ΕΚΤΑΚΤΟΙ ΣΥΝΕΔΡΙΑΙ
21ΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ ΚΑΙ 11ΗΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 1992

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΜΙΧΑΗΛ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΩΝ ΕΠΟΧΩΝ

(Βαβυλώνιοι — Ἀρχαῖοι Ἕλληνες)

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι.

Ἡ σημερινὴ ὁμιλία καθὼς καὶ ἐκείνη τῆς 11ης Φεβρουαρίου ἀποσκοποῦν στὸ νὰ κινήσουν τὸ ἐνδιαφέρον καὶ νὰ συντελέσουν στὸ νὰ γίνουν κατανοητὲς μερικὲς σπουδαῖες μαθηματικὲς ἰδέες καθὼς καὶ θεωρήσεις σχετικὲς μὲ τὴν Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν, ὄχι μόνο ἀπὸ τοὺς διδάσκοντες καὶ τοὺς διδασκομένους ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ εὐρὺ κοινό.

Εἶναι πράγματι λυπηρὸ τὸ γεγονὸς ὅτι μιὰ μεγάλη μερίδα συνανθρώπων μας, μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ πολλοὶ διανοούμενοι, θεωροῦν ὅτι ἡ μελέτη καὶ ἡ ἐκμάθηση τῶν μαθηματικῶν, ἔστω καὶ τῶν βασικωτέρων κλάδων αὐτῶν, εἶναι πολὺ δύσκολη ἢ ἀκόμα καὶ ὄχι ἀναγκαία. Ὅμως στὴν ἐποχή μας ἔχει ἤδη καταστεῖ σαφὲς ὅτι ἂν θέλομε νὰ κατανοήσομε τὴν Φύση πρέπει νὰ συνομιλοῦμε μὲ αὐτὴν στὴν γλώσσα ποὺ ἐκείνη μᾶς μιλᾶ, καὶ ποὺ δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὰ μαθηματικά.

Γιὰ νὰ γίνομε ὅμως κάπως σαφέστεροι θὰ κάνομε ἕνα τεχνητὸ διαχωρισμὸ τῶν μαθηματικῶν σὲ δύο εἴδη. Τὸ πρῶτο εἶδος εἶναι ἡ Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν αὐτὴ καθ' ἑαυτήν, τὸ εἶδος δηλαδὴ ἐκεῖνο ὅπου τὸ κύριο μέλημα εἶναι ἡ ἔρευνα καὶ *μὲ τὸ ὁποῖο κατὰ κανόνα ἀσχολοῦνται «οἱ ἐπαγγελματίες» ἤτοι οἱ ἐρευνητὲς - μαθηματικοί. Τὰ μαθηματικὰ τοῦ δευτέρου εἴδους θεωροῦνται ὅτι εἶναι ἕνα ἐκλεπτυσμένο ἕνα ραφιναρισμένο, ὄργανο τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαρμογὴ σὲ ὅλες σχεδὸν τὶς ἀνθρώπινες δραστηριότητες εἶναι καθοριστική. Ἴσως δὲν θὰ ἦταν καθόλου ὑπερβολὴ νὰ ἰσχυρισθεῖ κανεὶς ὅτι ἡ «καλὴ ὑγεία» τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν ἐξαρτᾶται κατὰ ἕνα ποσοστό, πολὺ μεγαλύτερο ἀπὸ ὅ,τι νομίζομε, ἀπ' τὸν βαθμὸ ἐπιτυχίας κατὰ τὸν ὁποῖο μεταφέρομε τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα, καθιστοῦμε δηλαδὴ κοινωνοὺς αὐτῶν τὸ εὐρὺ κοινὸ καὶ ὄχι μόνο τὸν στενὸ κύκλο τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν ἐκπαιδευτικῶν. Τὸ θέμα τῆς σωστῆς ἐκλαϊκεύσεως τῶν μαθηματικῶν καὶ γενικώτερα τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν εἶναι κεφαλαιώδους σημασίας ὥστε θὰ μποροῦσε νὰ ἀποτελέσει τὸ ἀντικείμενο ἰδιαίτερης ὁμιλίας. — Καὶ τώρα στὸ θέμα μας.*

Ἂς φαντασθοῦμε ὅτι μεταφέρομε ἕνα μαθητὴ τοῦ Γυμνασίου ἢ τοῦ Λυκείου σὲ ἕνα ἀντίστοιχο σχολεῖο μιᾶς ἄλλης χώρας. Ἀσφαλῶς ὁ μαθητὴς αὐτὸς θὰ συναντήσει δυσκολίες προσαρμογῆς στὸ νέο πρόγραμμα σπουδῶν. Ἡ ξένη γλώσσα καθὼς καὶ τὰ μαθήματα ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ αὐτήν, ὅπως εἶναι ἡ φιλολογία, ἡ λογοτεχνία κ.ἄ., ἀλλάζουν ἀπὸ χώρα σὲ χώρα, μερικὰ μάλιστα θέματα, ὅπως εἶναι ἡ Ἱστορία, μπορεῖ νὰ ἑρμηνευθοῦν κατὰ τόπους, μέσα στὴν ἴδια τὴν χώρα, κατὰ τρόπο διαφορετικό. Ὅμως ὡς πρὸς τὰ μαθήματα ποὺ ἀναφέρονται στὶς θετικὲς ἐπιστῆμες καὶ στὰ μαθηματικὰ ὁ μαθητὴς αὐτὸς θὰ αἰσθανθεῖ ὅτι οὐσιαστικὰ εὑρίσκεται σὲ γνώριμο περιβάλλον.

Ἂς ὑποθέσομε τώρα ὅτι ὁ μαθητής μας μεταφέρεται ὄχι μόνο σὲ ἄλλη χώρα ἀλλὰ καὶ σὲ ἄλλη ἐποχή, π.χ. στὴν Βαβυλωνία πρὶν ἀπὸ 4.000 χρόνια ἢ στὴν Ἑλλάδα πρὶν ἀπὸ 2.000 χρόνια. Τότε θὰ ἦταν σχεδὸν ἀδύνατο σ' αὐτὸν νὰ ἀναγνωρίσει κάτι ποὺ νὰ τοῦ θυμίζει, εἴτε ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενο εἴτε ὡς πρὸς τὴν μέθοδο, τὰ διάφορα θέματα ἀπὸ τὶς θετικὲς ἐπιστῆμες ποὺ εἶχε διδαχθεῖ. Ὁ λόγος εἶναι ὅτι αὐτὸ π.χ. ποὺ στὴν ἐποχὴ τοῦ Ἀριστοτέλη ὀνομάζανε «Φυσικὴ» καθὼς καὶ οἱ διάφορες συζητήσεις γύρω ἀπὸ τὶς βασικὲς ἀρχές της, ὅπως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως κ.ἄ., κατατάσσονται σήμερα στὰ φιλοσοφικὰ θέματα. Ἡ σχέση τῆς Φυσικῆς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης μὲ τὴν σύγχρονη Φυσικὴ γίνεται ἀντιληπτὴ μόνο κατόπιν προσεκτικῆς μελέτης τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖο ἀναπτύχθηκαν οἱ φυσικὲς ἐπιστῆμες.

Ἀντιθέτως ὅμως τὰ μαθηματικὰ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης εἶναι τὰ μόνα ποὺ ἀναγνωρίζει ὁ μαθητής μας. Πράγματι, μπορεῖ σὲ συνεργασία μὲ τοὺς Βαβυλωνίους συμμαθητές του νὰ λύσει ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, μαζὶ δὲ μὲ τοὺς Ἕλληνες συμμαθητές του νὰ κάνει γεωμετρικὲς κατασκευές. Οἱ δυσκολίες ποὺ θὰ συναντήσει θὰ εἶναι δυσκολίες τύπου καὶ ὄχι οὐσίας. Λόγου χάριν, τὸ ἀριθμητικὸ σύστημα τῶν Βαβυλωνίων δὲν ἦταν βέβαια τὸ ἴδιο μὲ τὸ δικό μας, ὅμως, ὁ τρόπος ἐπιλύσεως δευτε-

ροβαθμίου ἐξισώσεως ποὺ χρησιμοποιοῦσαν οἱ Βαβυλώνιοι εἶναι ἐν χρήσει ἀκόμα καὶ σήμερα.

Ἡ διαχρονικότητα καθὼς καὶ ἡ οἰκουμενικότητα ποὺ παρουσιάζουν τὰ μαθηματικὰ ἀπορρέουν ἀπὸ τὴν ἴδια τὴν φύση τους.

Μιὰ πρώτη ἰδιαιτερότητα τῶν μαθηματικῶν εἶναι ὅτι αὐτὰ «δὲν χάνουν ποτὲ ἔδαφος», δὲν ὑποχωροῦν. Νέες ἀνακαλύψεις δὲν καταργοῦν προηγούμενες. Τὰ σύνορα τῶν μαθηματικῶν ἐπεκτείνονται πάντοτε πρὸς τὰ ἔξω. Ἡ ἰδιαιτερότητα αὐτὴ ὀφείλεται ἐν μέρει στὸν ἀπόλυτο χαρακτῆρα τῶν ἐφαρμοζομένων κριτηρίων, ἔτσι ὥστε αὐτὰ ποὺ κάποτε ὑπῆρξαν «καλὰ μαθηματικὰ» νὰ ἐξακολουθοῦν νὰ ἀποτελοῦν μέρος τοῦ ὅλου οἰκοδομήματος τῆς μαθηματικῆς γνώσης. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὰ Μαθηματικά, ἡ Φυσικὴ τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδας ἔχει ἱστορικὴ μόνο ἀξία γιὰ τὸν σύγχρονο φυσικό, ἐνῶ τὰ μαθηματικὰ τῆς ἴδιας ἐποχῆς εἶναι καὶ σήμερα ἀπαραίτητα καὶ χρήσιμα στὸν σύγχρονο μαθηματικό.

Ἕνα δεύτερο γνώρισμα τῶν μαθηματικῶν εἶναι ὁ ἐπαγωγικός τους χαρακτήρας. Μιὰ μαθηματικὴ θεωρία προχωρεῖ κατὰ ἕνα διατεταγμένο λογικὸ τρόπο ξεκινώντας ἀπὸ ἕνα σαφῶς διατυπωμένο σύνολο ἀξιωμάτων. Ἔτσι, ἡ γνώση ἑνὸς θεωρήματος συνεπάγεται, ἢ πρέπει νὰ συνεπάγεται, τὴν γνώση ὅλων τῶν προηγουμένων θεωρημάτων τὰ ὁποῖα συνδέονται μὲ τὰ ἐν λόγῳ ἀξιώματα. Ὁ ἀρχάριος λοιπὸν πρέπει νὰ ἀρχίσει ἀπὸ τὴν ἀρχή, ἡ ὁποία ὅμως ἀρχὴ εὑρίσκεται συχνὰ σὲ παρωχημένη ἐποχή.

Θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ ἰσχυρισθεῖ ὅτι μὲ τὰ μαθηματικὰ συμβαίνει κάτι παρόμοιο μὲ ἐκεῖνο ποὺ μᾶς λένε οἱ βιολόγοι, ὅτι δηλαδὴ στὴν ἀνάπτυξη τοῦ ἐμβρύου ἐπαναλαμβάνεται μὲ γοργὸ ρυθμὸ ἡ ὅλη ἀνάπτυξη τοῦ εἴδους στὸ ὁποῖο ἀνήκει τὸ ἔμβρυο, ὅλα δηλαδὴ τὰ στάδια τὰ ὁποῖα διήνυσε τὸ εἶδος ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεώς του μέχρι σήμερα. Προφανῶς ἡ ἄποψη αὐτὴ τῶν βιολόγων ὅτι ἡ ὀντογένεια ἐπαναλαμβάνει τὴν φυλογένεια πρέπει νὰ ἑρμηνευθεῖ καταλλήλως γιατὶ ἀλλιῶς ὁδηγεῖ σὲ κάθε εἴδους παραλογισμό.

Κατ' ἀναλογία μὲ τὴν ἄποψη αὐτὴ τῶν βιολόγων μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι καὶ ἡ μαθηματικὴ παιδεία ἑνὸς ἀτόμου ἡ ὁποία τὸν ὁδηγεῖ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ μέχρι τὰ σύνορα τῆς διεξαγόμενης μαθηματικῆς ἔρευνας τῆς ἐποχῆς του, ἀκολουθεῖ σὲ γενικὲς γραμμὲς τὴν ἀναπτυξιακὴ πορεία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης στὸ σύνολό της.

Συνεπῶς, εἴτε τὸ θέλομε εἴτε ὄχι, τὸ μαθηματικὸ παρελθόν μας συνοδεύει, ὁ δὲ μαθηματικὸς πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ ἀρχίσει νὰ μελετᾶ τὸ ἀντικείμενό του, ὑπὸ τὸ ἔνδυμα πάντοτε ποὺ ἡ «μαθηματικὴ μόδα» τῆς ἐποχῆς του ὑπαγορεύει, προσπαθώντας νὰ κατανοήσει σὲ τί συνίστανται τὰ μαθηματικὰ ἐπιτεύγματα τῶν παλαιοτέρων ἐποχῶν. Οἱ μαθηματικοὶ δικαίως εἶναι ὑπερήφανοι γιὰ τὴν παλαιότητα τοῦ *κλάδου τους ἡ μελέτη τοῦ ὁποίου ἔχει ἀποτελέσει, πολὺ πρὶν αὐτὸ συμβεῖ μὲ τὶς ἄλλες θετικὲς ἐπιστῆμες, ἕνα νέο κλάδο ἤτοι τὴν «Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν».*

Εἶναι λοιπὸν φυσικὸ ἕνας σπουδαστὴς τῶν μαθηματικῶν νὰ γνωρίσει τὴν ἱστορία τοῦ ἀντικειμένου ποὺ μελετᾶ, καὶ αὐτὸ ἀκριβῶς εἶναι ἐκεῖνο ποὺ δικαιολογεῖ καὶ τὸν τίτλο τῆς σημερινῆς ὁμιλίας.

Εἶναι αὐτονόητο ὅτι δὲν προτίθεμαι νὰ κάνω μιὰ ἐπισκόπηση τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν. Ἁπλῶς ἐπέλεξα μερικὰ θέματα τὰ ὁποῖα ἀφ' ἑνὸς πρέπει νὰ εἶναι κατανοητὰ ἀπὸ τὸ εὐρὺ κοινὸ τὸ ἐφοδιασμένο μὲ τὶς γνώσεις ποὺ παρέχονται στὴν Μέση Ἐκπαίδευση, ἀφ' ἑτέρου νὰ εἶναι ἀπὸ μαθηματικῆς πλευρᾶς ἀξιόλογα καὶ παραστατικὰ τῆς ἐποχῆς τους.

Στὸ πρῶτο μέρος τῆς ὁμιλίας θὰ ἀναφερθοῦμε στὰ μαθηματικὰ τῆς ἐποχῆς τῶν Βαβυλωνίων, καὶ εἰδικότερα σὲ στοιχεῖα ποὺ ἦρθαν στὸ φῶς κατὰ τὰ τελευταῖα πενήντα περίπου χρόνια. Στὸ δεύτερο μέρος θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὰ μαθηματικὰ τῆς ἐποχῆς τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων.

* * *

ΜΕΡΟΣ Ι

Τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων

Ἀναφερόμαστε στὰ μαθηματικὰ ποὺ ἀναπτύχθηκαν στὴν Μεσοποταμία, στὴν χώρα δηλαδὴ ποὺ ἐκτείνεται μεταξὺ τῶν ποταμῶν Τίγρη καὶ Εὐφράτη, τὸ σημερινὸ Ἰράκ.

Μέχρι καὶ πρό τινος ἀκόμη, οἱ γνώσεις μας γιὰ τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων προέρχονταν ἀπὸ τὰ κλασσικὰ ἀρχαῖα ἑλληνικὰ κείμενα στὰ ὁποῖα ὑπάρχουν ἀναφορὲς στοὺς Χαλδαίους καὶ πιὸ συγκεκριμένα στοὺς Βαβυλωνίους μαθηματικοὺς καὶ ἀστρονόμους. Μὲ βάση τὶς ἀναφορὲς αὐτὲς μπορεῖ κανεὶς νὰ ὑποθέσει ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι, σὲ σχέση μὲ τοὺς ἀριθμούς, κατείχοντο ἀπὸ ἕνα εἶδος μυστικισμοῦ ποὺ συνίστατο στὴν μελέτη τῆς ἀποκρύφου σημασίας τῶν ἀριθμῶν. Σήμερα γνωρίζομε ὅτι ἡ ὑπόθεση αὐτὴ ἀπέχει τῆς πραγματικότητας.

Κατὰ τὸ τέλος τοῦ 19ου αἰώνα ἄρχισαν νὰ γίνονται ἀνασκαφὲς σὲ ὑψώματα ποὺ εὑρίσκονται στὴν περιοχὴ τῆς ἀρχαίας πόλης. Τὰ ὑψώματα αὐτὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὴν κατὰ καιροὺς συσσώρευση καὶ ὑπερκάλυψη ἐρειπίων παλαιοτέρων πόλεων. Οἱ ἀνασκαφὲς ἀπεκάλυψαν πολλὲς χιλιάδες πινάκων (ἐπιγραφῶν) ἐπὶ τῶν ὁποίων ἀναγράφονται διάφορα σύμβολα, γράμματα κ.ἄ. Ἀναγνωρίσθηκε ἀρκετὰ νωρὶς ὅτι μερικοὶ ἀπὸ τοὺς πίνακες αὐτοὺς εἶχαν κάποια σχέση μὲ ἀριθμούς. Ὅμως ἡ πλήρης *κατανόηση καὶ ἀξιολόγηση τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων ὁλοκληρώθηκε μόλις πρὶν ἀπὸ πενήντα περίπου χρόνια.*

Ὑπάρχουν, τώρα, στὴν διάθεσή μας περὶ τοὺς 400 πίνακες ἢ κομμάτια πινάκων μὲ μαθηματικὸ περιεχόμενο. Οἱ πίνακες αὐτοὶ ἔχουν μεταφρασθεῖ, ἑρμηνευθεῖ καὶ ἐπιμελῶς ἀντιγραφεῖ σὲ μερικοὺς τόμους οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν μιὰ ἀξιόπιστη ἱστορικὴ πηγή. Οἱ ἴδιοι οἱ πίνακες εὑρίσκονται σὲ μουσεῖα ἢ συλλογές, σὲ διάφορες χῶρες, συμβαίνει μάλιστα τεμάχια τοῦ ἰδίου πίνακος νὰ εὑρίσκονται σὲ διαφορετικὰ μουσεῖα. Οἱ διασωθέντες ἀκέραιοι πίνακες εἶναι πολὺ ὀλίγοι. Ἕνας ἀκέραιος πίνακας ἔχει τὸ μέγεθος μιᾶς παλάμης, εἶναι κατασκευασμένος ἀπὸ ἄψητο πηλό, ἡ δὲ ἐπ' αὐτοῦ γραφὴ καλεῖται σφηνοειδής. Οἱ περισσότεροι ἀπὸ τοὺς πίνακες αὐτοὺς χρονολογοῦνται γύρω στὸ 1700 π.Χ. (σὺν ἢ πλὴν 200 χρόνια) οἱ δὲ ὑπόλοιποι περὶ τὸ 300 π.Χ., χωρὶς μέχρι σήμερα νὰ ὑπάρχει ἱκανοποιητικὴ ἑρμηνεία γιὰ τὴν μεγάλη χρονικὴ ἀνάπαυλα ποὺ παρατηρεῖται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν ὁμάδων τῶν πινάκων. Ἡ ἡλικία ἑνὸς πίνακος συνάγεται ἀπὸ τὸ βάθος τοῦ ὑψώματος ὅπου αὐτὸς ἀνευρέθη ἢ ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ γραφικοῦ χαρακτῆρα. Τὸ περιεχόμενο τοῦ πίνακος δὲν θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖ ἔνδειξη γιὰ τὴν παλαιότητά του.

Στὸν σύγχρονο μαθηματικό, ὁ ὁποῖος εἶναι τόσο ἐξοικειωμένος μὲ τὴν γοργὴ ἐξέλιξη τῶν μαθηματικῶν στὰ τελευταῖα διακόσια χρόνια, φαίνεται περίεργο τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων διετήρησαν (ὅπως αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ τὰ ὑπάρχοντα κείμενα) διὰ μέσου τόσο βίαιων πολιτικῶν ἀλλαγῶν τὸν ἴδιο χαρακτῆρα καὶ τὸ ἴδιο περιεχόμενο ἐπὶ 2000 σχεδὸν χρόνια. Κατὰ τὰ φαινόμενα τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων δημιουργήθηκαν μὲ πολὺ γοργὸ ρυθμό, τὴν δὲ περίοδο αὐτὴ τῆς ταχείας ἀναπτύξεως ἀκολούθησε μακρὰ περίοδος στασιμότητας. Ἐπίσης δὲν γνωρίζομε τίποτε ἐπωνύμως γιὰ τὰ ἄτομα ποὺ δημιούργησαν τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων, ἐκτὸς βέβαια ἀπὸ τὸ διασωθὲν ἔργο τους.

