁποία βασίζεται στὴν κριτικὴ ἀνάλυση τῶν ὑπὸ θεώρηση βασικῶν θεμάτων, ὁ δὲ ρόλος τοῦ διδάσκοντος εἶναι νὰ ἐνεργήσει ἔτσι ὥστε ὁ διδασκόμενος νὰ ἀποκτήσει τὴν ἱκανότητα νὰ ἔχει ἐνοράματα καὶ ὄχι ἁπλῶς τὴν τεχνικὴ ἐπιδεξιότητα στὴν ἐκτέλεση πράξεων.

Ἔχομε λοιπὸν μέχρι στιγμῆς τὴν ἀκόλουθη, ὄχι τόσο σαφῆ, εἰκόνα τοῦ ρόλου τὸν ὁποῖον παίζουν τὰ μαθηματικὰ στὴν ἀνάπτυξη τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν. Στὴν μία πλευρὰ τῆς εἰκόνας εἶναι οἱ μαθηματικοὶ οἱ ὁποῖοι ἐπινοοῦν ἀξιωματικὰ συστήματα, ἀφηρημένους χώρους καὶ παρέχουν τὰ σχετικὰ θεωρήματα τὰ ὁποῖα εἶναι στὴν διάθεση τῶν ἐργαζομένων στὶς φυσικὲς καὶ σὲ ἄλλες ἐπιστῆμες. Στὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς εἰκόνας εὑρίσκονται οἱ φυσικοί, οἱ βιολόγοι, οἱ οἰκονομολόγοι καὶ πολλοὶ ἄλλοι οἱ ὁποῖοι προτείνουν στοὺς μαθηματικοὺς πολλὰ ἀπὸ τὰ πρὸς λύσιν προβλήματά τους καὶ μὲ εὐγνωμοσύνη δέχονται τὶς λύσεις ποὺ τοὺς δίδονται.

Ἔχει κανεὶς τὴν αἴσθηση ὅτι κάτι λείπει ἀπὸ τὴν εἰκόνα αὐτή. Συμβαίνει πολὺ συχνά, προβλήματα ποὺ ἀνακύπτουν στὸ φυσικὸ κόσμο ποὺ μᾶς περιβάλλει, ὅταν αὐτὰ διατυπωθοῦν στὴν γλώσσα τῶν μαθηματικῶν, νὰ ἀποτελέσουν πηγὴ σπουδαίων προβλημάτων στὰ καθαρὰ μαθηματικὰ καὶ τοῦτο διότι οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων αὐτῶν ὁδηγοῦν συχνὰ σὲ γενικεύσεις οἱ ὁποῖες καταλήγουν σὲ σπουδαῖες ἀρχὲς καὶ θεωρήματα στὰ καθαρὰ μαθηματικά. Γιὰ νὰ γίνομε περισσότερο κατανοητοὶ θὰ ἐξετάσομε, πολὺ σύντομα, μερικὲς συγκεκριμένες περιοχὲς τῶν καθαρῶν μαθηματικῶν στὶς ὁποῖες οἱ ἐφαρμογὲς ἔπαιξαν ἕνα σπουδαῖο καὶ οὐσιαστικὸ ρόλο. Θὰ δώσομε μερικὰ παραδείγματα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1. Τὸ πρῶτο παράδειγμα εἶναι ἡ Γεωμετρία. Αὐτὴ ξεκίνησε, ὡς μιὰ ἐμπειρικὴ ἐπιστήμη, μὲ τὴν μέτρηση τῆς γῆς ἀπὸ τοὺς Αἰγυπτίους. Οἱ Ἕλληνες ἦταν αὐτοὶ (κορωνίδα ἀποτελεῖ τὸ ἔργο τοῦ Εὐκλείδη) οἱ ὁποῖοι μετέτρεψαν τὴν Γεωμετρία ἀπὸ ἐμπειρικὴ σὲ ἀξιωματικὴ θεωρία, ἀπετέλεσε δὲ αὐτὴ πρότυπο μαθηματικῆς σκέψης γιὰ τὰ ἑπόμενα 2000 χρόνια. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἀναφέρομαι στὰ *Στοιχεῖα*, τὸ μνημειῶδες ἔργο τοῦ Εὐκλείδη. Μὲ τὴν μετατροπὴ αὐτὴ τῆς Γεωμετρίας σὲ ἀξιωματικὴ θεωρία ἄλλαξε καὶ ὁ ροῦς τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν.

Ὅμως τὸ ἀξιωματικὸ αὐτὸ σύστημα ἐθεωρεῖτο ὅτι ἀποτελοῦσε περιγραφὴ μόνο τοῦ φυσικοῦ κόσμου καὶ ὄχι μιὰ ἀνεξάρτητη ἀφηρημένη μαθηματικὴ θεωρία.

Οἱ προσπάθειες τῶν μαθηματικῶν, κατὰ τὸν 18ο καὶ 19ο αἰώνα, νὰ ἀποδείξουν τὸ 5ο Ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδη (ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας μία καὶ μόνον μία παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν) χρησιμοποιώντας τὰ ὑπόλοιπα τέσσερα ἀξιώματα, ἀπέτυχαν. Ἀποτέλεσμα τῆς ἀποτυχίας αὐτῆς ἦταν νὰ γίνει βαθμιαίως ἀντιληπτό, ὅτι ἡ «ὑπερβολικὴ γεωμετρία» τῶν Bolay καὶ Lobachevsky δὲν ὁδηγεῖ σὲ καμμιὰ ἀντίφαση. Ἀπεναντίας, οἱ Klein, Beltrami καὶ H. Poincaré ἀπέδειξαν ὅτι ἡ «ὑπερβολικὴ γεωμετρία» καθὼς καὶ ἡ «ἐλλειπτικὴ γεωμετρία» τοῦ Riemann εἶναι καὶ αὐτὲς λογικῶς συνεπεῖς ὅπως καὶ ἡ Εὐκλείδειος. Πρόκειται πάντως γιὰ ἀφηρημένα μαθηματικὰ συστήματα, κατὰ τὴν σύγχρονη ἔννοια τοῦ ὅρου, ἐκ τῶν ὁποίων κανένα δὲν ἰσχυρίζεται ὅτι ἀποτελεῖ περιγραφὴ τοῦ φυσικοῦ χώρου στὸν ὁποῖον ζοῦμε.

