

## ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. - **Sur les fonctions multiplement convexes ou concaves\***, par *N. Kritikos*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Καραθεοδωρή.

Dans une note récente communiquée à l'Académie d'Athènes<sup>1</sup>, M. P. Montel répond à la question, posée par M. Varopoulos, de savoir si une fonction  $f(x,y)$  convexe par rapport à chacune des variables  $x$  et  $y$  séparément, est continue par rapport à l'ensemble des deux variables.

Je m'étais posé cette même question il y a plus d'un an et demi et je l'avais résolue affirmativement dans une note datée de Mai 1930, publiée en grec dans le bulletin de la Société Mathématique de Grèce, tome XI (1930), p. 21-28, et qui a paru en octobre 1930. Comme conclusion, j'y formulais le théorème suivant :

Une fonction réelle  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variables définie dans l'intervalle à  $n$  dimensions

$$(1) \quad a_j < x_j < b_j, \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

bornée et convexe<sup>2</sup> par rapport à chacune des ces  $n$  variables séparément, est continue par rapport à l'ensemble de ces variables.

Dans ma démonstration, qui procédait par induction complète, je faisais voir qu'une fonction  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  continue par rapport à l'ensemble des  $n-1$  variables  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , bornée et convexe par rapport à  $x_n$  dans l'intervalle (1), est continue par rapport à l'ensemble de toutes les  $n$  variables.

J'ai remarqué depuis qu'on peut remplacer l'hypothèse de la convexité par l'hypothèse que  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  est concave par rapport à  $x_n$ , car si  $f(x_1, \dots, x_n)$  est concave,  $-f(x_1, \dots, x_n)$  est convexe par rapport à  $x_n$ . Ceci m'amène à formuler la généralisation suivante de mon premier théorème :

*Si une fonction réelle  $f(x_1, \dots, x^n)$  définie dans l'intervalle*

$$a_j < x_j < b_j \quad (j=1, \dots, n)$$

*est continue par rapport à certains groupes des variables, bornée et convexe ou*

\* Ν. ΚΡΙΤΙΚΟΥ.—Περὶ τῶν πολλαπλῶν κυρτῶν ἢ κοίλων συναρτήσεων.

<sup>1</sup> PAUL MONTEL, Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sousharmoniques, *Praktika de l'Académie d'Athènes*, séance du 5 novembre 1931.

<sup>2</sup> Une fonction réelle  $f(x)$  définie dans l'intervalle  $a < x < b$  est dite, suivant Jensen, convexe ou concave, selon que  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$  ou  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$  pour toute paire de valeurs comprises dans l'intervalle.

*concave par rapport à chacune des variables restantes, elle est continue par rapport à l'ensemble des n variables.*

D'après ce qui précède, cette proposition est une conséquence immédiate de ma démonstration; elle découle, en effet, du fait qu'une fonction  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  continue par rapport à  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ , bornée et convexe ou concave par rapport à  $x_n$ , est continue par rapport à l'ensemble des n variables. Je me propose de donner dans ce qui suit une démonstration très élémentaire de cette propriété.

Pour simplifier les notations, désignons par P le point de coordonnées  $x_1, \dots, x_{n-1}$  dans un espace  $R_{n-1}$  à n-1 dimensions et par x la variable  $x_n$ . La fonction  $f(P, x)$  est supposée continue par rapport au point P de  $R_{n-1}$ , x étant fixe, bornée et convexe ou concave lorsque x varie et P reste fixe. Je remarque d'ailleurs que  $f(P, x)$  peut être convexe en x pour certains points P du domaine de  $R_{n-1}$  où elle est définie et concave (ou linéaire) pour d'autres.

