ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 11ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1993

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΔΕΣΠΟΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΟΣΦΑΤΕΣ ΑΝΑΚΑΛΥΨΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
(α) Νέος πρῶτος ἀριθμὸς Mersenne
(β) Τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν Carmichael εἶναι ἄπειρο

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε, Κύριοι Συνάδελφοι, Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ὁ σκοπὸς τῆς σημερινῆς μου ὁμιλίας εἶναι νὰ πληροφορήσω τὸν ἀκροατὴ (καὶ ἀργότερα τὸν ἀναγνώστη) σχετικὰ μὲ δύο πρόσφατες ἀνακαλύψεις στὴ θεωρία Ἀριθμῶν, ἤτοι τὴν ἀνακάλυψη ἑνὸς νέου ἀριθμοῦ Mersenne καὶ τὴν πρόταση ποὺ βεβαιώνει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν Carmichael εἶναι ἄπειρο. Μὲ τὴν εὐκαιρία αὐτὴ θὰ παραθέσω, ἐν συντομίᾳ, ἐπεξηγηματικὰ σχόλια καὶ πληροφορίες ἀναφερόμενες στὴν «ἐξερεύνηση» τοῦ ἀπέραντου ἐκείνου, σὲ ἔκταση, τοπίου ποὺ ἀποτελεῖ τὴ βάση τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος, ἤτοι τοῦ κλάδου ἐκείνου τῆς Θεωρίας Ἀριθμῶν ὁ ὁποῖος μελετᾶ τοὺς πρώτους ἀριθμούς.

Ἕνας ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμὸς καλεῖται «πρῶτος» ὅταν εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδας καὶ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς παρὰ μόνο μὲ τὸν ἑαυτό του καὶ μὲ τὴ μονάδα. Παραδείγματα πρώτων ἀριθμῶν εἶναι : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ βασικὸ «δομικὸ» ὑλικὸ μὲ τὸ ὁποῖο κατασκευάζομε τοὺς ἀκεραίους καὶ θετικοὺς ἀριθμούς. Ὁ Εὐκλείδης (300 π.Χ.) ἔδωσε μιὰ ἀπόδειξη κλασσικοῦ κάλλους τῆς προτάσεως : «Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρο». Ὁ ἴδιος ἐπίσης ἀπέδειξε ὅτι: «Κάθε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ γραφεῖ κατὰ ἕνα μόνο τρόπο ὡς τὸ γινόμενο πρώτων ἀριθμῶν αὐ-

ξοντος μεγέθους». Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 24 μπορεῖ νὰ γραφεῖ 2 × 12 ἢ 3 × 8 ἢ 6 × 4. Ἂν ὅμως θέλομε νὰ χρησιμοποιήσομε μόνο πρώτους ἀριθμούς, τότε ὁ μοναδικὸς τρόπος ἀναλύσεως τοῦ 24 σὲ γινόμενο παραγόντων εἶναι 2 × 2 × 2 × 3.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσαν πάντοτε ἀντικείμενο μεγάλης περιεργείας. Ὑπάρχει τύπος, ἢ κάποιος ἁπλὸς κανόνας, μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ὁποίου νὰ μποροῦμε νὰ ἐπιλέγομε πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τὴν ἀκολουθία: 2, 3, 4, 5, ... ; Ὑπάρχει ἁπλὸς τρόπος ἐλέγχου ἂν ἕνας δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος; Ἂν ἕνας ἀριθμὸς δὲν εἶναι πρῶτος, μποροῦμε νὰ βροῦμε τοὺς διαιρέτες του κατὰ τρόπον συντομότερο ἀπὸ τὸ συνήθη, ὁ ὁποῖος (συνήθης) συνίσταται στὸ νὰ δοκιμάζομε τὸν ἕναν ἀκέραιο μετὰ τὸν ἄλλο; Μήπως τὸ σύνολο τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἔχει ὁρισμένες «κρυφὲς» ἰδιότητες τὶς ὁποῖες ἀκόμη δὲν γνωρίζομε; Τὰ σπουδαῖα καὶ θεμελιώδη αὐτὰ ἐρωτήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τεθεῖ ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων, δὲν εἶναι ἄσχετα μεταξύ τους καὶ ὁδηγοῦν στὸ ἑξῆς ἐρώτημα: ποιὲς ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι σπουδαῖες καὶ ποιὲς ὄχι; Ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἐρώτημα, ἂν ὑπάρχει ἁπλὸς κανόνας ἐπιλογῆς πρώτων ἀριθμῶν, μιὰ πρώτη ἀπάντηση σ' αὐτὸ ἀποτελεῖ τὸ γνωστὸ «Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους».

Ἐπίσης ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ προκύπτουν οἱ ἀκόλουθες, σχετικὲς μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἐρωτήματα, τρεῖς προτάσεις. Ἔστω ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός. Τότε:

Π ρ ό τ α σ η Α. Ὁ ν εἶναι πρῶτος ἂν δὲν ἔχει διαιρέτες μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ $\sqrt{2}$.

Π ρ ό τ α σ η Β. Ὁ ν εἶναι πρῶτος, τότε καὶ μόνο τότε, ὅταν αὐτὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸ $(\nu - 1)! + 1$ (ὅπου $(\nu - 1)! = 1.2.3...(\nu - 1)$).

Π ρ ό τ α σ η Γ. Ἂν ὁ ν εἶναι πρῶτος, τότε ὁ ν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $2^\nu - 2$.

Ἀπὸ τὴν Πρόταση Γ προκύπτει ὅτι ἂν ὁ ν δὲν διαιρεῖ τὸν $2^\nu - 2$, τότε ὁ ν δὲν εἶναι πρῶτος. Αὐτὸ φυσικὰ δὲν σημαίνει ὅτι, ἂν ὁ ν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $2^\nu - 2$, ὁ ν εἶναι πρῶτος.

Ἡ Πρόταση Γ ἀποτελεῖ κριτήριο τὸ ὁποῖο μᾶς λέγει πότε ἕνας δοθεὶς ἀκέραιος ν δὲν εἶναι πρῶτος.

Ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Fermat, στὸ γράμμα του τῆς 18 Ὀκτωβρίου 1640 πρὸς τὸν ἔμπιστο φίλο του Frenicle, γράφει ὅτι τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $2^\nu - 2$, ὅταν ὁ ν εἶναι πρῶτος, δὲν ἀποτελεῖ μεμονωμένο φαινόμενο, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι:

Π ρ ό τ α σ η Δ. Ἂν ὁ ν εἶναι πρῶτος, τότε ὁ ν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $\alpha^\nu - \alpha$, ὅπου ὁ α μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἀπὸ τὴν Πρόταση Δ προκύπτει ὅτι: ἂν ὁ ν δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν $\alpha^\nu - \alpha$, γιὰ κάποιον ἀκέραιο καὶ θετικὸ α, τότε ὁ ν δὲν εἶναι πρῶτος.

Τὸ 1899 ὁ Korselt ἀπέδειξε τὸ ἀκόλουθο κριτήριο:

Π ρ ό τ α σ η Ε. Ὁ ν διαιρεῖ τὸν $\alpha^{\nu} - \alpha$, ὅπου α εἶναι ὁ οἱοσδήποτε ἀκέραιος καὶ θετικός, τότε καὶ μόνο τότε ὅταν ὁ ν δὲν ἔχει διαιρέτη ὁ ὁποῖος εἶναι τέλιο τετράγωνο, καὶ ὅταν γιὰ κάθε πρῶτο ἀριθμὸ p, ὁ ὁποῖος διαιρεῖ τὸν ν, ὁ ἀριθμὸς $p - 1$ διαιρεῖ τὸν $\nu - 1$.

Ἡ ὕπαρξη ἀριθμῶν, ν, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τῆς Πρότασης Ε ἀνακαλύφθηκε τὸ 1910 ἀπὸ τὸν Carmichael, καλοῦνται δὲ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ «ἀριθμοὶ Carmichael».

Παραθέτομε παραδείγματα ἀριθμῶν Carmichael :

$561 = 3 \times 11 \times 17$, $1105 = 5 \times 13 \times 17$, $1729 = 7 \times 13 \times 19$

$2465 = 5 \times 17 \times 29$, $2821 = 7 \times 13 \times 31$, $41041 = 7 \times 11 \times 13 \times 41$

$825265 = 5 \times 7 \times 17 \times 19 \times 73$.

Πρόσφατα, πρὸ μερικῶν μηνῶν, οἱ μαθηματικοὶ Red Alford, Andrew Granwill καὶ Carl Pomerance τοῦ Univ. of Georgia, ἀπέδειξαν τὸ ἑξῆς θεώρημα ἀπὸ τὸ ὁποῖο προκύπτει ὅτι : ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ CARMICHAEL ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΙΡΟ. Ἔδωσαν ἔτσι λύση σὲ ἕνα πρόβλημα ποὺ ἐπὶ 80 χρόνια παρέμενε ἄλυτο.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Alford, Granwill, Pomerance — 1992).

Ὑπάρχουν περισσότεροι ἀπὸ $x^{2/7}$ ἀριθμοὶ Carmichael μικρότεροι ἢ ἴσοι τοῦ x, ἂν το x ληφθεῖ ἀρκετὰ μεγάλο.

Ἀναγνωρίζεται εὔκολα ὅτι ὅσο προχωρεῖ κανεὶς στὸν ἐντοπισμὸ ὁλοένα καὶ μεγαλυτέρων πρώτων ἀριθμῶν, τριψηφίων, τετραψηφίων, κ.ο.κ., τόσο οἱ δυσκολίες ποὺ συναντᾶ γίνονται μεγαλύτερες.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἤθελα, προτοῦ νὰ προχωρήσω, νὰ παραθέσω τὴν ἀκόλουθη συγκλονιστικὴ ἱστορία, ἡ ὁποία ἰδιαίτερα ἀφορᾶ τοὺς συναδέλφους τοῦ ἰατρικοῦ καὶ βιολογικοῦ κλάδου, καὶ ἐπιβεβαιώνει τὴν ἄποψη ὅτι ὄντως οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἀντικείμενο ὑψίστης περιεργείας.

Στὸ βιβλίο του «The Man Who Mistook His Wife for a Hat» ὁ νευρολόγος Oliver Sacks διηγεῖται μιὰ παράξενη ἱστορία δύο διδύμων ἀδελφῶν, τοῦ John καὶ τοῦ Michael, τοὺς ὁποίους ἡ γενομένη διάγνωση εἶχε χαρακτηρίσει φαντασιόπληκτους, ψυχωτικοὺς καὶ ἄκρως διανοητικὰ καθυστερημένους. Ὅταν ὁ Sacks τοὺς συνάντησε γιὰ πρώτη φορὰ τὸ 1966, τὰ δίδυμα ἦταν περίπου 35 ἐτῶν καὶ εἶχαν διατελέσει τρόφιμοι διαφόρων ἱδρυμάτων ἀπὸ ἡλικίας 7 ἐτῶν. Μολονότι τὰ δίδυμα ἦταν ἀνίκανα νὰ κάνουν καὶ ἁπλὲς ἀκόμα ἀριθμητικὲς πράξεις, ἡ μνήμη τους ὅμως, σχετικὰ μὲ τοὺς ἀριθμούς, ἦταν καταπληκτική, ἀφοῦ μποροῦσαν νὰ ἀπομνημονεύουν καὶ νὰ ἐπαναλαμβάνουν ἕνα ἀκέραιο ἀριθμὸ μὲ 300 ψηφία.

Κάποια μέρα ὁ Sacks παρακολούθησε τὰ δίδυμα ποὺ καθισμένα σὲ μιὰ γωνιὰ χαμογελοῦσαν, φαίνονταν πολὺ εὐτυχισμένα καὶ συζητοῦσαν στὴ γλώσσα τῶν ἀριθμῶν. Ὁ John ἀνέφερε ἕνα ἑξαψήφιο ἀριθμό, ὁ Michael κουνοῦσε τὸ κεφάλι, χαμογελοῦσε καὶ ἀπαντοῦσε μὲ κάποιο ἄλλο ἑξαψήφιο ἀριθμό. Τὰ δίδυμα φαίνονταν πολὺ εὐχαριστημένα μὲ τὸ παιχνίδι αὐτὸ τῆς ἀνταλλαγῆς ἀριθμῶν. Κατάπληκτος ὁ Sacks προσπάθησε, ὅταν ἐπέστρεψε στὸ σπίτι του, νὰ ἐξακριβώσει τί ἦταν αὐτὸ ποὺ προξενοῦσε τέτοια εὐχαρίστηση στὰ δίδυμα. Ὠθούμενος ἀπὸ κάποια διαίσθηση ἐξακρίβωσε τελικὰ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους ἀντήλλασσαν τὰ δίδυμα ἦταν πρῶτοι ἀριθμοί!!