Κατὰ τὸ πρῶτο ἥμισυ τοῦ 20οῦ αἰώνα, τὴν ἐποχὴ ἀκριβῶς ποὺ ὁλοκληρώνονται οἱ ἀφηρημένες γεωμετρικὲς θεωρίες ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, ἡ ροὴ τῶν πραγμάτων ἀντιστρέφεται. Ὁ Einstein, ζητώντας νὰ βρεῖ μιὰ θεωρητικὴ βάση γιὰ τὴν Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας, τὴν εὑρίσκει στὴν γεωμετρία τοῦ Riemann. Ἡ ἰδέα ὅτι τὸ φυσικὸ σύμπαν δὲν εἶναι πεπερασμένο ἀλλὰ ἀπεριόριστο (μὴ φραγμένο) ἀποτελεῖ πλέον κοινὸν τόπον (cliché) γιὰ τὴν σύγχρονη φυσική. Ὁ Einstein ἔκανε τὸ ἐπαναστατικὸ ἐκεῖνο βῆμα καὶ ἐταύτισε τὸν φυσικό μας κόσμο μὲ ἕνα κυρτὸ μὴ Εὐκλείδειο χῶρο. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὸ χρέος ποὺ ἡ Θεωρία τῆς Σχετικότητας εἶχε πρὸς τὴν θεωρητικὴ γεωμετρία ξεπληρώθηκε πλήρως, καὶ τοῦτο διότι πολλὲς ἰδέες τῆς σύγχρονης Διαφορικῆς Γεωμετρίας πηγάζουν ἀπὸ τὴν Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας. Ὡς παραδείγματα θὰ ἀναφέρομε τὴν θεωρία Πολλαπλοτήτων (manifolds), τοὺς Ἐφαπτόμενους Χώρους (tangent spaces) καὶ μέρη τῆς Μιγαδικῆς Γεωμετρίας (complex geometry).

Παράδειγμα 2. Ὁ Ἀπειροστικὸς Λογισμὸς μαζὶ μὲ τὴν ὁμάδα τῶν ἰδεῶν ποὺ τὸν ἀκολούθησαν ἀποτελοῦν τὴν λεγόμενη Μαθηματικὴ Ἀνάλυση, ἡ ὁποία εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀκρογωνιαίους λίθους τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν. Ἡ Μαθηματικὴ Ἀνάλυση ξεκίνησε μὲ τὶς προσπάθειες ποὺ καταβλήθηκαν στὸ νὰ ἀναπτυχθεῖ μιὰ θεωρία ἡ ὁποία θὰ ἠσχολεῖτο μὲ τὶς παρατηρήσεις καὶ τὶς ποσοτικὲς μετρήσεις διαφόρων φαινομένων, τὶς ὁποῖες ἐξετέλεσαν οἱ Galileo, Copernicus, Kepler, κ.ἄ., κατὰ τὸν 16ο καὶ 15ο αἰώνα. Ὁ Isaac Newton (1642-1727) στὸ μνημειῶδες ἔργο του «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*» (1687), ἐξέφρασε ὑπὸ μαθηματικὴ μορφὴ ὁρισμένες ἀρχὲς τῆς φυσικῆς οἱ ὁποῖες, ὅπως ἐδήλωσε, διέπουν «ὅλη» τὴν ὕλη. Ὁ νόμος τοῦ Newton ποὺ ἀφορᾶ τὴν παγκόσμια ἕλξη τῶν σωμάτων καθὼς καὶ οἱ τρεῖς νόμοι του ποὺ ἀναφέρονται στὴν κίνηση τῶν σωμάτων ἀποτελοῦν τὸ θεμέλιο τῆς ἐπιστήμης τῆς Μηχανικῆς. Ὁ Newton, στὴν προσπάθειά του νὰ ἀναπτύξει τοὺς νόμους αὐτούς, ἐφεῦρε αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε σήμερα Διαφορικὸ Λογισμὸ (Calculus of fluxions), τὸν ὁποῖον καὶ χρησιμοποίησε γιὰ τὴν διατύπωση καὶ μελέτη τῶν ὡς ἄνω νόμων. Οἱ ἀρχὲς τὶς ὁποῖες ἔφερε εἰς φῶς τὸ ὡς ἄνω ἔργο *Principia* ἔγιναν πολὺ γρήγορα ἀποδεκτὲς ἀπὸ τὸν δυτικὸ ἐπιστημονικὸ κόσμο καὶ ἀποτελοῦν ἀκόμη τὶς βάσεις στὴν μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν φυσικῶν συστημάτων σὲ φυσικὰ περιβάλλοντα.

Κατὰ τὴν διάρκεια ὅμως τῶν 150 ἐτῶν μετὰ τὸν Newton ἐπικράτησε μιὰ μὴ ἀκριβής, μὴ αὐστηρὴ ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς, μιὰ ἡμι-φυσικὴ μόνο μορφὴ τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι κατὰ τὴν περίοδο αὐτὴ συντελέσθηκαν μερικὲς ἀξιοσημείωτες πρόοδοι.

Ἡ Μαθηματικὴ Ἀνάλυση κατέστη ἕνας αὐστηρὸς καὶ μὴ ἐμπειρικὸς κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης μόνο ὅταν ἐμφανίστηκε στὸ προσκήνιο ὁ Karl Weirstrass (1815-1897). Μερικοὶ μάλιστα διερωτῶνται ἂν τὸ γεγονὸς αὐτὸ ὀφείλεται στὸ ὅτι ὁ Weirstrass πρὶν νὰ γίνει μαθηματικὸς ὑπῆρξε δικηγόρος.

Παράδειγμα 3. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἀφορᾶ τὴν περιοχὴ ἐκείνη τῶν μαθηματικῶν γνωστὴ μὲ τὴν ὀνομασία «Ἁρμονικὴ Ἀνάλυση».

Ὅταν ὁ Joseph Fourier (1768-1830), στὴν ἀρχὴ τοῦ 19ου αἰώνα, μελετοῦσε τὸ φαινόμενο τῆς ἀγωγιμότητας τῆς θερμότητας, σκέφθηκε ὅτι, ἀφοῦ οἱ τριγωνομετρικὲς συναρτήσεις ἦταν περιοδικὲς μὲ διαφορετικὲς περιόδους καὶ πλάτη, θὰ ἦταν ἴσως δυνατὸ γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν συναρτήσεων αὐτῶν νὰ παραστήσουν μὲ ἀρκετὴ ἀκρίβεια πολύπλοκα περιοδικὰ φαινόμενα. Ἐρευνώντας, ὁ Fourier, κατέληξε τελικὰ νὰ συνειδητοποιήσει ὅτι αὐτὸ ποὺ τοῦ χρειαζόταν ἦταν νὰ μπορέσει νὰ παραστήσει μιὰ συνάρτηση μὲ μιὰ σειρά, αὐτὴν ποὺ σήμερα ἀποκαλοῦμε σειρὰ τοῦ Fourier (ΣF).

Ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τῶν ΣF καθὼς καὶ τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθοῦν μὲ ΣF, ἐκίνησε τὸ ζωηρὸ ἐνδιαφέρον ἑνὸς πολὺ μεγάλου ἀριθμοῦ μαθηματικῶν τοῦ 19ου αἰώνα καὶ τοὺς ὁποίους ὁδήγησε σὲ ἐκπλήσσουσες καὶ ποικίλες κατευθύνσεις ἔρευνας. Π.χ. ὁ Georg Cantor (1845-1918), ὁ θεμελιωτὴς τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, μελετώντας τὶς ΣF ἀντελήφθη ὅτι ἔπρεπε νὰ ἀσχοληθεῖ μὲ σύνολα τὰ ὁποῖα εἶχαν ἄπειρο πλῆθος στοιχείων (ἀπειροσύνολα) στὰ σημεῖα τῶν ὁποίων μιὰ ΣF συγκλίνει. Στὴ συνέχεια ὁδηγήθηκε αὐτὸς στὴν μελέτη τῶν ἀπειροσυνόλων ἐν γένει, καθὼς καὶ στὴν μελέτη τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν (ordinal numbers) καὶ τῶν πληθαρίθμων (cardinal numbers).