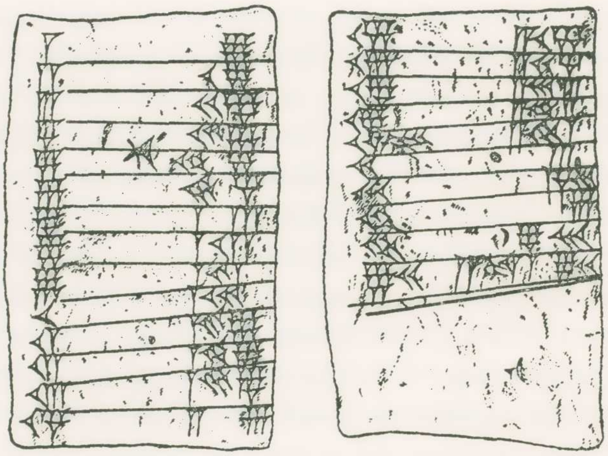
Τὸ ἀριθμητικὸ σύστημα τῶν Βαβυλωνίων

Ἡ ἀποκάλυψη τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν Βαβυλωνίων ἔγινε ἐπὶ τῇ βάσει μόνο τῶν ὑπαρχόντων κειμένων (πινάκων) γιὰ τὰ ὁποῖα ἐμίλησα προηγουμένως.

Ἡ Εἰκόνα I εἶναι μιὰ φωτοτυπία τῶν δύο ὄψεων ἑνὸς ἀρχαίου βαβυλωνιακοῦ πίνακος. Ὑπάρχουν δύο στῆλες σὲ κάθε ὄψη. Ἂν λάβομε ὑπόψη καὶ τὶς δύο ὄψεις τότε κάθε στήλη ἔχει 24 γραμμές.

Οἱ πρῶτες ἐννέα γραμμὲς τῆς Στήλης I παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 1 μέχρι τὸ 9, ὅπου κάθε ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ ἰσάριθμες μικρὲς κατακόρυφες σφη-

Στήλ. I Στήλ. II Στήλ. I Στήλ. II



᾽Εμπρὸς Πίσω

Εἰκόνα 1

νες, γραμμένες κατὰ ὁμάδες ἀνὰ τρεῖς, κάτι ποὺ διευκολύνει τὴν μέτρηση. Μετὰ τὸν ἀριθμὸ ἐννέα, παρουσιάζεται ἕνα νέο σύμβολο (⊀) τὸ ὁποῖο παριστάνει τὸ δέκα. Οἱ ἑπόμενες ὀκτὼ γραμμὲς παριστάνουν τοὺς ἀκεραίους ἀπὸ 11 μέχρι καὶ 18. Τὸ ἑπόμενο σύμβολο παριστάνει τὸν ἀριθμὸ 19, ὁ ὁποῖος ὅμως συνήθως συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολο τοῦ δέκα ἀκολουθούμενο ἀπὸ ἐννέα κάθετες σφῆνες. Οἱ ἑπόμενες τέσσερις γραμμὲς ἀντιστοιχοῦν στοὺς ἀκεραίους 20, 30, 40 καὶ 50.

Συνοψίζοντας, παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῶν Βαβυλωνίων κατασκευάζονται μὲ τὴν χρήση δύο συμβόλων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν στὸ 1 καὶ στὸ 10. Ἡ πρώτη στήλη περιλαμβάνει τοὺς πρώτους εἴκοσι ἀκεραίους καθὼς καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 20, 30, 40, 50.

῎Ας ἐφαρμόσομε τώρα τὶς πρῶτες αὐτὲς γνώσεις μας στὴν Στήλη II. ᾽Αναγνωρίζεται εὔκολα ὅτι οἱ πρῶτες ἕξι γραμμὲς παριστάνουν τοὺς ἀκεραίους 9, 18, 27, 36, 45, 54, ποὺ εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τοῦ 9.

Εἶναι λοιπὸν λογικὸ νὰ ὑποθέσομε ὅτι τὸ κείμενο τοῦ πίνακός μας παριστάνει τὸν πολλαπλασιαστικὸ πίνακα τοῦ 9. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ 7η καὶ ἡ 8η γραμμὴ ποὺ περιλαμβάνουν, ἡ μὲν 7η μία κάθετη σφήνα ἀκολουθούμενη ἀπὸ τρεῖς ἄλλες, ἡ δὲ 8η μιὰ κάθετη σφήνα ἀκολουθούμενη ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ δώδεκα, πρέπει, οἱ γραμμὲς αὐτές, νὰ ἀντιστοιχοῦν στοὺς ἀριθμοὺς 63 καὶ 72. Γιὰ νὰ συμβαίνει αὐτὸ πρέπει ἡ πρώτη κάθετος σφήνα, καὶ στὶς δύο γραμμές, νὰ ἑρμηνευθεῖ ὅτι παριστάνει τὸν ἀριθμὸ 60. Ἔτσι οἱ δύο αὐτὲς γραμμὲς ἑρμηνεύονται:

𒁹 𒁹𒁹𒁹 $= 1.60 + 3 = 63$ καὶ 𒁹 𒌋 𒁹𒁹 $= 1.60 + 12 = 72$.

Παρόμοιες παρατηρήσεις, ἡ ὀρθότητα τῶν ὁποίων διασταυρώνεται ἀπὸ τὴν μελέτη καὶ ἄλλων πινάκων, μᾶς ὁδηγοῦν στὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ διάφορα σύμβολα-ψηφία ἀλλάζουν ἀξία ἀνάλογα μὲ τὴν θέση ποὺ κατέχουν μέσα στὸν ἀριθμό, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ στὸ δεκαδικό μας σύστημα. Μὲ ἄλλα λόγια ὅταν ἕνα ψηφίο μετατοπισθεῖ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τότε ἡ ἀξία του πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 60. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχαν τὸ ἑξηνταδικὸ σύστημα, ἀνάλογο μὲ τὸ δικό μας δεκαδικὸ σύστημα. Σὰν ἕνα ἐπιπλέον παράδειγμα ἂς θεωρήσομε τὴν γραμμὴ 14. Ἔχομε

𒌋 𒁹𒁹𒁹 𒁹	𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹

ἡ ἔνδειξη τῆς στήλης I εἶναι ὁ ἀριθμὸς 14 ἐνῶ ἡ ἔνδειξη τῆς στήλης II εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2.60+6=126$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ 14.9 πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ 126, ποὺ πράγματι ἀληθεύει.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ διευκρινήσομε ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι δὲν χρησιμοποιοῦσαν, στὸ τέλος ἑνὸς ἀκεραίου, εἰδικὸ σύμβολο γιὰ τὸν ἀριθμὸ μηδέν, ἀλλὰ ἄφηναν τὸν ἀναγνώστη νὰ μαντεύσει, ἀπὸ τὴν ἀνάγνωση τοῦ κειμένου, τὴν ὕπαρξη μιᾶς ἢ καὶ περισσοτέρων θέσεων οἱ ὁποῖες ἐπεῖχαν τὴν θέση τοῦ μηδενός. Στὴν εἰκοστὴ σειρά, π.χ., στὴν στήλη I ὑπάρχει τὸ σύμβολο, 𒌋 𒌋, ποὺ ὅπως ἐξηγήσαμε παραπάνω σημαίνει 20, στὴν δὲ στήλη II ἀντιστοίχως ὑπάρχει τὸ σύμβολο 𒁹 𒁹 𒁹 ποὺ σημαίνει 3. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ὑποθέσομε ὅτι ὑπάρχει μιὰ κενὴ θέση δεξιά του 𒁹 𒁹 𒁹 ὁπότε τὸ τελευταῖο αὐτὸ σύμβολο θὰ ἑρμηνευθεῖ ὅτι εὑρίσκεται στὴν δεύτερη θέση καὶ πρέπει ὡς ἐκ τούτου νὰ πολλαπλασιασθεῖ ἐπὶ 60, ὁπότε ἔχομε $3.60=180$ ποὺ ὄντως ἰσοῦται μὲ 20.9. Σὲ πολὺ μεταγενέστερους πίνακες οἱ Βαβυλώνιοι κάνουν χρήση τοῦ συμβόλου 𒌋𒌋 γιὰ τὸ μηδὲν καὶ αὐτὸ μόνο ὅταν πρόκειται γιὰ κάποια κενὴ θέση μέσα στὸν ἀριθμό, ἔτσι ὥστε νὰ μπορεῖ νὰ γίνεται ἡ διάκριση π.χ., μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $1, 0, 30 = 3630$ καὶ $1, 30 = 90$.

Περισσότερα γιὰ τὸ ἀριθμητικὸ σύστημα τῶν Βαβυλωνίων προκύπτουν ἀπὸ πίνακες ὅπως εἶναι ὁ πίνακας τῆς Εἰκόνας 2, ὅπου ἔχει γίνει ἡ μετατροπὴ στὴν δική μας γραφή.

Στ. I	Στ. II	Στ. I	Στ. II	Στ. I	Στ. II
2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1,6,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

Εἰκόνα 2

Πίνακες τοῦ παραπάνω τύπου συναντοῦμε στὴν ἀρχαία ἐποχὴ τῆς Βαβυλῶνος καθὼς καὶ στὴν ἐποχὴ τῶν Σελευκιδῶν ἡ ὁποία ἀρχίζει τὸ 312 π.Χ. στὴν Μεσοποταμία. Ἡ δομὴ τοῦ πίνακος αὐτοῦ γίνεται ἀντιληπτὴ ἂν σὲ κάθε γραμμὴ σχηματίσομε τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν ποὺ ἀνήκουν στὶς στῆλες I καὶ II, ἑρμηνεύοντας αὐτοὺς ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τοῦ πίνακος τῆς Εἰκόνας I. Ἔχομε:

$$2.30 = 60 = 1{,}0$$
$$3.20 = 60 = 1{,}0$$
$$4.15 = 60 = 1{,}0$$
$$5.12 = 60 = 1{,}0$$
$$6.10 = 60 = 1{,}0$$
$$8.(7{,}30) = 60^2 = 1{,}0{,}0 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὶς 30 γραμμὲς τοῦ πίνακα αὐτοῦ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι κάποια θετικὴ δύναμη τοῦ 60. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι στὴν στήλη I δὲν ὑπάρχουν οἱ ἀκέραιοι 7, 11, 13, 17, 19, 23... κλπ. Αὐτὸ ὀφείλεται στὸ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ δὲν εἶναι διαιρέτες τοῦ 60. Ἂν ἕνας ἀκέραιος περιλαμβάνει πρῶτο παράγοντα διάφορο τῶν 2, 3 καὶ 5 τότε δὲν μπορεῖ νὰ διαιρεῖ καμμιὰ δύναμη τοῦ 60. Ἐξάλλου ἂν ἕνας ἀκέραιος δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας ἐκτὸς τῶν 2, 3, καὶ 5 (τοὺς πρώτους δηλαδὴ παράγοντας τοῦ 60) τότε ὑπάρχει μιὰ δύναμις τοῦ 60, ἡ ὁποία εἶναι διαιρετὴ μὲ τὸν ἀκέραιο αὐτό.

Ἀπὸ τὴν μελέτη τοῦ πίνακος τῆς Εἰκόνας 2 προέκυψε ὅτι τὸ γινόμενο τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῶν δύο στηλῶν εἶναι κάποια δύναμις τοῦ 60. Οἱ δυνάμεις ὅμως τοῦ 60 γράφονται, ὅπως εἴδαμε, ὡς μονάδες ἀκολουθούμενες ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μη-

δενικά. Ἔχουμε λ.χ. $60 = 1, 0$ *καὶ* $60^2 = 1, 0, 0$. *Ἐπειδὴ ὅμως στὴν σφηνοειδὴ γραφὴ δὲν ὑπάρχει σύμβολο γιὰ τὸ μηδέν, παρὰ μόνο νοοῦνται κενὲς θέσεις, παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ δυνάμεις τοῦ 60 παριστάνονται στὴν σφηνοειδὴ γραφὴ μὲ τὸ σύμβολο ▽ δηλαδὴ τὸ ἕνα. Ἡ τελευταία αὐτὴ παρατήρηση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ποῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῆς στήλης 2, ἑρμηνευόμενοι καταλλήλως, παριστάνουν ἐπίσης τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης I, διότι γνωρίζομε ὅτι τὸ γινόμενο δύο ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ ἕνα. Ὁ τρόπος ἑρμηνείας τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης 2 γίνεται ἀντιληπτὸς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα δύο παραδείγματα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν ἕκτη καὶ στὴν τριακοστὴ γραμμή.*

α) Στὴν ἕκτη γραμμὴ ἔχομε: 8 *ἐπὶ* $7, 30\,(7.\,60+30=450) = 60^2 = 1,0,0$.

Στὸν ἀριθμὸ 7, 30 τῆς δεύτερης στήλης ἀντιστοιχοῦμε τὸν ἀριθμὸ

$\frac{30}{60^2} + \frac{7}{60} = \frac{1}{8}$ *ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἀντίστροφος ἐκείνου τῆς πρώτης στήλης.*

β) Στὴν τριακοστὴ γραμμὴ ἔχομε:

$$1, 21 \quad \text{ἐπὶ} \quad 44, 26, 40 = 60^4 = 1, 0, 0, 0, 0$$

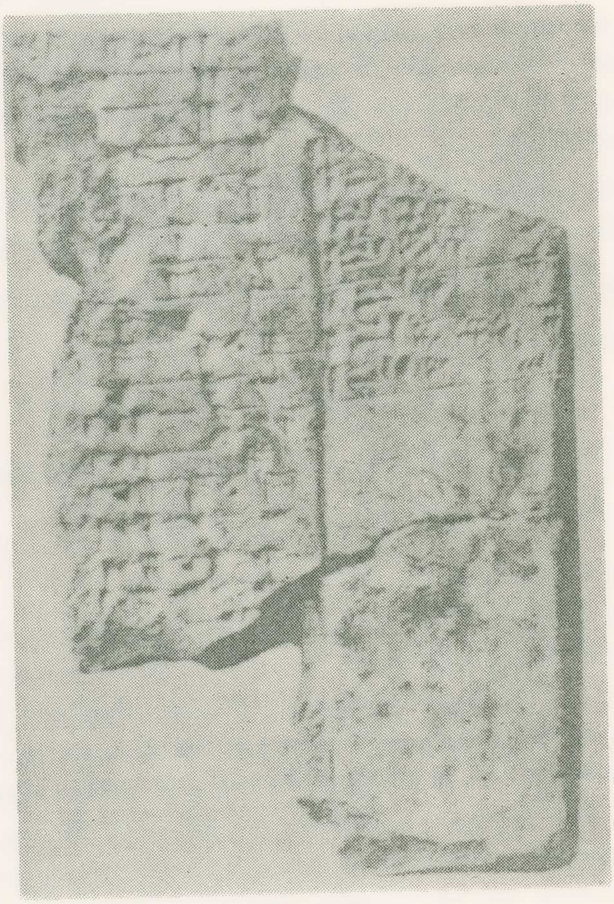
Ἀντιστοιχοῦμε, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο παράδειγμα, στὸν ἀριθμὸ 44, 26, 40 τῆς δεύτερης στήλης τὸν ἀριθμὸ $\frac{44}{60^2} + \frac{26}{60^3} + \frac{40}{60^4} = \frac{1}{81} = \frac{1}{1{,}21}$ *ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ 1, 21 τῆς πρώτης στήλης.*

Ἀναφέραμε προηγουμένως ὅτι ὅταν ἕνα ψηφίο μετακινηθεῖ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τότε ἡ ἀξία του πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 60, ποὺ σημαίνει ὅτι ἂν τὸ ψηφίο μετακινηθεῖ πρὸς τὰ δεξιὰ τότε ἡ ἀξία του διαιρεῖται μὲ τὸ 60. Ἂν τώρα ἡ ἀρχὴ αὐτὴ διατηρηθεῖ καὶ ὅταν ἡ μετακίνηση τοῦ ψηφίου πρὸς τὰ δεξιὰ γίνει καὶ πέραν ἀπὸ τὴν θέση τῶν μονάδων, τότε προκύπτει ἕνα νέο στοιχεῖο: ὅτι ὁρισμένα κλάσματα ἔχουν μιὰ ἁπλὴ γραφὴ στὸ ἀριθμητικὸ σύστημα τῶν Βαβυλωνίων, μιὰ γραφὴ ἀνάλογη μὲ τὴν γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν στὸ δικό μας σύστημα. Ἡ δυνατότητα ὅμως μετακινήσεως ἑνὸς ψηφίου δεξιότερα ἀπὸ τὶς μονάδες συνεπάγεται ὅτι μιὰ ἀκολουθία ὅπως ἡ 1,25, 30, ἡ ὁποία ἐσήμαινε ὅτι παριστάνει τὸν ἀριθμὸ $1.60^2+25.60+30=5130$ *μπορεῖ τώρα νὰ παριστάνει τὸν ἀριθμὸ* 5130.60^{κ} *ὅπου κ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος, θετικός, ἀρνητικός, ἢ μηδέν. Στὴν περίπτωση ποὺ θὰ εἴμαστε βέβαιοι γιὰ τὸ ποιὰ θέση κατέχουν οἱ μονάδες (κάτι ποὺ γίνεται ἀντιληπτὸ ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα) μποροῦμε κατὰ τὴν μετατροπὴ τῆς σφηνοειδοῦς γραφῆς στὴν δική μας, νὰ διαχωρίσομε τὸ κλασματικὸ μέρος ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο μὲ τὸ σύμβολο (;).*

Παράδειγμα: $1{,}25\ ;\ 30 = 1.60 + 25 + \frac{30}{60} = 85\ \frac{1}{2}$.

Θὰ πρέπει καὶ πάλι νὰ τονισθεῖ ὅτι στὸ ἀρχικὸ κείμενο, τὸ γραμμένο στὴν σφηνοειδὴ γραφή, δὲν ὑπάρχει σύμβολο γιὰ τὸ μηδὲν οὔτε ὑπάρχει τὸ σύμβολο(;).

Ἡ παρακάτω Εἰκόνα 3 παριστάνει φωτογραφία πίνακος ἀπὸ τὸ Nippur (Νοτιοανατολικὰ τῆς Βαβυλῶνος).



Εἰκόνα 3

Μιὰ ἔντονη κατακόρυφη γραμμὴ διαιρεῖ τὸν πίνακα σὲ δύο μέρη. Εἰκάζεται ὅτι στὸ ἀριστερὸ μέρος ἔχει ἀναγραφεῖ ἀπὸ τὸν διδάσκοντα ὁ πολλαπλασιαστικὸς πίνακας τοῦ 45. Ἔχομε

45 α-ρὰ 1 45

[α-ρὰ 2] 2,30

[α-ρὰ 3] 2,15

κ.ο.κ.

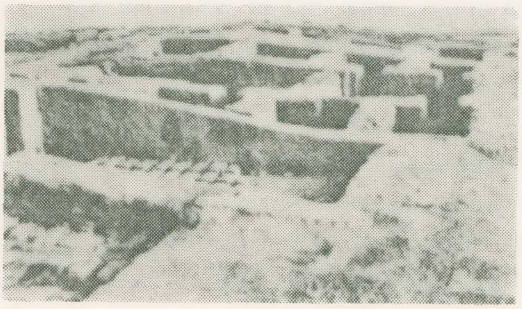
Ἂς σημειωθεῖ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δευτέρας γραμμῆς εἶναι λανθασμένο, διότι δύο φορὲς 45 δὲν ἰσοῦται μὲ 2,30 ἤτοι μὲ 2.60+30= 150 ἀλλὰ μὲ 1,30 ἤτοι μὲ 1.60+30= 90.

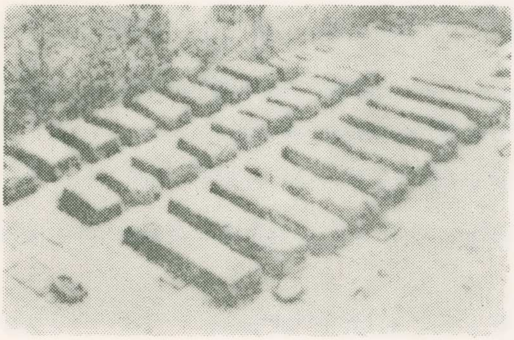
Ἡ λέξη «a-ra» σημαίνει «φορὲς» στὸ κείμενο τοῦ πίνακος.

Τὰ ἐντὸς τῶν ἀγκύλων ἀναγραφόμενα ἔχουν συμπληρωθεῖ ἀπὸ τὸν ἐρευνητή.

Στὸ δεξιὸ μέρος τοῦ πίνακος, ἕνας ἄπειρος μαθητὴς προσπάθησε νὰ ἀντιγράψει αὐτὰ ποὺ ἔγραψε ὁ διδάσκων ἀφήνοντας τὸ ἔργο ἡμιτελές.

Ἡ Εἰκόνα 4 παριστάνει δύο αἴθουσες διδασκαλίας, οἱ ὁποῖες εὑρίσκονται στὴν ἀρχαία Μεσοποταμία, στὰ ἀνάκτορα τῆς πόλης Mari. Ἡ (β) φαίνεται νὰ ἔχει διατηρηθεῖ σὲ καλύτερη κατάσταση ἀπὸ τὴν (α).





Εἰκόνα 4

Ὑπάρχουν ἀρκετὲς ὁμοιότητες μεταξὺ τοῦ δικοῦ μας ἀριθμητικοῦ συστήματος καὶ ἐκείνου τῶν Βαβυλωνίων. Καὶ στὰ δύο συστήματα ἡ μετακίνηση ἑνὸς ψηφίου ἀρι-

στερὰ ἢ δεξιὰ συνεπάγεται τὸν πολλαπλασιασμὸ ἢ τὴν διαίρεση τῆς ἀξίας τοῦ ψηφίου μὲ κάποιο σταθερὸ παράγοντα ὁ ὁποῖος εἶναι 10 στὸ δικό μας σύστημα καὶ 60 στὸ σύστημα τῶν Βαβυλωνίων. Καὶ τὰ δύο συστήματα κάνουν χρήση τῆς ἰδιότητας αὐτῆς γιὰ νὰ ἐκφράσουν ὁρισμένους κλασματικοὺς ἀριθμούς (τοὺς δεκαδικοὺς στὴν περίπτωση τοῦ δικοῦ μας συστήματος).

Οἱ σταθερὲς 10 καὶ 60 καλοῦνται «βάσεις» τοῦ δεκαδικοῦ καὶ τοῦ ἑξηνταδικοῦ συστήματος ἀντιστοίχως. Τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 60 δὲν χαρακτηρίζει τίποτε τὸ ἰδιαίτερο. Τὸ κίνητρο γιὰ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ 10 ὑπῆρξε τὸ πλῆθος τῶν δακτύλων μας τῶν δύο χειρῶν. Γιὰ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ 60 ὡς βάσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος τῶν Βαβυλωνίων ὑπάρχει ἡ ἄποψη ὅτι ἡ βασικὴ μονάδα ζυγίσεως τοῦ ἀργύρου εἶχε ὑποδιαιρεθεῖ σὲ 60 μέρη τὰ λεγόμενα Shekels. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ τὰ δύο κίνητρα ἦταν ἐξωμαθηματικά.

Ἐξάλλου ἀποδεικνύεται πολὺ εὔκολα ὅτι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος α μεγαλύτερος τοῦ 1 μπορεῖ νὰ χρησιμεύσει ὡς βάση ἑνὸς συστήματος, ὅπως εἶναι τὰ παραπάνω δύο ποὺ περιγράψαμε. Σὲ ἕνα τέτοιο σύστημα ἀπαιτοῦνται α τὸν ἀριθμὸ διαφορετικὰ σύμβολα ἢ ψηφία τῶν ὁποίων οἱ κύριες τιμὲς εἶναι 0,1,2,...,α-1. Ἡ μετακίνηση ἑνὸς ψηφίου μία θέση πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ πρὸς τὰ δεξιὰ θὰ συνεπάγεται τὸν πολλαπλασιασμὸ ἢ τὴν διαίρεση τῆς ἀξίας τοῦ ψηφίου μὲ τὸν ἀριθμὸ α ἀντιστοίχως.

Τὸ σύστημα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν περίπτωση α=2 λέγεται δυαδικὸ καὶ παίζει πολὺ σπουδαῖο καὶ πρακτικὸ ρόλο στοὺς Ἠλεκτρονικοὺς Ὑπολογιστές. Ἐδῶ ἔχομε δύο μόνο ψηφία τὸ 0 καὶ τὸ 1. Οἱ δέκα πρῶτοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ στὸ δυαδικὸ σύστημα γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ 1000,\ 1001,\ 1010$$

Γιὰ νὰ μετατρέψομε π.χ. τὸν ἀριθμὸ 1001011 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος σὲ ἀριθμὸ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος παρατηροῦμε ὅτι:

$$1001011 = 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1 = 75.$$

Ἀντιστρόφως ὁ ἀριθμὸς 308 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος γράφεται στὸ δυαδικὸ σύστημα:

$$308 = 1.2^8 + 0.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^1 + 0.2 + 0 = 100110100$$

Ἡ χρησιμοποίηση τοῦ δυαδικοῦ συστήματος στοὺς Ἠλεκτρονικοὺς Ὑπολογιστὲς ὀφείλεται στὸ ὅτι στὸ σύστημα αὐτὸ ὑπάρχουν δύο μόνο σύμβολα κάτι ποὺ ἐναρμονίζεται μὲ τὶς δύο λειτουργίες ποὺ ἔχει ἕνας ἠλεκτρικὸς λαμπτήρας, νὰ εἶναι δηλαδὴ ἢ ἀναμμένος ἢ σβηστός. Ἕνα μειονέκτημα βέβαια τοῦ δυαδικοῦ συστήμα-

τος εἶναι ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ σχοινοτενεῖς. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς $1024=2^{10}$ *γράφεται μὲ ἕνδεκα ψηφία ἤτοι μία μονάδα καὶ δέκα μηδενικά.*

Στὴν συνέχεια παραθέτομε, ἀπὸ ἕνα πίνακα, τὴν ἐκφώνηση καὶ τὴν λύση ἑνὸς προβλήματος, ὅπου φυσικὰ ἔχει γίνει ἡ μετάφραση καὶ ἡ σχετικὴ μετατροπὴ τῆς γραφῆς.

Ἐκφώνηση: Πρόσθεσα τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὰ δύο τρίτα τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου μου καὶ ἔχω 0;35.

Λύση: Παίρνεις τὸ I, τὸν «συντελεστή». Τὰ δύο τρίτα τοῦ I, ὁ συντελεστὴς εἶναι 0;40. Τὸ μισὸ αὐτοῦ, 0;20. Τὸ πολλαπλασιάζεις ἐπὶ τὸν ἑαυτό του καὶ τὸ ἀποτέλεσμα 0;41,40 ἔχει 0;50 τετραγωνικὴ ρίζα. Τὸ 0;20 ποὺ πολλαπλασίασες μὲ τὸν ἑαυτό του τὸ ἀφαιρεῖς ἀπὸ τὸ 0:50 καὶ 0:30 εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ παραπάνω πρόβλημα ἐκφωνεῖ καὶ λύνει τὴν δευτεροβάθμια ἐξίσωση $x^2+(2/3)x=35/60$ *ποὺ ἔχει λύση* $x=1/2$.

Σὲ ἄλλο πίνακα ὑπάρχει τὸ πρόβλημα τοῦ κατὰ προσέγγιση ὑπολογισμοῦ τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου ἀπὸ τὴν πλευρά του, κάτι ποὺ θυμίζει ζωηρὰ τὸ πυθαγόρειο θεώρημα, τὸ ὁποῖο ὅμως ἔκανε τὴν ἐμφάνισή του περίπου 1200 χρόνια ἀργότερα.

Συνοψίζοντας παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀνευρεθέντες πίνακες μᾶς δίνουν μιὰ ἀρκετὰ σαφῆ εἰκόνα τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων. Ἀνακαλύφθηκε ὅτι ἡ βάση τοῦ ἀριθμητικοῦ τους συστήματος ἦταν τὸ 60, διαπιστώθηκε δὲ ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι εἶχαν τὴν ἐρευνητικὴ τάση πρὸς τοὺς κλάδους ἐκείνους τῶν μαθηματικῶν ποὺ σήμερα ὀνομάζομε Ἄλγεβρα καὶ Θεωρία ἀριθμῶν. Τὶς γεωμετρικὲς γνώσεις ποὺ εἶχαν τὶς χρησιμοποιοῦσαν μᾶλλον γιὰ νὰ βοηθηθοῦν στὴν λύση ἀλγεβρικῶν προβλημάτων. Στὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων δὲν ὑπάρχει οὔτε ἕνα παράδειγμα θεωρήματος μὲ τὴν σημερινὴ ἔννοια τῆς λέξεως, πουθενὰ δὲ δὲν συναντᾶ κανεὶς ἀπόδειξη κάποιας προτάσεως.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομε ὅτι, στὴν ἐποχὴ τῶν Βαβυλωνίων, ὁ τρόπος μεταδόσεως τῆς γνώσεως ἀπὸ γενεᾶς σὲ γενεὰ ἦταν τελείως διαφορετικὸς ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ ἀκολουθοῦν τὰ σύγχρονα μαθηματικά. Ἐνδεικτικὸ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς ἀποτελεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι συνήθιζαν νὰ λύνουν πάμπολλα προβλήματα τοῦ ἰδίου εἴδους (π.χ. ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ποικίλους συντελεστές) χωρὶς νὰ ἐπιχειροῦν νὰ ἀποδείξουν ἕνα γενικὸ θεώρημα τὸ ὁποῖο θὰ τοὺς ἐπέτρεπε νὰ λύσουν ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ ἰδίου εἴδους (ὅλες τὶς ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ) μιὰ καὶ καλή.

Μέχρι στιγμῆς προσπαθήσαμε νὰ δώσομε μιὰ γενικὴ εἰκόνα τῆς φύσεως τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων. Ἂς ἀναφερθοῦμε τώρα ἐν συντομίᾳ καὶ στὸ περιεχόμενο τῶν μαθηματικῶν αὐτῶν. Στὴν Ἄλγεβρα, εἴδαμε ὅτι ἐγνώριζαν τὸν τρόπο λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ. Οἱ ἐκφωνήσεις καθὼς καὶ οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων δίνονταν (ὅπως εἴδαμε στὸ παραπάνω παράδειγμα) μὲ τρόπο περιγραφικό, μὲ λέξεις μόνο, ἔτσι ὥστε ὅταν αὐτὲς γραφοῦν στὴν σύγχρονη ἀλγεβρικὴ μορφὴ προκύπτουν πολὺ πολύπλοκες παραστάσεις (ἀλλεπάλληλες παρενθέσεις, ἀγκύλες κλπ.). Αὐτὸ δείχνει ὅτι χρειάζονταν πολὺ μεγάλη ἐμπειρία γιὰ νὰ λυθεῖ μιὰ ἐξίσωση χωρὶς τὴν βοήθεια τῆς τεχνικῆς ποὺ διαθέτει ἡ σημερινὴ ἄλγεβρα.

Ἕνα κείμενο, ποὺ δημοσιεύθηκε τὸ 1945, καὶ ποὺ εὑρίσκεται στὸν Πίνακα 322, στὴν συλλογὴ Plimpton τοῦ Columbia University τῆς Νέας Ὑόρκης, εἶναι ἐνδεικτικὸ τοῦ ὑψηλοῦ ἐπιπέδου τῆς μαθηματικῆς σκέψης τῶν Βαβυλωνίων. Πρόκειται γιὰ τὸ ἑξῆς θέμα:

Μιὰ τριάδα ἀκεραίων ἀριθμῶν ὅπως εἶναι ἡ 3,4,5 ἢ ἡ 5,12,13 λέγεται «πυθαγόρειος τριάδα ἀριθμῶν» διότι παριστάνει τὰ μήκη τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι δηλαδὴ ἡ λύση σὲ θετικοὺς ἀκεραίους Χ,Ψ,Ζ, τῆς ἐξισώσεως $X^2 + \Psi^2 = Z^2$.

Εἶναι φυσικὸ νὰ ἐρωτήσει κανεὶς πόσες τέτοιες τριάδες ὑπάρχουν καὶ πῶς αὐτὲς μποροῦν νὰ προσδιορισθοῦν. Ἀναγνωρίζεται εὔκολα ὅτι ξεκινώντας ἀπὸ ὁποιαδήποτε πυθαγόρεια τριάδα, π.χ. τὴν 3,4,5 μποροῦμε νὰ κατασκευάσομε ἄπειρες πυθαγόρειες τριάδες τὶς $3\nu, 4\nu, 5\nu$ *ὅπου* $\nu = 2, 3, \ldots$ *Θεωροῦμε ὅλες αὐτὲς τὶς τριάδες ὡς μία τριάδα, τὴν δὲ τριάδα ἀπὸ τὴν ὁποία αὐτὲς προέκυψαν, δηλαδὴ τὴν 3,4,5, καλοῦμε «ἀνηγμένη πυθαγόρεια τριάδα ἀριθμῶν». Τὸ ἀκόλουθο θεώρημα εἶναι γνωστό.*

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἂν p καὶ q εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ τέτοιοι ὥστε $p > q$, *καὶ ἂν ἀμφότεροι δὲν εἶναι περιττοὶ τότε οἱ σχέσεις,* $X = p^2 - q^2$, $\Psi = 2pq$, $Z = p^2 + q^2$ *παρέχουν ὅλες τὶς ἀνηγμένες πυθαγόρειες τριάδες ἀριθμῶν, τὴν κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς μόνο μιὰ φορά.*

Παραδείγματα:

Γιὰ $p=2$, $q=1$ *ἔχομε* $X=3$, $\Psi=4$, $Z=5$

Γιὰ $p=3$, $q=2$ *ἔχομε* $X=5$, $\Psi=12$, $Z=13$

Στὸν Πίνακα 322 τῆς συλλογῆς Plimpton ἀναφέρονται, σὲ δεκαπέντε γραμμές, τιμὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἐκφράσεις Z^2/Ψ^2, X, Z: *ὅπου* X, Ψ, Z *εἶναι ἀνηγμένες πυθαγόρειες τριάδες ἀριθμῶν.*

Εἰκάζεται ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι πρέπει νὰ ἐγνώριζαν κάτι σχετικὸ μὲ τὸ παραπάνω θεώρημα, διότι οἱ τριάδες ποὺ ἀναφέρονται στὸν πίνακα αὐτὸν ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολὺ μεγάλους ἀριθμοὺς ὥστε νὰ ἀποκλείεται ἡ εὕρεσή τους μὲ πολλαπλὲς δοκιμές. Δυστυχῶς ἕνα κομμάτι ἀπὸ τὸ ἀριστερὸ μέρος τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος λείπει καὶ αὐτὸ ἐμποδίζει νὰ γνωρίσομε τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο κατασκευάσθηκε ὁ πίνακας αὐτός.

Τὰ παραπάνω ἀποτελοῦν μιὰ περιληπτικὴ περιγραφὴ τοῦ περιεχομένου τῶν μαθηματικῶν τῶν Βαβυλωνίων.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ εἶναι εὔλογο νὰ τεθεῖ τὸ ἐρώτημα: Σὲ ποιό βαθμὸ ἀναπτύξεως εὑρίσκονταν, τὴν ἴδια ἐποχή, τὰ μαθηματικὰ στὴν Αἴγυπτο;

Ὑπάρχουν δύο μαθηματικοὶ πάπυροι (τοῦ Rhind καὶ τῆς Μόσχας) οἱ ὁποῖοι μᾶς παρέχουν μιὰ γενικὴ ἰδέα τοῦ χαρακτῆρος καὶ τοῦ περιεχομένου τῶν μαθηματικῶν τῶν Αἰγυπτίων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Ἀντίθετα μὲ τοὺς θρύλους ποὺ ἔχουν ἐπικρατήσει, φαίνεται ὅτι τὰ μαθηματικὰ τῶν Αἰγυπτίων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης παρέμειναν στὴν πιὸ στοιχειώδη βαθμίδα.

Οἱ γεωμετρικὲς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων, ἂν βέβαια οἱ πάπυροι ἑρμηνεύονται σωστά, ἦταν περίπου οἱ ἴδιες μὲ ἐκεῖνες τῶν Βαβυλωνίων, μὲ μιὰ ἐξαίρεση: αὐτὰ ποὺ ἀναφέραμε σχετικὰ μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα καὶ τὶς ἀνηγμένες πυθαγόρειες τριάδες. Ἀκόμα καὶ αὐτὸ ποὺ συνήθως ἀποδίδεται στοὺς Αἰγυπτίους, ὅτι ἐγνώριζαν ὅτι τὸ τρίγωνο μὲ πλευρὲς 3,4,5 εἶναι ὀρθογώνιο, δὲν φαίνεται νὰ προκύπτει ἀπὸ τὰ ὑπάρχοντα στοιχεῖα.

Τελειώνοντας θὰ ἤθελα νὰ τονίσω ὅτι οἱ πρόσφατες αὐτὲς νέες ἀνακαλύψεις οἱ σχετικὲς μὲ τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων βοηθοῦν νὰ δοῦμε ποιά ὑπῆρξε ἡ ἐπίδρασή τους στὰ μαθηματικὰ τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐμπλουτίζουν σὲ μεγάλο βαθμὸ τὶς ἱστορικὲς καὶ ἐπιστημονικές μας γνώσεις, καὶ ὅπως θὰ διαπιστώσομε στὸ δεύτερο μέρος τῆς ὁμιλίας, μᾶς κάνουν νὰ κατανοήσομε καλύτερα τὸ ἀδιάσειστο καὶ παγκοσμίως δεκτὸ γεγονὸς ὅτι οὐσιαστικὰ τὰ μαθηματικὰ ξεκίνησαν ἀπὸ τοὺς Ἀρχαίους Ἕλληνες.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Τὰ μαθηματικὰ τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων

Οἱ δυσκολίες ποὺ ἀντιμετωπίζουν οἱ ἐρευνητὲς στὴν προσπάθειά τους νὰ δημιουργήσουν μιὰ στερεὴ καὶ ἀξιόπιστη βάση γιὰ τὴν μελέτη τῶν μαθηματικῶν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων διαφέρουν τελείως ἀπὸ ἐκεῖνες ποὺ συναντοῦν γιὰ τὰ μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων. Στὴν δεύτερη περίπτωση τὰ κείμενά τους, δηλαδὴ οἱ πίνακες ποὺ προέκυψαν ἀπὸ τὶς ἀνασκαφές, μπορεῖ νὰ εἶναι σπασμένοι ἢ μερικῶς κατεστραμμένοι ἡ δὲ ὁρολογία νὰ εἶναι ἀσαφὴς καὶ κατανοητὴ μόνο ἀπὸ τὴν μελέτη τοῦ ὅλου κειμένου, ὅμως κάτι ποὺ δὲν ἐπιδέχεται καμμία ἀμφιβολία εἶναι ὅτι ἔχομε στὴν διάθεσή μας τὰ αὐθεντικὰ κείμενα, ἤτοι τοὺς πίνακες ποὺ οἱ ἴδιοι οἱ Βαβυλώνιοι ἐχάραξαν.

Ἂς θεωρήσομε τώρα τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, τὸ μνημειῶδες καὶ τεραστίας σημασίας καὶ ἐνδιαφέροντος ἔργο τοῦ Εὐκλείδη, ὅπου θὰ φανεῖ ἡ διαφορὰ τῶν δυσκολιῶν ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω.

Ἂν καὶ τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ γράφτηκαν περίπου τὸ 300 π.Χ., τὰ παλαιότερα χειρόγραφα ποὺ περιλαμβάνουν τὸ ἑλληνικὸ κείμενο εἶναι τοῦ 10ου αἰῶνος μ.Χ., εἶναι δηλαδή, αὐτά, χρονικὰ πλησιέστερα σὲ ἐμᾶς παρὰ στὸν Εὐκλείδη. Ὑπάρχουν μικρὰ τεμάχια παπύρων ἀπὸ τὸν πρῶτο αἰώνα μ.Χ. τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν μέρη τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ὅμως αὐτὰ εἶναι τόσο λίγα καὶ τόσο μικρὰ πού, ἂν καὶ δὲν παύουν νὰ εἶναι πολύτιμα, δὲν δίνουν τὴν ὅλη εἰκόνα τοῦ ἔργου.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι ἀκόμα καὶ τὰ παλαιότερα χειρόγραφα ποὺ διαθέτομε εἶναι ἀντίγραφα ἀντιγράφων ἄλλων ἀντιγράφων κ.ο.κ., ἀπομένει δὲ ἀπὸ τὰ ἀντίγραφα αὐτὰ καὶ μόνο, νὰ μπορέσομε νὰ ἀνασυνθέσομε τὸ ἔργο τοῦ Εὐκλείδη. Οἱ ἐπιστήμονες ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὰ θέματα αὐτὰ ἀνέπτυξαν τεχνικὲς ἀρκετὰ ἐκλεπτυσμένες γιὰ νὰ ὑπερνικήσουν τὶς δυσκολίες αὐτές. Σὲ γενικὲς γραμμὲς ἡ διαδικασία ποὺ ἀκολουθεῖται εἶναι ἡ ἑξῆς:

Συγκρίνομε δύο χειρόγραφα, τὰ Α καὶ Β. Ἂν τὸ Β περιλαμβάνει, ἐκτὸς ἀπὸ ὅλα τὰ λάθη καὶ τὶς ἰδιομορφίες τοῦ Α καὶ ἄλλα ἐπὶ πλέον λάθη, τότε εἶναι λογικὸ νὰ ὑποθέσομε ὅτι τὸ Β εἶναι ἕνα ἀντίγραφο ἢ ἀντίγραφο ἀντιγράφου. Ἂν τὰ Α καὶ Β ἔχουν ἕνα ἀριθμὸ λαθῶν ἀπὸ κοινοῦ, ἔχει δὲ τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ μερικὰ λάθη τὰ ὁποῖα τὸ ἄλλο δὲν ἔχει, τότε ὑπάρχει πιθανότης τὰ χειρόγραφα αὐτὰ νὰ προέκυψαν ἀπὸ τὸ ἴδιο ἀρχέτυπο, τὸ ὁποῖο ἂν ἔχει χαθεῖ μπορεῖ νὰ ἀνασυνταχθεῖ. Κατὰ τὸν τρόπο αὐτὸ τὰ σωζόμενα χειρόγραφα ταξινομοῦνται κατὰ οἰκογένειες ὅπου κάθε οἰ-

κογένεια ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ ἕνα ἀρχέτυπο, τὸ δὲ τελικὸ κείμενο συντάσσεται βάσει τῶν ἀρχετύπων αὐτῶν.

Ὁ ἀσχολούμενος μὲ τὴν κριτικὴ τῶν κειμένων ποὺ συντάσσονται μὲ τὴν παραπάνω μέθοδο, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ὅτι ὀφείλει νὰ εἶναι γνώστης τῆς γλώσσας καὶ τοῦ ἀντικειμένου μὲ τὸ ὁποῖο ἀσχολεῖται τὸ χειρόγραφο, πρέπει ἐπιπλέον νὰ ἔχει καὶ ἄλλες ἱκανότητες ὅπως π.χ. νὰ γνωρίζει τὴν ἱστορία τῆς γλώσσας καὶ τοῦ ὕφους τῶν γραφικῶν χαρακτήρων, καὶ νὰ εἶναι ἐνήμερος τῶν παλαιοτέρων ὑπαρχουσῶν κριτικῶν ἐπὶ τοῦ κειμένου. Ἂς σημειωθεῖ πάντως ὅτι εἶναι εὐκολότερο νὰ ἀνασυνθέσει κανεὶς ἕνα μαθηματικὸ κείμενο παρὰ ἕνα φιλολογικό. Παράδειγμα σχετικὸ ἀποτελοῦν οἱ ἀκόλουθες δύο φράσεις:

«Αἱ παρὰ τὴν ... ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίες εἶναι ἴσαι».

«Σφοδροὶ ἄνεμοι τοῦ Μάη κατέστρεψαν ... τοῦ χωριοῦ».

Η πρώτη συμπληρώνεται εὔκολα ἐνῶ γιὰ τὴν δεύτερη ὑπάρχουν δυσκολίες.

Ὁ Δανὸς ἐρευνητὴς L. J. Heiberg, ὁ ὁποῖος μὲ τὴν ἀπαράμιλλη ἐργατικότητά του μᾶς ἐξασφάλισε τὶς τελικὲς ἐκδόσεις τῶν περισσοτέρων ἐκ τῶν ἀρχαίων κειμένων, διεπίστωσε ὅτι τὰ σωζόμενα χειρόγραφα τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ τοῦ Εὐκλείδη διακρίνονται σὲ δύο οἰκογένειες. Ὅλα τὰ χειρόγραφα, ἐκτὸς ἀπὸ ἕνα, προέρχονται ἀπὸ μία καὶ τὴν αὐτὴ ἔκδοση, ἐκείνη τοῦ Θέωνος, μαθηματικοῦ ἐξ Ἀλεξανδρείας, πολυάσχολου ἐκδότη καὶ κριτικοῦ τοῦ 4ου αἰῶνος μ.Χ. Μόνο ἕνα ἀντίγραφο φαίνεται νὰ προέκυψε ἀπὸ κάποιο ἄλλο κείμενο μὲ τὸ ὁποῖο δὲν εἶχε ἀσχοληθεῖ ὁ Θέων.

Ἔχοντας αὐτά, καθὼς καὶ πολλὰ ἄλλα, ὑπόψη ὁ Heiberg ἐπέτυχε νὰ συνθέσει ἕνα ἀξιόπιστο κείμενο τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ τοῦ Εὐκλείδη, τὸ ὁποῖο δημοσιεύθηκε μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1833 καὶ 1888. Ἡ ἔκδοση αὐτὴ χρησίμευσε ὡς βάση γιὰ μέλλουσες ἔρευνες καὶ μεταφράσεις τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ὅπως π.χ. εἶναι ἡ ἀγγλικὴ ἔκδοση τοῦ T. L. Heath.

Ὅμως τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ τοῦ Εὐκλείδη ἦταν γνωστὰ στὸν δυτικὸ κόσμο πολὺ πρὶν νὰ κάνει τὴν ἐμφάνισή της ἡ ἔκδοση τοῦ Heiberg. Ἤδη ἐπὶ τῆς βασιλείας τοῦ Χαλίφη Harun Al-Rashid (786-809) (γνωστοῦ στὴν Δύση ἀπὸ τὸ ἔργο «Χίλιες καὶ μιὰ νύχτες») τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ εἶχαν μεταφρασθεῖ στὴν ἀραβικὴ ἀπὸ τὸν al-Hajjaj. Τὴν ἔκδοση αὐτὴ ἀκολούθησαν καὶ ἄλλες ἀραβικὲς ἐκδόσεις ἐκ τῶν ὁποίων ἄλλες μὲν εἶχαν δραστικὰ συντομεύσει τὸ ὅλο κείμενο, ἐνῶ ἄλλες τὶς χαρακτηρίζει ἐλεύθερη μετάφραση, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀρκετὰ ἀπὸ τὸ ἑλληνικὸ κείμενο.

Τὸν 12ο αἰώνα μερικὲς ἀπὸ τὶς ἀραβικὲς ἐκδόσεις εἰσήχθησαν στὴν Εὐρώπη σὲ λατινικὲς μεταφράσεις (Adelard, Gerard τῆς Cremona) ἄλλες δέ, ἐπίσης λατινικὲς μεταφράσεις, ἐμφανίσθηκαν κατὰ τὸν 13ο καὶ 14ο αἰώνα.

Τὸ 1482 δημοσιεύθηκε ἡ πρώτη τυπωμένη ἔκδοση τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ (μετάφραση Campanus ἀπὸ τὴν ἀραβικὴ στὴν λατινική), ἡ δὲ πρώτη μετάφραση ἀπὸ τὴν ἑλληνικὴ στὴν λατινικὴ (τοῦ Lamberti) ἔκανε τὴν ἐμφάνισή της τὸ 1505.

Ἕνα ἑλληνικὸ κείμενο τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ τυπώθηκε τὸ 1533.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ γεγονότα ἀκολουθοῦν τὴν ἑξῆς σειρά.

Κατὰ πρῶτον ἔχομε μεταφράσεις τὸν 9ο αἰώνα ἀπὸ τὰ ἑλληνικὰ στὴν ἀραβική. Ἀκολουθεῖ ἡ λατινοποίηση τῶν ἀραβικῶν κειμένων τὸν 12ο αἰώνα (εἶναι ἡ ἐποχὴ τῶν Σταυροφοριῶν κατὰ τὴν ὁποία οἱ ἐπαφὲς μεταξὺ χριστιανῶν καὶ μωαμεθανῶν δὲν ἦταν πάντα αἱματηρές). Ἀργότερα, κατὰ τὸ τέλος τοῦ 15ου αἰώνα, ἔχομε τὴν ἐκτύπωση τῶν λατινικῶν κειμένων τὴν ὁποία ἀμέσως ἀκολουθοῦν ἡ μετάφραση κειμένων ἀπὸ τὴν ἑλληνικὴ στὴν λατινικὴ καθὼς καὶ ἡ ἐμφάνιση τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου (εἴμαστε πιὰ στὴν Ἀναγέννηση) καὶ τελικὰ ἔχομε τὴν ὁριστικὴ ἔκδοση τοῦ ἑλληνικοῦ κειμένου τὸ δεύτερο ἥμισυ τοῦ 19ου αἰώνα.

Αὐτὴ εἶναι περίπου καὶ ἡ ἱστορία ὅλων σχεδὸν τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν κειμένων καὶ εἶναι ἐνδεικτικὴ τῶν προτιμήσεων καὶ τῶν ἐνδιαφερόντων ποὺ ὑπῆρχαν κατὰ τὶς διάφορες ἐκεῖνες ἐποχές. Ὑπάρχουν βέβαια καὶ παρεκκλίσεις ἀπὸ τὴν παραπάνω πορεία, ὅπως π.χ. εἶναι μερικὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδη καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, τῶν ὁποίων, ἔργων, διατηρήθηκαν μόνο ἐκδόσεις στὴν ἀραβική. Ἐπίσης μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν καὶ μερικὲς παρεκκλίσεις ἀπὸ τὶς ἀναφερθεῖσες χρονολογίες.

Τὰ Ἑλληνικὰ Μαθηματικὰ πρὶν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη

Οἱ γνώσεις μας καθὼς καὶ ἡ ἀξιολόγηση τῶν μαθηματικῶν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων βασίζονται κυρίως στὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Εὐκλείδη τοῦ Ἀρχιμήδη καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου. Καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ μαθηματικοὶ ἔζησαν καὶ ἤκμασαν μέσα σὲ ἕνα διάστημα περίπου ἑκατὸ ἐτῶν ποὺ ἀκολουθεῖ τὸν θάνατο τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου τὸ 323 π.Χ., ἤτοι ὁ Εὐκλείδης περίπου τὸ 300 π.Χ., ὁ Ἀρχιμήδης περίπου ἀπὸ τὸ 287 μέχρι τὸ 212 π.Χ., καὶ ὁ Ἀπολλώνιος περίπου τὸ 200 π.Χ.

Ὁ Ἀπολλώνιος, ὁ ὁποῖος γεννήθηκε στὴν Πέργη τῆς Μ. Ἀσίας (νότια παράλια) καὶ ὁ Εὐκλείδης, ἐργάσθηκαν στὴν Ἀλεξάνδρεια, ὁ δὲ Ἀρχιμήδης ἐργάσθηκε στὶς Συρακοῦσες τῆς Σικελίας, ὅπου καὶ τὸν σκότωσαν κατὰ τὴν λεηλασία τῆς πόλεως ἀπὸ τοὺς Ρωμαίους.

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικὰ ἔφθασαν στὸ ἀποκορύφωμά τους κατὰ τοὺς ἑλληνιστικοὺς χρόνους, ὅπως ἀποκαλεῖται ἡ μετὰ τὸν θάνατο τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου ἐποχή.

Εἶναι ὅμως γνωστὸ ὅτι τὰ ἑλληνικὰ μαθηματικὰ ἄρχισαν νὰ ἀναπτύσσονται *περίπου 300 χρόνια ἐνωρίτερα. Ἡ ἔρευνα τῆς καταστάσεως ποὺ ἐπικρατοῦσε πρὶν ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Εὐκλείδη ἀποτελεῖ ἕνα ἀκανθῶδες πρόβλημα καὶ τοῦτο διότι, ἂν ἐξαιρέσομε κάποια ἀστρονομικὴ ἐργασία ποὺ ἀποδίδεται στὸν Αὐτόλυκο (330 π.Χ. ἐκ Πιτάνης Αἰολίδος) κανένα ἄλλο πλῆρες μαθηματικὸ κείμενο τῆς ἐποχῆς ἐκείνης δὲν διασώθηκε.*

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ τοῦ Εὐκλείδη εἶναι τὸ παλαιότερο πλῆρες μαθηματικὸ σύγγραμμα ποὺ διαθέτομε σήμερα. Στὸ ἔργο του αὐτὸ ὁ Εὐκλείδης ἐνσωματώνει, ταξινομεῖ καὶ παρουσιάζει μὲ τρόπο ἀξιοθαύμαστο ὅλη τὴν μέχρι τότε κτηθεῖσα μαθηματικὴ γνώση. Ἡ ἀρτιότητα ποὺ παρουσιάζει τὸ ἔργο καθιστᾶ ὀλιγότερο ἐπιτακτικὴ τὴν ἀναδρομὴ σὲ ἄλλες ἱστορικὲς πηγὲς ἐπὶ τοῦ θέματος. Ἡ ἔρευνα ἀναφορικὰ μὲ τὰ μαθηματικὰ τῆς πρὸ τοῦ Εὐκλείδη ἐποχῆς συνεχίζεται μέχρι σήμερα.

Ἀναφερόμενοι πάντοτε στὴν προευκλείδεια ἐποχή, πρέπει νὰ τονίσομε ὅτι ἡ Γεωμετρία εἰσῆλθε στὸ κύριο στάδιο τῆς ἀνάπτυξής της περὶ τὸ 600 π.Χ. Ὁμόφωνα ὅλοι οἱ ἱστορικοὶ τῶν μαθηματικῶν ἀποδίδουν τὴν ἀνάπτυξη αὐτὴ στοὺς Ἕλληνες τῆς ἐποχῆς ἐκείνης μὲ πρωτεργάτη τὸν Θαλῆ τὸν Μιλήσιο, ἕνα ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος, ὁ ὁποῖος εἶχε ζήσει πολλὰ χρόνια στὴν Αἴγυπτο. Ὁ Θαλῆς εἶναι τὸ πρῶτο ἄτομο τὸ ὁποῖο ἐπωνύμως ἀναφέρει ἡ Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν, καὶ ὁ ὁποῖος εἰσήγαγε τὴν ἀποδεικτικὴ μέθοδο στὴν Γεωμετρία, κάτι ποὺ ἀποτελεῖ μία «κορυφαία στιγμὴ στὴν Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν».

Καὶ ἐδῶ γεννᾶται τὸ ἐρώτημα: Γιατί ἀπὸ ὅλους τοὺς λαοὺς τῆς ἀρχαιότητας οἱ Ἕλληνες ἦταν ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι ἀπεφάσισαν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ ἀποτελέσματα πρέπει νὰ διασφαλίζονται μὲ κάποια λογικὴ ἀπόδειξη καὶ ὅτι ἡ πειραματικὴ ἐπαλήθευση αὐτῶν δὲν εἶναι ἀρκετή;

Ἡ ἀναφορὰ στὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενο «Ἑλληνικὸ μυστήριο».

Ἡ συνήθης ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα εἶναι ὅτι τὸ γεγονὸς αὐτὸ ὀφείλεται στὴν ἰδιότυπη διανοητικὴ δομὴ τοῦ Ἕλληνα σχετικὰ μὲ τὴν φιλοσοφικὴ ἔρευνα. Στὴν φιλοσοφία ἐνδιαφέρει, ξεκινώντας ἀπὸ ὁρισμένες ὑποθέσεις, νὰ καταλήγομε μετὰ βεβαιότητας σὲ σαφῆ καὶ συγκεκριμένα συμπεράσματα. Ὅμως ἡ ἐμπειρικὴ μέθοδος παρέχει μόνο κάποιο μέτρο πιθανότητας ὡς πρὸς τὴν ὀρθότητα ἑνὸς δοθέντος ἀποτελέσματος. Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ἀποδεικτικὴ λογικὴ ἀποτελεῖ ἀπαραίτητο ὄργανο τοῦ φιλοσόφου, ἦταν φυσικὸ οἱ Ἕλληνες νὰ προτιμήσουν αὐτὴν καὶ στὴν μελέτη τῆς Γεωμετρίας.

Μιὰ δεύτερη ἑρμηνεία τοῦ «Ἑλληνικοῦ μυστηρίου» ἔχει τὶς ρίζες της στὴν «λατρεία τοῦ ὡραίου» ποὺ διακρίνει τὸν Ἕλληνα, κάτι ποὺ εἶναι ὁλοφάνερο στὴν Τέχνη, στὴν Λογοτεχνία, στὴν Γλυπτικὴ καὶ στὴν Ἀρχιτεκτονική. Βεβαίως ἡ ἀξιολόγηση τοῦ κάλλους ἀποτελεῖ μιὰ διανοητικὴ καὶ συγκινησιακὴ ἐμπειρία, ἀπὸ δὲ τῆς σκοπιᾶς αὐτῆς ἡ τάξη, ἡ συνέπεια, ἡ πληρότητα καὶ ἡ πειστικότητα ποὺ διακρίνουν τὴν ἀποδεικτικὴ διαδικασία εἶναι ἄκρως ἱκανοποιητικά.

Ὅμως ὅποια καὶ ἂν εἶναι ἡ ἑρμηνεία τοῦ «Ἑλληνικοῦ μυστηρίου» εἶναι παγκοίνως παραδεκτὸ ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἦταν αὐτοὶ ποὺ μετέτρεψαν τὴν Γεωμετρία σὲ κάτι τελείως διαφορετικὸ ἀπὸ μιὰ συλλογὴ ἐμπειρικῶν κανόνων ὅπως τοὺς εἶχαν κληρονομήσει ἀπὸ τοὺς προγενέστερους.

Ἡ μετατροπὴ αὐτὴ ὀφείλεται στὴν εἰσαγωγὴ τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου, χωρὶς αὐτὸ νὰ σημαίνει ὅτι διέγραψαν τελείως τὶς πειραματικὲς προκαταρκτικὲς μαθηματικὲς μεθόδους, οἱ ὁποῖες εἶναι τόσο ἀναγκαῖες.

Ἡ περίοδος ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν, ἡ ὁποία ἄρχισε ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Θαλῆ, συνεχίσθηκε ἐπὶ ἑκατὸν πενήντα περίπου χρόνια. Ἔχουμε ἐδῶ τὸν Πυθαγόρα τὸν Σάμιο (530 π.Χ.) καὶ τοὺς Πυθαγορείους. Δὲν θὰ ἦταν ἄσκοπο νὰ σᾶς ὑπενθυμίσω μερικὰ πράγματα σχετικὰ μὲ τὸν Πυθαγόρα καὶ τὴν μυστικὴ ἀδελφότητά του.

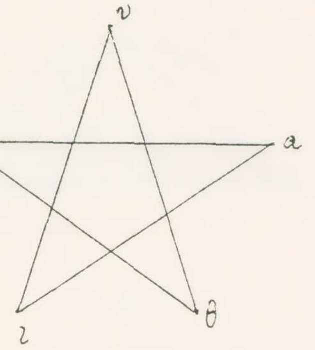
Ὁ Πυθαγόρας εἶναι τὸ δεύτερο πρόσωπο τὸ ὁποῖο ἀναφέρει ἐπωνύμως ἡ Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν. Γεννήθηκε στὴν Σάμο ποὺ δὲν ἀπέχει πολὺ ἀπὸ τὴν Μίλητο τὴν πατρίδα τοῦ Θαλῆ, κάτι ποὺ δὲν ἀποκλείει νὰ ὑπῆρξε καὶ μαθητής του. Ὁ Πυθαγόρας ταξίδεψε ὅπως καὶ ὁ Θαλῆς καὶ παρέμεινε στὴν Αἴγυπτο, ἐν συνεχείᾳ δὲ πῆγε στὶς Ἰνδίες. Ὅταν μετὰ δύο χρόνια ἐπέστρεψε ἀπὸ τὰ ταξίδια του ἐγκαταστάθηκε στὸν Κρότωνα τῆς Ἰταλίας διότι ἡ μὲν Σάμος εὑρίσκετο ὑπὸ τὴν τυραννία τοῦ Πολυκράτη τὸ δὲ μεγαλύτερο μέρος τῆς Ἰωνίας ἦταν ὑπὸ τὴν κατοχὴ τῶν Περσῶν.

Στὸν Κρότωνα ἵδρυσε τὴν περίφημη Σχολή του, ὅπου ἐκτὸς ἀπὸ τὴν μελέτη τῶν μαθηματικῶν, τῆς φιλοσοφίας καὶ τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, ἀναπτύχθηκε μιὰ κλειστὴ ἀδελφότητα μὲ μυστικὲς τυπικὲς ἱεροτελεστίες. Ἡ ἀδελφότητα αὐτὴ ἔφτασε στὸ σημεῖο νