ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 14ΗΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1929

ΠΡΟΕΔΡΙΑ Δ. ΑΙΓΙΝΗΤΟΥ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

Ὁ κ. ***Ἄμαντος*** λέγει τὸν ἀναμνηστικὸν λόγον περὶ τοῦ Ξ. Σιδερίδου.

Ὁ ***Ἀλέξανδρος Μαυρογένης*** ἀποθανὼν ἐν Κωνσταντινουπόλει τῇ 8ῃ Σεπτεμβρίου 1929 κληροδοτεῖ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἐτησίως λίρας Ἀγγλίας 150 διὰ τὴν ἵδρυσιν δύο βραβείων, ἑνὸς γραμμάτων καὶ ἐφευρέσεων καὶ ἑτέρου ἀρετῆς Ἀθηνῶν καὶ Πειραιῶς, ἀπονεμομένων ἐναλλὰξ καθ' ἕκαστον ἔτος.

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Ὁ ***Γενικὸς Γραμματεὺς*** παρουσιάζει τὰ πρὸς τὴν Ἀκαδημίαν ἀποσταλέντα δημοσιεύματα.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ — **Sur la forme de quelques fonctions représentées par un développement de Taylor à coefficients rationnels.*** *Note de M.* ***Spyridion Sarantopoulos.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

Dans un mémoire[1] publié dans le Bulletin de la Société mathématique

* ΣΠ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ. — Ἐπὶ τῆς μορφῆς συναρτήσεων τινων παριστωμένων δι' ἀναπτύγματος τοῦ Taylor, ῥητῶν συντελεστῶν.

[1] «Sur les fonctions méromorphes représentées par un développement de Taylor à coefficients rationnels»; voir aussi: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **184**, p.1409.

de Grèce, **10**, 1, 2, 1929, j'ai donné sur la forme d'une fonction f(z) méromorphe dans un cercle de rayon quelconque, quand à l'intérieur de ce cercle son développement en série de Taylor est à coefficients rationnels, le théorème suivant:

« *Une fonction méromorphe dans un cercle de rayon* $\frac{1}{\rho}$ *quelconque ne saurait être représentée par un développement de Taylor à coefficients rationnels sans se réduire à la somme d'un quotient de deux polynômes à coefficients entiers et d'une fonction à coefficients rationnels, holomorphe dans le cercle de rayon* $\frac{1}{\rho}$ ».

Dans la présente Note je me propose de donner une généralisation de ce théorème en cherchant la forme d'autres fonctions qui dans un cercle de rayon donné aient non seulement des pôles, mais, de plus, d'autres points singuliers, par exemple des points critiques logarithmiques[1]. Supposons que la fonction f(z) admette les points critiques logarithmiques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, à l'intérieur d'un cercle C de rayon r, décrit de l'origine comme centre. Alors on peut poser f(z) sous la forme

$$(1) \qquad f(z) = A_1 l(z-\alpha_1) + A_2 l(z-\alpha_2) + \ldots + A_\nu l(z-\alpha_\nu) + \varphi(z)$$

$A_1, A_2, \ldots A_\nu$ étant des constants et $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$. Supposons que $\varphi(z)$ soit méromorphe à l'intérieur du cercle C (pouvant admettre des points singuliers, n'importe de quelle espèce, sur la circonférence de ce cercle).

Cela posé, nous remarquons qu'en prenant les dérivées de deux membres de l'égalité (1), on trouve

$$f'(z) = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu} + \varphi'(z).$$

On voit maintenant que les points critiques logarithmiques et les pôles de la fonction f(z) sont tous des pôles pour sa dérivée f(z). Donc la dérivée f'(z) n'aura que des pôles à l'intérieur du cercle C.

Supposons maintenant que le développement taylorien de la fonction f(z) soit

$$(2) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_\nu z^\nu + \ldots$$

[1] On dit que le point α est un point singulier critique logarithmique pour une fonction f(z) donnée, lorsque cette fonction peut se mettre sous la forme

$$f(z) = A l(z-\alpha) + f_1(z)$$

A étant un nombre constant et $f_1(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point α, et l désignant le logarithme népérien.

et que tous les coefficients a_ν soient des nombres rationnels. Dans le cercle de convergence de la série (2) on aura

$$f'(z)=a_1+2a_2z+\ldots+\nu a_\nu z^{\nu-2}+\ldots;$$

on voit par là que les coefficients du développement de la dérivée f'(z) en série de Taylor sont aussi des nombres rationnels. Donc, d'après notre théorème ci-dessus mentionné, la fonction f'(z) ne peut que se réduire à la somme d'un quotient $\frac{P(z)}{Q(z)}$ de deux polynômes à coefficients entiers et d'une fonction

$$\varphi(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_nz^n+\ldots$$

à coefficients rationnels, holomorphe dans le cercle C. On aura donc

$$f'(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}+\varphi(z)$$

et par suite

$$f(z)=\int\frac{P(z)}{Q(z)}dz+\int\varphi(z)dz.$$

Mais dans le cercle C de sa convergence la série $\varphi(z)$ peut être intégrée termes à termes. Alors on aura

$$\int\varphi(z)dz=b_0z+\frac{b_1}{2}z+\frac{b_2}{3}z^2+\cdots\frac{b_n}{n+1}z^{n+1}\cdots\equiv C(z).$$

On voit par là que l'intégrale $\int\varphi(z)dz$ est une fonction C(z) à coefficients rationnels et holomorphe dans le même cercle C.

D'ailleurs l'intégrale $\int\frac{P(z)}{Q(z)}dz$, puisque P(z) et Q z) sont des polynômes, sera de la forme

$$\int\frac{P(z)}{Q(z)}dz=\frac{A(z)}{B(z)}+\int\frac{E(z)}{D(z)}dr$$

où B(z) est le plus grand commun diviseur du dénominateur Q(z) et de sa dérivée Q'(z), et D(z) un polynôme ne contenant que tous les facteurs premiers de B(z)au premier degré

Mais, comme il est bien connu, les polynômes B(z) et D(z) se calculent par des divisions qui commencent par la division de Q(z) par Q'(z), tous les deux ayant des coefficients rationnels. De la manière dont se succèdent ces divisions on peut voir que les coefficients de B(z) et D(z) sont aussi des nombres rationnels. Enfin on peut calculer les coefficients de A(z) et E(z) à l'aide d'équations du premier degré par rapport à ces coefficients, sous la forme des fonctions rationnelles des coefficients de B(z), D(z) et Q(z). Par conséquent les coefficients de A(z) et E(z) sont aussi des nombres rationnels.

On peut donc écrire

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)} + C(z) + \int \frac{E(z)}{D(z)} dz$$

et énoncer le théorème:

Une fonction f(z) n'admettant pas dans un cercle de rayon r d'autres points singuliers que des pôles et des points critiques logarithmiques ne saurait être représentée par un développement de Taylor à coefficients rationnels sans se réduire à la somme d'un quotient $\frac{A(z)}{B(z)}$ *de deux polynômes à coefficients entiers, d'une fonction C(z) à eoefficients rationnels, holomorphe dans le cercle de rayon r, et d'une intégrale d'un quotient* $\frac{E(z)}{D(z)}$ *de deux polynômes à coefficieuts entiers, le dénominateur* D(z) *ne contenant que tous les facteurs premiers de* B(z) *au premier degré.*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ κ. Σπ. Σαραντόπουλος ἐξετάζει τὰς συναρτήσεις, αἵτινες δεχόμεναι ἐντὸς ἑνὸς κύκλου ὡς ἀνώμαλα σημεῖα πόλους καὶ λογαριθμικὰ κριτικὰ σημεῖα ἀναπτύσσονται εἰς σειρὰν τοῦ Taylor ἔχουσαν συντελεστὰς *ρητοὺς* ἀριθμούς, καὶ ζητεῖ τὴν μορφὴν αὐτῶν.

Στηριζόμενος εἰς προηγούμενον ἐξαγόμενόν του ἐπιτευχθὲν διὰ τὰς μερομόρφους συναρτήσεις καὶ ἀνακοινωθὲν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Παρισίων, ἀποδεικνύει ὅτι τὸ τοιοῦτον ἀνάπτυγμα εἰς σειρὰν τοῦ Taylor, ἔχουσαν ρητοὺς συντελεστάς, λαμβάνει χώραν, καθ' ἣν περίπτωσιν ἡ θεωρουμένη συνάρτησις εἶναι ἄθροισμα 1) μιᾶς ὁλομόρφου συναρτήσεως ἐν τῷ θεωρουμένῳ κύκλῳ ἐχούσης ρητοὺς συντελεστάς, 2) ρητῶν συναρτήσεων καὶ 3) ὁλοκληρώματος ρητῆς ἀναγώγου συναρτήσεως μερικῆς μορφῆς.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ. – **Προσδιορισμὸς τοῦ ἀσβεστίου καὶ διαχωρισμὸς αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ μαγνησίου διὰ βολφραμικοῦ νατρίου***, *ὑπὸ κ.* ***Δ. Κατακουζηνοῦ.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Ἐ. Ἐμμανουήλ.

Κατὰ τὸ ἔτος 1837 ὁ Anthou[1] ἐδημοσίευσεν ἐργασίαν, διὰ τῆς ὁποίας ἀπέδειξεν ὅτι τὸ βολφραμικὸν νάτριον καθιζάνει τελείως τὸ ἀσβέστιον ἀπὸ διαλύματα χλωριούχου ἀσβεστίου ἀσθενῶς ὄξινα.

* **D. KATAKOUSINOS.– Bestimmung des Ca und dessen Trennung von Mg mittels Na_2WO_4.**

Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 31 Ὀκτωβρίου 1929.

[1] ANTHOU, *An. de Pharm.*, **24**, 1837, σ. 304.