Ἐπίσης ὁ Henri Lebesque (1875-1941), ξεκινώντας ἀπὸ τὴν παρατήρηση ὅτι τὸ σύνηθες ὁλοκλήρωμα τοῦ Riemann δὲν ἐπέτρεπε τὸν ὑπολογισμὸ τῶν συντελεστῶν τοῦ Fourier γενικωτέρων συναρτήσεων, ἐγενίκευσε τὴν ἔννοια τοῦ ὁλοκληρώματος εἰσάγοντας τὸ γνωστὸ καὶ ἀπαραίτητο σήμερα ὁλοκλήρωμα τοῦ Lebesque.

Θὰ μπορούσαμε νὰ ἐπεκταθοῦμε καὶ σὲ ἄλλα παραδείγματα ἀναφερόμενα στὴν Θεωρία τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (συνήθων καὶ μὲ μερικὲς παραγώγους) - Θεωρία πιθανοτήτων - Θεωρία ὁμάδων κ.ἄ. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ χρόνος (ὅπως πάντα) δὲν μᾶς τὸ ἐπιτρέπει, ἂς προσπαθήσουμε νὰ διατυπώσομε μερικὰ συμπεράσματα.

Ἀνέκαθεν ὑπῆρξε καὶ ὑπάρχει μιὰ ἀλληλοεπίδραση μεταξὺ τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ τῶν μαθηματικῶν. Τὰ στάδια ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχεται ἐν γένει ἡ ἐπιστήμη εἶναι τὰ ἀκόλουθα τρία:

Οἱ περιγραφικὲς ἐπιστῆμες ζητοῦν σταθερῶς τὴν συνδρομὴ τῶν μαθηματικῶν ἐνῶ ἐλάχιστες εἶναι οἱ ὑπηρεσίες ποὺ προσφέρουν σ' αὐτά.

Οἱ πειραματικὲς ἐπιστῆμες χρησιμοποιοῦν τὰ μαθηματικὰ σὲ μεγάλη κλίμακα, ἀρχίζουν δὲ τελευταίως νὰ ἐπιστρέφουν τὸ «χρέος» τους σ' αὐτά.

Μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν θεωρητικῶν ἐπιστημῶν ὑπάρχει μιὰ ἐλεύθερη ἀνταλλαγὴ ἰδεῶν.

Ἐσωτερικὰ εἶναι τὰ κίνητρα ἑνὸς μαθηματικοῦ: Ἡ πνευματικὴ περιέργεια - ἡ αἴσθηση τῆς μορφῆς καὶ τῆς δομῆς - ἡ διαίσθηση.

Ἀντιθέτως ἐξωτερικὰ εἶναι τὰ κίνητρα ἑνὸς φυσικοῦ ἐπιστήμονος, ἀκόμα καὶ ἂν αὐτὸς εἶναι θεωρητικός.

Δὲν μπορεῖ κανεὶς νὰ προβλέψει ποιὲς θὰ εἶναι οἱ ἐφαρμογὲς μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας καὶ πότε αὐτὸ θὰ γίνει.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ νομίζω ὅτι θὰ ἦταν χρήσιμο νὰ σχολιάσω μὲ λίγα λόγια τὸ πολὺ πρόσφατο συνταρακτικὸ γεγονὸς τῆς ἀποδείξεως τοῦ «Τελευταίου Θεωρήματος τοῦ Fermat».

Τὸν Ἰούνιο τοῦ 1993 μιὰ ἄκρως ἐντυπωσιακὴ ἀνακοίνωση διαδόθηκε μὲ ἀστραπιαία ταχύτητα στὸ διεθνὲς μαθηματικὸ κοινό. Τὸ περίφημο Θεώρημα τοῦ Fermat τὸ ὁποῖο παρέμενε ἀναπόδεικτο ἐπὶ 350 χρόνια εἶχε ἐπιτέλους ἀποδειχθεῖ ἀπὸ τὸν Andrew Wiles, καθηγητὴ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Princeton (USA). Πρὸς μεγάλη ἔκπληξη πολλῶν μαθηματικῶν τὸ νέο εἶχε διαδοθεῖ καὶ διὰ μέσου τῶν συνήθων μέσων μαζικῆς ἐνημέρωσης στὸ εὐρὺ κοινό, καὶ φάνηκε νὰ σαγηνεύει ἐξίσου καὶ τοὺς μὴ εἰδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς εἰδικούς.

Κατὰ τὶς μέρες ποὺ ἐπακολούθησαν τὴν ὡς ἄνω εἴδηση, οἱ μαθηματικοὶ κυριολεκτικῶς βομβαρδίστηκαν ἀπὸ ἐρωτήσεις προερχόμενες ἀπὸ παντοῦ. Ὅμως δὲν νομίζω ὅτι μὲ τὴν εὐκαιρία αὐτὴ προσπάθησαν, ἐπωφελούμενοι τοῦ ἐκδηλωθέντος μεγάλου ἐνδιαφέροντος, νὰ ἐνημερώσουν τὸ κοινὸ ἀναφορικὰ μὲ τὴν μαθηματικὴ ἐπιστήμη γενικώτερα.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ ἀναφέρομε ὅτι οἱ εἰδικοὶ περὶ τὰ θέματα αὐτὰ ἀπεκάλυψαν, σύντομα, ἕνα χάσμα στὴν δοθεῖσα ἀπόδειξη, τὸ ὁποῖο ὅμως ὁ Wiles μὲ τὴν βοήθεια τοῦ πρώην φοιτητοῦ του καὶ νῦν καθηγητοῦ στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Cambridge Richard Taylor, κατάφερε σύντομα νὰ γεφυρώσει καὶ νὰ προβεῖ στὴν ὀρθὴ λύση τοῦ προβλήματος. Ἡ πλήρης ἀπόδειξη, ἀποτελουμένη ἀπὸ 130 σελίδες δημοσιεύθηκε τὸν Μάϊο τοῦ 1995 στὸ ἐπιστημονικὸ περιοδικὸ Annals of Mathematics. Ἔτσι, ὡς πρὸς τὰ μέσα ἐνημερώσεως καὶ τὸ κοινό, τὸ θέμα θεωρήθηκε λῆξαν. Στὴν πραγματικότητα ὅμως ἡ κατάσταση ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἡ πρόταση «κλειδὶ» τὴν ὁποία ἀπέδειξαν οἱ Wiles καὶ Taylor δὲν ἦταν τὸ «Τελευταῖο Θεώρημα τοῦ Fermat» (ΤΘF), ἀλλὰ ἕνα τελείως διαφορετικὸ θεώρημα τοῦ ὁποίου τὸ ΤΘF *ἔτυχε* νὰ εἶναι συνέπεια. Οἱ Wiles καὶ Taylor ἀπέδειξαν τὴν περίφημη εἰκασία — STW ἡ ὁποία ἀποδίδεται στούς: Goro Shimura (Princeton), τὸν ἀείμνηστο Yutaka Taniyama καὶ τὸν Andrè Weil (Institute for Advanced Study).

Γιὰ νὰ ἀποκτήσει ὁ ἀκροατὴς μιὰ περιληπτικὴ μὲν ἀλλὰ πλήρη εἰκόνα τοῦ θέματος θὰ ὑπενθυμίσομε τὰ ἀκόλουθα:

Ἡ ἐξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ ἔχει πολλὲς ἀκέραιες λύσεις, ὅπως π.χ. τὴν $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Ὅμως ἡ ἐξίσωση $x^3 + y^3 = z^3$ δὲν ἔχει ἀκέραιες λύσεις, ὁ δὲ Fermat τὸ 1635 εἶχε δηλώσει ὅτι ἀπέδειξε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δὲν ἔχει ἀκέραιες λύσεις γιὰ $n > 2$ ἐκτὸς βέβαια τῆς προφανοῦς $x = y = z = 0$.

Τὸ πρόβλημα φαίνεται ἁπλὸ καὶ «ἀθῶο», μέχρι δὲ πρὸ διετίας εἶχε ἀποδειχθεῖ ὅτι γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ n μέχρι καὶ 4000000 ἡ $x^n + y^n = z^n$ ὄντως δὲν ἔχει ἀκέραιες λύσεις.

Ἀξίζει νὰ τονισθεῖ ὅτι οἱ προσπάθειες ποὺ καταβλήθηκαν γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ Fermat ὁδήγησαν στὴν ἀνακάλυψη σπουδαίων μεθόδων, οἱ ὁποῖες ἐπηρέασαν θετικὰ τὴν ἀνάπτυξη τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν καὶ συγκεκριμένα τῆς «Θεωρίας τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν». Τώρα βέβαια χάρις στὸν Wiles γνωρίζομε ὅτι ἡ ἐν λόγω ἐξίσωση δὲν ἔχει ἀκέραιες λύσεις γιὰ κανένα n μεγαλύτερο τοῦ 2.

Ὅλη ὅμως αὐτὴ ἡ κατάσταση προκαλεῖ κάποια ἀμηχανία στὸν μὴ εἰδικὸ ὁ ὁποῖος διερωτᾶται γιατί οἱ μαθηματικοὶ νὰ ἀσχολοῦνται μὲ παρόμοια θέματα καὶ μάλιστα νὰ πληρώνονται γι' αὐτά! Καὶ διερωτᾶται ἀκόμα: Τί κερδίσαμε; Τί ὠφελήθηκε ὁ κόσμος μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ ἐν λόγω θεωρήματος;

Πρὸς τὸ παρόν, γιὰ νὰ εἴμαστε εἰλικρινεῖς, δὲν κερδίσαμε τίποτα. Τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα δὲν ἔχει εὐεργετικὲς συνέπειες οὔτε καὶ στὴν Θεωρία Ἀριθμῶν ὅπου αὐτὸ ἐμπίπτει.

Θὰ ἀπαντήσομε ὅμως στὰ παραπάνω ἐρωτήματα μὲ τὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα, τὸ ὁποῖο φέρει εἰς φῶς μιὰ ἀόρατη, συνήθως, πολιτιστικὴ ὄψη τῶν μαθηματικῶν:

Εἶναι σωστὸ νὰ θέτει κανεὶς ἐρωτήματα ὅπως τὰ παραπάνω, ὅταν εὑρίσκεται ἐνώπιον ἑνὸς ἀριστουργήματος τέχνης ἢ ἐνώπιον ἑνὸς ἐξόχου ἀθλητικοῦ ἐπιτεύγματος;

Ὅπως τονίσαμε προηγουμένως, τὰ μαθηματικά, καθὼς καὶ οἱ ἄλλες Καλὲς Τέχνες, ἀποτελοῦν μέρος τῆς πολιτιστικῆς μας παραδόσεως ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καὶ τὴν δικαίωσή τους στὶς παλαιότερες καὶ στὴν σύγχρονη ἐποχή. Ὅμως ἀντίθετα μὲ τὶς Καλὲς Τέχνες, τὸ κοινὸ ποὺ προσελκύουν τὰ μαθηματικὰ δὲν εἶναι τόσο εὐρύ, καὶ μάλιστα μικραίνει πιὸ πολὺ ὅσο τὰ λαμβανόμενα νέα ἀποτελέσματα ἔρευνας εἶναι πιὸ πρόσφατα καὶ βαθύτερα.

Ἂν ἐξαιρέσουμε περιπτώσεις ὅπως ἐκείνη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Fermat, τὰ μαθηματικὰ δὲν ἀποτελοῦν συνήθως ἀντικείμενο συνταρακτικῶν εἰδήσεων μέσα στὰ μέσα μαζικῆς ἐνημέρωσης.

Ὅμως τὰ παραπάνω, ὅπως εἴδαμε, δὲν εἶναι παρὰ μόνο τὸ ἕνα σκέλος τῆς ἱστορίας. Στὸ ἄλλο σκέλος ἀνήκουν οἱ πολυάριθμες ἐφαρμογὲς τῶν μαθηματικῶν στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες. Στὶς ἐφαρμογὲς αὐτὲς ἐκτὸς ἐκείνων ποὺ ἀναφέραμε, ἀνήκουν καὶ πολλὲς ἄλλες μεταξὺ τῶν ὁποίων:

Ἡ Θεωρία τῶν Ὁμάδων τοῦ E. Galois ἡ ὁποία μελετᾶ τὴν λύση ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ ἡ ὁποία συνετέλεσε στὴν διαλεύκανση τοῦ «ἀτομικοῦ φάσματος» (atomic spectra), ἡ Ἄλγεβρα τοῦ Boole, ἡ ὁποία ἔχει τὶς ρίζες της στὴν Μαθηματικὴ Λογική, καὶ ἐφαρμόσθηκε στὴν θεωρία τῶν ἠλεκτρονικῶν κυκλωμάτων, ἡ μετασχηματισμένη τοῦ Radon μὲ ἐφαρμογὲς στὴν τομογραφία διὰ τῶν ὑπολογιστῶν (computer tomography), ἡ Θεωρία Κατηγοριῶν στὸν σχεδιασμὸ «αὐτομάτων» καὶ «τυπικῶν γλωσσῶν» (formal languages), ἡ Διαφορικὴ Γεωμετρία, ἡ Τοπολογία καὶ ἡ Ἄλγεβρα μὲ ἐφαρμογὲς στὴν σύγχρονη θεωρητικὴ φυσική.

Συνοψίζοντας λοιπὸν ἔχομε ὅτι μαθηματικὲς ἰδέες ξεκινοῦν ὡς ἀφηρημένες ἔννοιες καὶ στὴ συνέχεια γίνονται χρήσιμες ἐφαρμογὲς αὐτῶν, ἢ ξεκινοῦν κατὰ τὶς διαδικασίες πρακτικῶν ἐφαρμογῶν καὶ στὴ συνέχεια γενικεύονται καὶ λαμβάνουν τὴν μορφὴ ἀφηρημένων ἐννοιῶν.

Τὰ τελευταῖα αὐτὰ συμπεράσματα καθιστοῦν τὴν εἰκόνα ποὺ ἀναφέραμε προηγουμένως περισσότερο σαφῆ ἀλλὰ ὄχι πλήρη. Γιὰ τὴν συμπλήρωσή της θὰ ἔπρεπε νὰ ἐξετάσομε τὴν ἐπίδραση τῶν μαθηματικῶν στὴν φιλοσοφία, στὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες, καὶ νὰ ἐξετάσομε ἐπίσης τὶς σπουδαιότερες κατευθύνσεις καὶ τάσεις τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν. Ὅμως δὲν θὰ ἐπεκταθοῦμε στὶς θεωρήσεις αὐτές.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω λεχθέντα συμπεραίνει κανεὶς ὅτι τὰ μαθηματικὰ ἀποτελοῦν μιὰ πολὺ σπουδαία κλάση πνευματικῶν ἐπιτευγμάτων καὶ ἕνα οὐσιαστικὸ καὶ θεμελιῶδες στοιχεῖο τῆς παιδείας.

Ὡς ἀσκοῦντες τὸ λειτούργημα τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ ὀφείλομε νὰ κατευθύνομε τοὺς σπουδαστές μας ἔτσι ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ἀντιλαμβάνονται τὶς ἰδέες τῶν ἄλλων ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ εἶναι σὲ θέση νὰ ἐκφράζουν τὶς δικές τους ἰδέες. Τὸ σημεῖο ἐκκινήσεως μιᾶς τέτοιας διαδικασίας εἶναι ἡ μαθηματικὴ γλώσσα, ὁ δὲ σκοπὸς τῆς διαδικασίας εἶναι ἡ μαθηματικὴ παιδεία ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται μὲ στοχαστικὴ προσεκτικὴ ἀνάγνωση καὶ κριτικὴ ἀνάλυση.

Οἱ ἀκόλουθες παρατηρήσεις δὲν χρήζουν, κατὰ τὴν γνώμη μου, περαιτέρω ἐπεξηγήσεων ἢ αἰτιολογήσεων.

(α) Ὁ καθένας μπορεῖ νὰ μάθει τὴν γλώσσα τῶν μαθηματικῶν. Ὑπενθυμίζω ἐδῶ τὰ ὅσα ἀνέφερα προηγουμένως, ὅτι δηλαδὴ ἡ «φαντασία» καὶ ἡ «ἀφαίρεση» ἀποτελοῦν κοινὴ ἐμπειρία ὅλων. Ὁ ἰσχυρισμὸς ὅτι ἡ ἐκμάθηση τῶν μαθηματικῶν ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξη εἰδικοῦ ταλέντου, ἀποτελεῖ ἁπλῶς πρόφαση γιὰ τὴν μὴ ἐκμάθησή τους καθὼς καὶ τὴν μὴ καταβολὴ προσπάθειας διδασκαλίας τοῦ ἐν λόγῳ ἀντικειμένου. Ἡ καλλιέργεια μιᾶς τέτοιας ἀπόψεως δὲν πρέπει νὰ ἐπιτρέπεται στὴν ἐκπαιδευτικὴ κοινότητα.

Τὰ Μαθηματικὰ πρέπει νὰ διδάσκονται καὶ νὰ γίνονται κτῆμα κάθε ἀτόμου τὸ ὁποῖο ἐπιθυμεῖ νὰ τύχει ἀληθινῆς παιδείας, καθότι αὐτὰ καθορίζουν τὸ κριτήριο-πρότυπο τῆς ἀντικειμενικῆς ἀλήθειας σὲ κάθε διανοητικὴ προσπάθεια.

Ἡ ὀρθότητα τῆς ἀπόψεως αὐτῆς διαπιστώνεται συχνὰ καὶ ποικιλοτρόπως σὲ ὅλα τὰ στρώματα τῆς σύγχρονης κοινωνίας μας.

Μία μαθηματικὴ ἀλήθεια δὲν εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς οὔτε ἁπλὴ οὔτε πολύπλοκη· ἁπλῶς Εἶναι (Emile Lemoine).

Ὡστόσο, γιὰ νὰ μπορέσει κανεὶς νὰ ἀσχοληθεῖ μὲ τὸ περιεχόμενο (τὴν «φιλολογία») τῆς γλώσσας τῶν μαθηματικῶν, πρέπει πρῶτα νὰ μάθει νὰ διαβάζει τὴν γλώσσα αὐτή. Ἡ ἀλήθεια τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς εἶναι τόσο προφανὴς ὥστε προξενεῖ κατάπληξη ἡ συστηματικὴ παραβίασή της ἰδίως ἀπὸ τοὺς μηχανικοὺς καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ προγράμματα διδακτέας ὕλης (curricula) τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν. Πολὺ συχνὰ οἱ σπουδαστὲς καθὼς καὶ νέοι ἐπιστήμονες ἀντιμετωπίζουν αἰφνιδίως ακατάληπτα γ' αὐτοὺς μαθηματικὰ κείμενα συνοδευόμενα ἐνδεχομένως ἀπὸ ἀνεπαρκεῖς καὶ πολὺ σύντομες ἐπεξηγήσεις. Τὸ φαινόμενο αὐτὸ θὰ μποροῦσε νὰ ἀποφευχθεῖ ἐὰν δίνονταν ἡ εὐκαιρία σ' αὐτοὺς νὰ διδαχθοῦν προηγουμένως ἀρκετὰ μαθηματικὰ ὥστε νὰ εἶναι σὲ θέση ἀργότερα νὰ συλλαμβάνουν τὶς κεντρικὲς ἰδέες ἄλλων ἀντικειμένων μελέτης.

(β) Ἡ τυπικὴ γνώση διαφόρων ὁρισμῶν ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ ἐννοιῶν (λ.χ., ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, λογάριθμοι, συναρτήσεις Bessel κλπ.) δὲν ἐγγυᾶται ὅτι ὁ σπουδαστὴς μπορεῖ νὰ ἐκφράσει κάτι τὸ σαφές, κάτι τὸ κατανοητὸ γιὰ τὶς ἔννοιες αὐτές. Εἶναι γνωστὸ ὅτι σὲ μιὰ γλώσσα ἀπαιτεῖται μεγάλη πρακτικὴ γιὰ νὰ μπορέσει κανεὶς νὰ ἐκφράσει πλήρως τὶς σκέψεις του. Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ μεταφερομένη στὴν γλώσσα τῶν μαθηματικῶν σημαίνει ὅτι ὁ σπουδαστὴς πρέπει νὰ κατασκευάζει παραδείγματα ἀναφερόμενα στὰ συγκεκριμένα ὑπὸ μελέτην ἀντικείμενα καὶ γεγονότα, ἤτοι πρέπει ὁ σπουδαστὴς νὰ ἀσχοληθεῖ μὲ ἕνα εὐρὺ φάσμα ἐφαρμογῶν.