Τὴν ἑπόμενη ἡμέρα, ὅταν ὁ Sacks ξανασυνάντησε τὰ δίδυμα, τὰ βρῆκε νὰ παίζουν τὸ ἴδιο παιχνίδι. Τὰ πλησίασε, τότε, καὶ πρότεινε ἕνα ὀκταψήφιο πρῶτο ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο, ψάχνοντας ὅλη νύχτα, εἶχε ἀνακαλύψει σὲ ἕνα πίνακα πρώτων ἀριθμῶν ἑνὸς κάποιου βιβλίου. Τὰ δίδυμα μὲ μιὰ ἔκφραση στὸ πρόσωπό τους μεγάλης αὐτοσυγκέντρωσης στράφηκαν πρὸς αὐτόν, ἄρχισαν ὕστερα ἀπὸ λίγα δευτερόλεπτα νὰ χαμογελοῦν, καὶ ἀμέσως κάλεσαν τὸν Sacks νὰ παίξει μαζί τους τὸ ἴδιο παιχνίδι. Ὕστερα ἀπὸ 5 λεπτὰ ὁ John ἀνέφερε ἕνα ἐννεαψήφιο πρῶτο ἀριθμό! Συνεχίζοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, τὰ δίδυμα κατέληξαν νὰ δώσουν ἕνα εἰκοσαψήφιο πρῶτο ἀριθμό! Ἃς σημειωθεῖ ὅτι ὁ κατάλογος τοῦ Sacks περιεῖχε μέχρι καὶ δεκαψήφιους μόνο, πρώτους ἀριθμούς.

Ὅταν, Κυρίες καὶ Κύριοι, γιὰ πρώτη φορὰ διάβασα τὴν ἱστορία αὐτὴ μὲ κατέλαβε ἕνα αἴσθημα δέους καὶ κατάπληξης ἀναφορικὰ μὲ τὸν τρόπο ποὺ λειτουργεῖ ὁ ἐγκέφαλος τοῦ ἀνθρώπου. Διότι πρέπει νὰ γνωρίζομε ὅτι χρειάσθηκε νὰ περάσουν αἰῶνες ὁλόκληροι γιὰ νὰ μπορέσουν οἱ μαθηματικοὶ νὰ ἀνακαλύψουν ἕνα τρόπο νὰ ἐπιτύχουν αὐτὸ ποὺ ὁ John καὶ ὁ Michael ἐπέτυχαν αὐθόρμητα: νὰ μποροῦν νὰ ἐντοπίζουν καὶ νὰ ἀναγνωρίζουν πρώτους ἀριθμούς, τόσο μεγάλους.

Ἡ μελέτη τῶν πρώτων ἀριθμῶν ὄχι μόνο μᾶς ὁδήγησε σὲ βαθύτατες καὶ σπουδαιότατες μαθηματικὲς ἀνακαλύψεις τῆς ἐποχῆς μας, ἀλλὰ καὶ σὲ ἐφαρμογὲς ποὺ ἀφοροῦν τὴν κατασκευὴ κρυπτογραφικῶν κωδίκων οἱ ὁποῖοι παίζουν σπουδαῖο ρόλο στὴ λειτουργία τῶν τραπεζικῶν συστημάτων καθὼς καὶ στὴν ἐθνικὴ ἄμυνα.

Καὶ τώρα, μετὰ τὴν παρεμβολὴ τῆς συγκλονιστικῆς αὐτῆς ἱστορίας, συνεχίζω τὴν ἀνάπτυξη τοῦ θέματός μου. Δίνουμε τοὺς ἀκόλουθους δύο ὁρισμούς.

Ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς καλεῖται «τέλειος» ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διαιρετῶν του ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Παραδείγματα τελείων ἀριθμῶν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 6, 28, 496. Ἔχουμε:

$$1 + 2 + 3 + 6 = 2 \times 6$$

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 2 \times 28$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 + 496 = 2 \times 496.$$

Ἕνας ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $2^N - 1$, ὅπου ὁ N εἶναι πρῶτος, καλεῖται ἀριθμὸς τοῦ Mersenne, εἰς μνήμην τοῦ Γάλλου μοναχοῦ καὶ μαθηματικοῦ τοῦ 17ου αἰώνα Marin

Mersenne, ὁ ὁποῖος πρῶτος ἐμελέτησε τὶς συνθῆκες ὑπὸ τὶς ὁποῖες οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $2^N - 1$ εἶναι πρῶτοι.

Μιὰ συνθήκη ΑΝΑΓΚΑΙΑ ἀλλὰ ΟΧΙ ΙΚΑΝΗ γιὰ νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^N - 1$ πρῶτος εἶναι ὁ N νὰ εἶναι πρῶτος.

Ἕνας ἀριθμὸς τοῦ Mersenne ὁ ὁποῖος εἶναι πρῶτος καλεῖται γιὰ συντομία «Mersenne πρῶτος». Οἱ «Mersenne πρῶτοι» ἀπέκτησαν κάποια φήμη, ἐν μέρει διότι τὸ μέγεθός τους αὐξάνει ταχύτατα ὅταν τὸ N αὐξάνει. Δὲν εἶναι γνωστὸ ἂν τὸ πλῆθος τῶν «Mersenne πρώτων» εἶναι ἄπειρο. Μέχρι τὰ τέλη τοῦ 18ον αἰώνα ἡ ἐπαλήθευση ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι «Mersenne πρῶτος» γίνονταν δι' ἀπευθείας ὑπολογισμοῦ. Ἀργότερα ἡ ἐπαλήθευση ἄρχισε νὰ γίνεται μὲ τὴν χρήση Η/Υ.

Μέχρι τὸ 1985 τὸ πλῆθος τῶν γνωστῶν «Mersenne πρώτων» ἦταν 31. Ὁ 31ος «Mersenne πρῶτος» ὁ ὁποῖος καὶ ἀνακαλύφθηκε τὸ 1985 εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει ἂν N = 216091, ἤτοι ὁ ἀριθμός:

$$2^{216091} - 1.$$

Πολὺ πρόσφατα, πρὶν ἀπὸ μερικοὺς μῆνες ἀνακαλύφθηκε ὁ 32ος «Mersenne πρῶτος» ἀπὸ τὸν David Slowinski, καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς

$$2^{756839} - 1.$$

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς προέκυψε ὕστερα ἀπὸ ὑπολογισμοὺς 19 ὡρῶν τοὺς ὁποίους ἐξετέλεσε ὁ Ὑπολογιστὴς CRAY-2, στὸ Harwell Laboratory τοῦ AEA Technology στὴν Ἀγγλία. Ὁ νεοανακαλυφθεὶς ἀριθμὸς ἔχει 227832 ψηφία καὶ καταλαμβάνει 47 πυκνογραμμένες δακτυλογραφημένες σελίδες.

Δὲν εἶναι γνωστὸ ἂν μεταξὺ τοῦ 31ου καὶ τοῦ 32ου «Mersenne πρώτου» ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι «Mersenne πρῶτοι». Πάντως γνωρίζομε ὅτι γιὰ $216091 < N \leqslant 365000$, δὲν ὑπάρχουν «Mersenne πρῶτοι». Μερικοὶ ἔλεγχοι ἔχουν γίνει γιὰ $365000 \leqslant N \leqslant 750000$. Ἐπίσης δὲν ἔχει γίνει πλήρης ἔλεγχος γιὰ $170000 < N < 216091$.

Δώσαμε προηγουμένως τὸν ὁρισμὸ τοῦ «τέλειου ἀριθμοῦ». Εἶναι γνωστὸ ὅτι ἕνας ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι τέλειος τότε καὶ μόνο τότε ὅταν εἶναι δυνατὸν νὰ γραφεῖ ὑπὸ τὴν μορφὴ $2^{N-1}.(2^N - 1)$, ὅπου ὁ παράγων $2^N - 1$ εἶναι πρῶτος. Ἀπὸ τὴν παρατήρηση αὐτὴ προκύπτει ὅτι ἡ ἀνακάλυψη τοῦ 32ου «Mersenne πρώτου» συνεπάγεται αὐτομάτως καὶ τὴν ἀνακάλυψη τοῦ 32ου τέλειου ἀριθμοῦ.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἐπὶ 19 ὧρες ὑπολογιστικὴ λειτουργία τοῦ CRAY-2 χρησίμευσε μόνο γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ LUCAS-LEHMER TEST γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ 32ου «Mersenne πρώτου». Ὅμως προτοῦ προκύψει ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς χρειάσθηκε ὁ CRAY-2 νὰ πειραματισθεῖ μὲ ἕνα πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ ἐκθετῶν, N, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἀρκοῦσε ὁ N νὰ ἐπιλεγεῖ μεταξὺ πρώτων ἀριθμῶν καὶ ὄχι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀκεραίων. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ ἔλεγχοι αὐτοὶ μποροῦν νὰ διεξαχθοῦν μόνο σὲ ὁρισμένες μεγάλες ἑταιρεῖες, οἱ ὁποῖες καὶ διαθέτουν τέτοιους ὑπερυπολογιστὲς γιὰ τὶς δικές τους ἀνάγκες.