Soit  $(P_0, x_0)$  un point intérieur du domaine à n dimensions où  $f(P, x)$  est définie. M étant une constante positive quelconque, on peut délimiter autour du point  $P_0$  un voisinage  $V_0$  dans  $R_{n-1}$  et, d'autre part, trouver un nombre positif h tels que pour tout P appartenant à  $V_0$  on ait à la fois

$$(2) \quad \begin{aligned} |f(P, x_0+h) - f(P, x_0)| &< M, \\ |f(P, x_0-h) - f(P, x_0)| &< M. \end{aligned}$$

En effet, puisque  $f(P, x)$  est bornée et convexe ou concave en x, P étant fixe, il s'ensuit, comme on sait, qu'elle est continue par rapport à cette même variable, lorsque P reste fixe. Donc, on peut trouver un nombre positif h tel que

$$\left| f(P_0, x_0 \pm h) - f(P_0, x_0) \right| < \frac{M}{2}$$

En second lieu, comme  $f(P, x)$  est continue par rapport à P, x restant fixe, on peut délimiter un voisinage  $V_0$  de  $P_0$  dans  $R_{n-1}$  tel que

$$\left| f(P, x_0 \pm h) - f(P_0, x_0 \pm h) \right| < \frac{M}{2}.$$

Pour tout P dans  $V_0$ , on a alors les inégalités (2).

Représentons à présent par une courbe la fonction  $f(P, x)$  de x, lorsque P est fixe dans  $V_0$  et x varie dans l'intervalle  $(x_0-h, x_0+h)$ , en prenant x pour abscisse et  $f(P, x)$  pour ordonnée, et soit  $A_0$  le point  $[x_0, f(P, x_0)]$  du

plan. On voit alors immédiatement qu'à cause de la convexité ou de la concavité de la fonction, la courbe représentative doit être située à l'intérieur des deux angles opposés par le sommet que forment les deux droites passant par  $A_0$  et ayant pour coefficients angulaires  $\pm \frac{M}{h}$ . Donc pour tout  $x$  de l'intervalle  $(x_0-h, x_0+h)$  on a

$$\left| f(P,x) - f(P,x_0) \right| < \frac{M}{h} \left| x - x_0 \right|$$

On en déduit pour  $P$  dans  $V_0$  et  $|x-x_0| < h$  l'inégalité

$$\left| f(P,x) - f(P_0,x_0) \right| < \frac{M}{h} \left| x - x_0 \right| + \left| f(P,x_0) - f(P_0,x_0) \right|$$

Chacun des deux termes à droite est infiniment petit lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  et  $P$  vers  $P_0$ , indépendamment l'un de l'autre. Donc  $f(P,x)$  est continue par rapport à l'ensemble de  $P$  et de  $x$  au point  $(P_0, x_0)$ .

#### ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος. Μία συνάρτησις  $f(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$  συνεχῆς ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν  $x_i$  διὰ σταθερὰς τιμὰς τῶν  $y_j$  καὶ κυρτὴ ἢ κοίλη ὡς πρὸς ἐκάστην τῶν μεταβλητῶν  $y_j$  διὰ σταθερὰς τιμὰς τῶν  $x_i$  εἶναι συνεχῆς καὶ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν  $(n+m)$  μεταβλητῶν  $(x_i, y_j)$

#### Remarques de M. Carathéodory:

La généralisation contenue dans la note précédente du théorème sur les fonctions biconvexes que M. Kritikos avait trouvé il y a près de deux ans est non seulement importante et intéressante par elle même, mais elle permet en outre comme on l'a vu de simplifier d'une manière définitive la démonstration de ce théorème.

On en avait jusqu'à présent, outre la démonstration originale de M. Kritikos publiée en 1930 dans le Bulletin de la Société mathématique de Grèce, deux démonstrations de M. Montel contenues dans le fascicule de novembre 1931 de notre Académie et aussi une note de M. Varopoulos qui ne contient d'ailleurs qu'une variante de la première démonstration de M. Montel.

Le théorème généralisé se déduit d'ailleurs aisément tant de la première démonstration de M. Kritikos que de la seconde démonstration de M. Montel.

Quand M. Varopoulos avait posé à M. Montel la question de savoir si le théorème sur les fonctions biconvexes était exact, il avait omis de lui dire qu'il s'agissait d'un résultat déjà publié par un autre. Ainsi M. Montel



a rédigé sa note sans savoir que le théorème en question avait déjà été traité et il n'a eu connaissance de l'existence du travail (écrit en grec) de M. Kritikos que par une lettre que je lui ai adressée à la fin décembre 1931. Il a tout de suite reconnu avec la plus grande courtoisie la priorité de M. Kritikos et c'est en plein accord avec lui que la note ci-dessus a été communiquée à notre Académie.

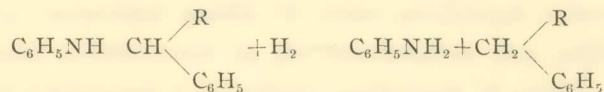
ΟΡΓΑΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ — Περί τῆς διασπάσεως τοῦ φαινυλο R — ανιλιδο-  
μεθανίου δι' ἀναγωγῆς, ὑπὸ Ἰωαν. Γαζοπούλου. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ  
κ. Ἀλ. Βουρνάζου.

Παραδείγματα διασπάσεως δεσμοῦ μεταξὺ ἀτόμων ἄνθρακος καὶ ἀζώτου συνα-  
τῶνται συχνὰ ἐν τῇ ὀργανικῇ Χημείᾳ. Οὕτω αἱ ἀμινοκετόναι διὰ καταλλήλου ὕδρο-  
γονώσεως παρέχουν ἀμινοπνεύματα καὶ ἀμμωνίαν, ὠρισμένης δὲ συνθέσεως τεταρτο-  
ταγεῖς ἀμῖναι διασπῶνται εἰς ἀμίνιας, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς δι' ἠλεκτρολύσεως  
διασπάσεως τοῦ ἰωδιούχου τριαλκυλοφαινυλαμμωνίου εἰς τριαλκυλαμίνιας καὶ βενζόλιον.

Ἡ ἐν τῇ παρουσίᾳ μελέτῃ δι' ὕδρογονώσεως διάσπασις τῆς δευτεροταγοῦς

ἀμίνης τοῦ γενικοῦ τύπου 
$$\text{C}_6\text{H}_5\text{NH} \begin{array}{l} \text{CH} \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C}_6\text{H}_5 \end{array} \end{array}$$
 παρουσιάζει τὸ ἰδιαίτερον ἐνδια-

φέρον ὅτι ἀναλόγως τῆς μεταβλητῆς ρίζης R παρέχει προϊόντα διασπάσεως ἀνήκοντα  
εἰς διαφόρους τάξεις. Ἡ διάσπασις αὕτη διατυποῦται διὰ τῆς ἐξῆς χημικῆς ἐξισώσεως.



Κατὰ τὴν ἀντίδρασιν ταύτην λαμβάνεται πάντοτε τὸ αὐτὸ προϊόν διασπάσεως

ἢ ανιλίνη καὶ τὸ μεταβλητὸν τοῦ γενικοῦ τύπου 
$$\text{CH}^2 \begin{array}{l} \text{R} \\ \text{C}_6\text{H}_5 \end{array}$$

Ἐὰν R εἶναι ἀλκύλιον τότε τὸ προϊόν τῆς διασπάσεως θὰ ἀνήκη εἰς τὰς  
ἐνώσεις τοῦ βενζόλιου μετὰ πλευρικῆς ἀλύσεως, ἐν αἷς ἡ ἀπλουστέρα θὰ εἶναι τὸ  
αιθυλοβενζόλιον, δεδομένου ὅτι  $\text{R} = \text{CH}_3$ .

Ἐὰν R εἶναι φαινύλιον, τότε λαμβάνονται ἐνώσεις τῆς σειρᾶς τοῦ διφαινυλίου.  
Ἐὰν τὸ φαινύλιον περιέχη πλευρικὴν ἄλλωσιν, τότε χρησιμοποιοιμένης καταλλήλου  
ἀλογονοῦχου ἐνώσεως, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω κατὰ τὴν παρασκευὴν τῆς δευτερο-  
ταγοῦς ταύτης ἀμίνης, θὰ εἶναι δυνατὴ ἢ εἰς ὠρισμένην θέσιν σύνδεσις ἐνὸς ἐκ τῶν