(γ) Ἀσκοῦμε τοὺς σπουδαστές μας στὸ νὰ ἀποκτοῦν τὴν ἱκανότητα νὰ ἀπαντοῦν σὲ ἐρωτήματα στὰ ὁποῖα δὲν θὰ τοὺς ζητηθεῖ ποτὲ στὸ μέλλον νὰ ἀπαντήσουν.

Ἡ βλάβη τὴν ὁποίαν ἐπιφέρει τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀσκήσεως δὲν ἔγκειται μόνο στὴν σπατάλη πολυτίμου χρόνου τοῦ σπουδαστῆ, ἀλλὰ σὲ κάτι πολὺ πιὸ σπουδαῖο: ὅτι αὐτὸς οὐσιαστικὰ δὲν ἔχει ἀντιληφθεῖ τὴν σημασία τῶν ἀπαντήσεων ποὺ διδάχθηκε νὰ δίνει, ἐνῶ δὲν εἶναι σὲ θέση νὰ ἀπαντήσει σὲ ἐρωτήματα τὰ ὁποῖα στὴν πραγματικότητα ἀνακύπτουν.

Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς σπουδαστές μας, ὁδηγημένοι στὴν ἀντίληψη ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι ἁπλῶς ἕνα σύνολο ἐξειδικευμένων τεχνικῶν, παρὰ ἕνας τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι καὶ ἐκφράζεσθαι, κατέληξαν στὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἴτε δὲν ἔχουν καμμιὰ ἀξία εἴτε εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνουν κατανοητά.

Προσφέροντες «μηχανικὴ ἄσκηση» μόνο, καὶ ὄχι μαθηματικὴ παιδεία, ἔχουμε παραγάγει ἕνα πλῆθος νεαρῶν ἀτόμων τὰ περισσότερα ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι κάτοχοι ἐκτεταμένων μὲν ἀλλὰ ἐπιφανειακῶν μόνο γνώσεων. *Ἡ διάσπαση καὶ ἐξουδετέρωση τοῦ φαύλου αὐτοῦ κύκλου πρέπει νὰ ἀποτελέσει τὴν σπουδαιότερη πρόκληση καὶ τὸν κύριο στόχο τῆς μαθηματικῆς παιδείας τῆς ὁποίας τὸ μέλλον εἶναι τόσο στενὰ συνδεδεμένο μὲ τὸ μέλλον τῶν μαθηματικῶν.*

(δ) Πρέπει νὰ γίνει ἀντιληπτό, εἰδικώτερα μάλιστα ἀπὸ τὸν διδάσκοντα, ὅτι προκειμένου περὶ μαθηματικοῦ προβλήματος τοῦ ὁποίου ἡ λύση φαίνεται νὰ εἶναι δύσκολη, εἶναι πολὺ σπουδαῖο νὰ διακρίνομε ἂν ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ κάποια ἰδιαίτερη διαισθητικὴ ἱκανότητα, κάποιο ἰδιαίτερο βαθμὸ εὐφυΐας ἢ ἁπλῶς εἶναι ζήτημα ρουτίνας, δηλαδὴ σκληρῆς μόνο μηχανικῆς ἐργασίας. Αὐτὸ βέβαια δὲν σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ προτείνομε στὸν σπουδαστὴ μόνο εὔκολα προβλήματα πρὸς λύσιν. Δίνοντας ὅμως δύσκολα προβλήματα ἢ ἀσκήσεις, καλὸ εἶναι νὰ παρέχονται καὶ οἱ σχετικὲς ἐπεξηγήσεις καὶ αἰτιολογήσεις γιὰ τὴν ἀντιμετώπισή τους.

Οἱ μαθηματικὲς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ποὺ προτείνομε στοὺς σπουδαστὲς πρέπει νὰ ἐπιλέγονται κατὰ τρόπο ὥστε νὰ ὀξύνουν τὴν διαισθητικὴ ἱκανότητα τοῦ σπουδαστῆ σὲ σχέση μὲ τὶς γενικὲς ἀρχὲς τῆς ἐπιστήμης καὶ ὄχι νὰ τὸν ὠθοῦν στὸ νὰ ἀσκεῖται στὴν ἐκτέλεση πράξεων ρουτίνας.

Ἡ ἱκανότητα ἑνὸς ἀτόμου νὰ διαβάζει τὴν ἀρχαία ἑλληνικὴ γλώσσα δὲν συνεπάγεται κατ' ἀνάγκην καὶ τὴν γνώση τῶν ἔργων τοῦ Σοφοκλῆ ἢ τοῦ Αἰσχύλου, οὔτε ὅτι αὐτὸς ἀντιλαμβάνεται τὶς ἰδέες τῶν συγγραφέων αὐτῶν ἀκούγοντας ἁπλῶς τὶς λέξεις τοῦ κειμένου. *Παιδεία δὲν σημαίνει μόνο γραφὴ καὶ ἀνάγνωση.*

(ε) Τὸ ἀντικείμενο ποὺ διδάσκομε ἢ μελετοῦμε πρέπει νὰ μελετᾶται ἀπὸ τὶς ἀρχικές του πηγές. Αὐτὸ βέβαια δὲν σημαίνει ὅτι ὁ καταλληλότερος τρόπος ἐκμαθήσεως τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ μελέτη τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδη. Ὅταν τὸ ἀντικείμενο μελέτης εἶναι γραμμένο σὲ ἄλλη γλώσσα, πρακτικῶς δὲν ὑπάρχει ἀπώλεια τῶν νοημάτων ἂν τὸ ἀκριβὲς περιεχόμενο τοῦ μαθηματικοῦ κειμένου ἔχει διατηρηθεῖ. Ὡστόσο εἶναι οὐσιῶδες νὰ παρουσιάζομε στὸν διδασκόμενο τὴν ἀρχικὴ διατύπωση τοῦ θέματος, τὶς ἐξισώσεις ποὺ γιὰ πρώτη φορὰ ἀπασχόλησαν τὸν συγγραφέα. Γνωρίζοντες, διδάσκων καὶ διδασκόμενος, τὴν «ἀρχικὴ ἰδέα» θὰ ἀντιληφθοῦν περὶ τίνος πράγματος, βασικά, πρόκειται καὶ τί ἀκριβῶς εἶναι αὐτὸ ποὺ θὰ προσθέσουν στὶς γνώσεις τους.

(ζ) Ἡ προηγούμενη παρατήρηση ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη, ἡ ὁποία εἶναι παρομοίας φύσεως.

Τὰ ἐπιστημονικὰ ἐπιτεύγματα τοῦ «χθὲς» δὲν πρέπει «σήμερα» νὰ τὰ ἀγνοοῦμε, νὰ τὰ θεωροῦμε ξεπερασμένα. Κάμνω τὴν παρατήρηση αὐτὴ γιατὶ συχνὰ συμβαίνει, ἡ ἐπιστήμη ποὺ ἤκμασε σὲ παρωχημένη ἐποχὴ νὰ θεωρεῖται ἀπὸ τοὺς συγχρόνους ὡς πρωτόγονος ἢ ἀκόμα καὶ παράλογος. Εἶναι φανερὸ ὅτι στὶς λεγόμενες ἀνθρωπιστικὲς ἐπιστῆμες (κλασσικὴ φιλολογία, κλπ.) μιὰ τέτοια ἄποψη θὰ ἐθεωρεῖτο τουλάχιστον γελοία.

Ἐπειδὴ τὰ μαθηματικὰ θεωροῦνται ὅτι ἀνήκουν (κατὰ τὴν γνώμη μου κακῶς) μόνο στὴν κατηγορία τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, ἐνῶ νομίζω ὅτι ἀνήκουν καὶ στὴν φιλοσοφία καὶ στὴν τέχνη, πολὺς κόσμος, συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν σπουδαστῶν μας, ἔχει τὴν τάση νὰ πιστέψει ὅτι τὰ μαθηματικὰ ποὺ διδάσκονται σήμερα ἀποτελοῦν σύγχρονες ἀνακαλύψεις. Δυστυχῶς ἡ πλειονότητα τῶν σπουδαστῶν ἐκτίθεται σὲ ἕνα πολὺ μικρὸ μόνο ἀριθμὸ ἰδεῶν στὴν μορφὴ ποὺ αὐτὲς διατυπώθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ σὲ παλαιότερες ἐποχές. Ὅμως θὰ ἔπρεπε αὐτοὶ νὰ γνωρίζουν ὅτι τὰ ἐπιτεύγματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν καθὼς καὶ ἐκείνων ἄλλων χωρῶν δὲν ἔχουν μόνο ἱστορικὴ σημασία, δὲν ἔχουν περιέλθει σὲ ἀχρηστία ἐξ αἰτίας τῶν μετέπειτα ἐξελίξεων, ἀλλὰ ἀντιθέτως ὅτι ἀπετέλεσαν τὴν βάση τῆς γενομένης προόδου.

Μερικοὶ θεωροῦν τὴν συζήτηση ἐπὶ μαθηματικῶν θεμάτων παλαιοτέρων ἐποχῶν ὡς ἀνούσια διότι ἀναφέρεται αὐτὴ σὲ μεθόδους ποὺ ἤδη ἔχουν ξεχασθεῖ καὶ ἔχουν παραχωρήσει τὴν θέση τους σὲ ἄλλες ἁπλούστερες καὶ γενικώτερες μεθόδους. Ὅμως παρόμοιες συζητήσεις μπορεῖ ἀκόμα νὰ ἐνδιαφέρουν ἐκείνους οἱ ὁποῖοι ἐπιθυμοῦν νὰ παρακολουθοῦν, βῆμα πρὸς βῆμα, τὴν πρόοδο τῶν μαθηματικῶν καὶ νὰ παρατηροῦν πῶς οἱ ἁπλὲς καὶ γενικὲς μέθοδοι προκύπτουν ἀπὸ εἰδικὰ θέματα καὶ ἀπὸ πολύπλοκες καὶ ἔμμεσες διαδικασίες.

Ὅπως τονίσαμε καὶ προηγουμένως, καὶ ἀξίζει νὰ τὸ ἐπαναλάβουμε, σὲ πολλὲς ἀξιόλογες θεωρίες ἀναφερόμενες σὲ φυσικὲς διαδικασίες ὑποβόσκει πάντοτε μιὰ μαθηματικὴ δομὴ ἡ ὁποία δὲν ἐλέγχεται μόνο ὡς ἀκριβὴς ἀλλὰ καὶ ὡς ἐκλεπτυσμένη ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς.

Ἡ ἐκθρόνισις παλαιοτέρων ἰδεῶν τῆς φυσικῆς, ὅπως εἶναι ἡ θεωρία τοῦ Newton δὲν σημαίνει ὅτι οἱ ἰδέες αὐτὲς κατέστησαν ἄκυρες. Ἀντιθέτως, ἂν αὐτὲς εἶναι ἀξιόλογες, ὅπως ἐκεῖνες τοῦ Newton καὶ τοῦ Galileo, τότε ἐπιζοῦν καὶ ἔχουν τὴν θέση τους μέσα στὸ νέο σχῆμα. Ἐπιπλέον ἀξίζει πάλι νὰ τονίσομε ὅτι ἀνακαλύψεις ποὺ ἀφοροῦν νέες συμπεριφορὲς τῆς φύσης ἀποτελοῦν πηγὲς ἐμπνεύσεως γιὰ νέες μαθηματικὲς θεωρίες. Κλασσικὸ παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ στενὴ σχέση μεταξὺ τῆς Κβαντικῆς Θεωρίας καὶ τῆς περιοχῆς τῶν μαθηματικῶν ποὺ ἀναφέρεται στοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμούς. Ἐπίσης ἡ Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας καὶ οἱ ἐξισώσεις τοῦ

Maxwell οἱ ἀναφερόμενες στὸν ἠλεκτρομαγνητισμὸ συνετέλεσαν στὴν πρόοδο τῶν μαθηματικῶν. Ὅμως αὐτὸ δὲν ἀληθεύει μόνο γιὰ τὶς σχετικῶς πρόσφατες θεωρίες. Ἀληθεύει π.χ. γιὰ τὴν συντελεσθεῖσα ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἀνάλυση τῆς δομῆς τοῦ χώρου ἡ ὁποία (ἀνάλυση) παρέσχε τὴν ἔννοια τῆς γεωμετρίας.

Ὑπάρχει ἕνα ἀξιοθαύμαστο βάθος, λεπτότητα καὶ μαθηματικὸς πλοῦτος στὶς ἀρχὲς ποὺ ὑποκρύπτουν οἱ φυσικὲς διαδικασίες. Τὸ γεγονὸς αὐτό, φυσικά, δὲν εἶναι γνωστὸ παρὰ μόνο σὲ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι ἀσχολοῦνται μὲ τὴν μαθηματικὴ ἔρευνα.

Ἐπανερχόμενοι λοιπὸν στὴν θεώρηση τῶν ΕΣ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι πράγματι θλιβερὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τόσο λίγοι σπουδαστὲς ἔχουν μιὰ ἀμυδρὴ ἔστω ἰδέα τῆς προόδου τῶν μαθηματικῶν κατὰ τὶς παλαιότερες ἐποχές, ἀκόμα καὶ κατὰ τὰ τελευταῖα πεντακόσια χρόνια.

Κυρίες καὶ Κύριοι, τὰ διάφορα ἐπιχειρήματα καὶ ἀπόψεις ποὺ ἐξέθεσα μέχρι τώρα ἀποτελοῦν κατὰ τὴν γνώμη μου σαφῆ ἔνδειξη ὅτι οἱ τρόποι μὲ τοὺς ὁποίους τὰ κατὰ καιροὺς ΕΣ συμπεριφέρθηκαν καὶ ἐξακολουθοῦν νὰ συμπεριφέρονται ἔναντι τῆς μαθηματικῆς παιδείας στὴν Ἑλλάδα καθὼς καὶ σὲ πολλὲς ἄλλες χῶρες, πάσχουν καὶ ὡς ἐκ τούτου ἀπαιτεῖται ριζικὴ ἀναθεώρηση αὐτῶν. Πρέπει νὰ γίνουν δραστικὲς ἀλλαγὲς στὰ προγράμματα διδασκομένης ὕλης (curricula), στὸν τρόπο διδασκαλίας καθὼς καὶ σὲ ἄλλες ἐκπαιδευτικὲς δραστηριότητες.

Γιὰ πολλοὺς ἀπὸ ἐμᾶς ἀποτελεῖ ἀντικείμενο ὁραματισμοῦ καὶ ἐπιδίωξης, οἱ σπουδαστές μας: (1) νὰ μάθουν νὰ ἀξιολογοῦν τὰ μαθηματικά, (2) νὰ ἔχουν ἐμπιστοσύνη στὶς δικές τους ἱκανότητες, (3) νὰ καταστοῦν λύτες μαθηματικῶν προβλημάτων, (4) νὰ μάθουν νὰ ἐπικοινωνοῦν κατὰ τρόπον μαθηματικόν, καὶ (5) νὰ μάθουν νὰ σκέπτονται κατὰ τρόπον μαθηματικόν.

Ἡ κάθε μία ἀπὸ τὶς παραπάνω ἐπιδιώξεις πρέπει νὰ μελετηθεῖ χωριστὰ καὶ σὲ βάθος, ἀκολουθώντας τὶς γενικὲς κατευθύνσεις ποὺ ἀναπτύξαμε παραπάνω. Προφανῶς πρόκειται γιὰ μιὰ προσπάθεια πολὺ δύσκολη, ἡ ὁποία ὅμως πρέπει νὰ ἀρχίσει νὰ γίνεται καὶ στὸν τόπο μας ὅπως ἔχει ἀρχίσει νὰ γίνεται σὲ μερικὲς ἄλλες χῶρες.

Βεβαίως ἔχουν διατυπωθεῖ ὁρισμένα, εὔλογα, ἐπιχειρήματα κατὰ τῶν προτεινομένων ἀλλαγῶν, καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀντιμετωπισθοῦν μὲ ὑπευθυνότητα καὶ σοβαρότητα. Ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι: ὅτι οἱ προαναφερθεῖσες, καθ' ὅλα ἀξιέπαινες, προσπάθειες ἐπικεντρούμενες στὸ νὰ ἀποκτήσει ὁ σπουδαστὴς βαθιὰ καὶ πλήρη ἀντίληψη τῆς προσφερόμενης γνώσης μπορεῖ νὰ ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μείωση τῶν ἱκανοτήτων αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν τεχνικὴ ἐπιδεξιότητα στὴν ἐκτέλεση τῶν μαθηματικῶν πράξεων.

Δοθέντος ὅτι εἶναι εὐκολότερο νὰ ἐντοπίσει κανεὶς μιὰ ἀτέλεια, ἕνα σφάλμα, στὴν ἐκτέλεση μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν ἀπὸ τὸ νὰ διακρίνει μιὰ ἀδυναμία τοῦ σπουδαστῆ στὴν κατανόηση ὁρισμένων ἰδεῶν καὶ ἐννοιῶν, ὑπάρχει ὁ κίνδυνος νὰ γίνει κατάχρησις τοῦ ὡς ἄνω ἐπιχειρήματος.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρὰ ὅμως τὸ ἐπιχείρημα αὐτὸ δὲν παύει νὰ εἶναι ἕνα σοβαρὸ πρόβλημα διότι πρέπει νὰ λάβομε ὑπόψη ὅτι οἱ μέλλοντες φυσικοὶ ἐπιστήμονες, μηχανικοὶ καὶ μαθηματικοὶ πρέπει νὰ ἀποκτήσουν καὶ τὶς δύο ἱκανότητες, ἤτοι νὰ ἀποκτοῦν βαθιὲς καὶ πλήρεις γνώσεις, καθὼς καὶ τὴν τεχνικὴ ἐπιδεξιότητα στὴν ἐκτέλεση μαθηματικῶν πράξεων καὶ ὑπολογισμῶν.

Εἶναι ἀπαραίτητο ἐπίσης νὰ τονισθεῖ ὅτι οἱ παρατηρούμενες δυσκολίες στὴν ἐκπαίδευση δὲν ὀφείλονται μόνο σὲ οἰκονομικοὺς λόγους, καὶ προπαντὸς δὲν ὀφείλονται, ὅπως πολλοὶ πιστεύουν, στὸ ὅτι δὲν κατορθώσαμε νὰ συντονίσουμε τὸ βῆμα μας στὸν ταχὺ ρυθμὸ τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ ἡ μεταβολὴ τῆς γνώσης. Ὀφείλονται αὐτὲς προπαντὸς στὸ ὅτι δώσαμε λανθασμένη κατεύθυνση σ' αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε «ἐκπαιδευτικὸ σύστημα».

Εὐοίωνο μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ Oberwolfach Institute ἄνοιξε τὶς πύλες του καὶ σὲ ἐκείνους ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὴν ἀναμόρφωση τῶν ἐκπαιδευτικῶν συστημάτων καὶ ἐν γένει μὲ τὴν βελτίωση τῆς Μαθηματικῆς καὶ Παιδείας. Στὸ συνέδριο μὲ τίτλο «New Trends in the Teaching and Learning of Mathematics» (27.11.95-1.12.95) ἔλαβαν μέρος ἐπιστήμονες διαφόρων εἰδικοτήτων ἀπὸ διάφορα κράτη τῆς Εὐρώπης, τῆς Ἀμερικῆς καὶ τῆς Αὐστραλίας. Συζητήθηκαν θέματα ἀναφερόμενα, (1) στὴν ἔρευνα τοῦ πῶς ὁ σπουδαστὴς «μαθαίνει» μαθηματικά, (2) στὴν ἀναμόρφωση τῶν ἐκπαιδευτικῶν συστημάτων μὲ σκοπὸ νὰ προσελκύσουν τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ μαθητῆ, (3) στὴν χρήση τῆς τεχνολογίας στὴν διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν, (4) σὲ γενικὰ θέματα ὅπως ἡ ἀξιολόγηση τῆς ἀποδείξεως ἑνὸς θεωρήματος, κ.ἄ.

Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ὁ ἀνθρώπινος νοῦς εἶναι ἱκανὸς γιὰ πολὺ περισσότερα ἐπιτεύγματα ἀπὸ ὅσα στὴν πραγματικότητα ἐπιτελεῖ. Δυστυχῶς πολλὲς εἶναι οἱ εὐκαιρίες ποὺ πολὺ συχνὰ χάνονται, στερώντας ἔτσι τόσο ἀπὸ τοὺς νέους ὅσο καὶ ἀπὸ τὰ ὥριμα ἄτομα τὶς δυνατότητες παραγωγῆς ὠφελίμου πνευματικοῦ ἔργου.

Γονεῖς, Διδάσκοντες, Πολιτεία καὶ τὸ εὐρὺ κοινό, πρέπει νὰ συνειδοποιήσουν ὅτι οἱ προτεινόμενες ἀλλαγὲς εἶναι ἀναγκαῖες καὶ θὰ ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα νὰ θωρακίσουν τοὺς νέους μας γιὰ νὰ ἀντιμετωπίσουν τὸν αἰώνα ποὺ μᾶς ἔρχεται.