Σχετικὰ μὲ τοὺς τέλειους ἀριθμοὺς ὑπάρχουν μερικὰ ἐρωτήματα τὰ ὁποῖα παραμένουν ἀκόμα ἀναπάντητα. Π.χ., κανεὶς μέχρι σήμερα δὲν ἔχει ἀνακαλύψει ἕνα περιττὸ τέλειο ἀριθμό. Ἂν ὑπάρχει ἕνας τέτοιος ἀριθμός, πρέπει ὄντως νὰ εἶναι τεράστιος καὶ νὰ ἔχει πολλοὺς διακεκριμένους πρώτους παράγοντας.

Καὶ τίθεται τὸ ἐρώτημα: «Ἡ ἐνδεχόμενη μὴ ὕπαρξη περιττῶν τελείων ἀριθμῶν ἀποτελεῖ πράγματι ἕνα ἐνδιαφέρον πρόβλημα;» Ἐπ᾽ αὐτοῦ οἱ γνῶμες τῶν μαθηματικῶν διχάζονται.

Πρὸ εἰκοσαετίας περίπου ἡ μαθηματικὴ κοινότητα ἐπίστευε, σχετικὰ μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμούς, ὅτι ἂν καὶ αὐτοὶ παρουσιάζουν ἀξιόλογο ἐρευνητικὸ ἐνδιαφέρον ἀπὸ θεωρητικῆς πλευρᾶς, δὲν θὰ χρησιμεύσουν οὔτε θὰ ὑπάρξει ποτὲ ἐφαρμογὴ αὐτῶν στὸν «πραγματικὸ κόσμο» στὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς. Πόσο ὅμως τὰ πράγματα ἔχουν ἀλλάξει σήμερα; Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ καθὼς καὶ μέθοδοι ἀναλύσεως ἀριθμῶν σὲ πρώτους παράγοντες κατέχουν σήμερα περίοπτη κεντρικὴ θέση σὲ μερικὲς ἀπὸ τὶς πιὸ προηγμένες μεθόδους μὲ τὶς ὁποῖες μετασχηματίζομε δεδομένα (DATA) ἔτσι ὥστε νὰ διατηρηθεῖ ἡ μυστικότητα αὐτῶν. Μιὰ σχετικῶς λεπτομερὴ περιγραφὴ τῶν λεγομένων «Δημοσίων Κρυπτογραφικῶν Κωδίκων» (Public Key Codes), οἱ ὁποῖοι βασίζονται στὴν χρήση μεγάλων πρώτων ἀριθμῶν, εἶχα κάνει στὴν ὁμιλία μου κατὰ τὴν ἐπίσημη ὑποδοχή μου στὴν Ἀκαδημία Ἀθηνῶν τὴν 5-5-1987 (Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, Τόμ. 62, 1987).

Ἐπειδὴ ἡ τεχνικὴ τῆς κρυπτογραφίας ἀπαιτεῖ τὴν χρήση πολὺ μεγάλων πρώτων ἀριθμῶν, ἡ ἀνακάλυψη καὶ ἀναγνώριση πρώτων ἀριθμῶν εἶναι τεραστίας σημασίας καὶ σπουδαιότητας.

Ἴσως λοιπὸν ἦταν κρίμα ποὺ τὸ ἰδιάζον ταλέντο τῶν διδύμων ἀδελφῶν, John καὶ Michael, ποτὲ δὲν χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτό.

Ὅταν μετὰ δέκα χρόνια ὁ Sacks ξανασυνάντησε τὰ δίδυμα, αὐτὰ δὲν ἔμεναν πιὰ μαζί. Τὰ εἶχαν χωρίσει, καὶ ἐκτελοῦσαν ἐργασίες ὑπηρετικοῦ προσωπικοῦ. Ἀλλοίμονο! Τὸ τίμημα τῆς ἐπιστροφῆς των στὴν «ὁμαλότητα» ὑπῆρξε ἡ ἀπώλεια τῶν θαυμαστῶν ἐκείνων ἱκανοτήτων τους σχετικὰ μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμούς.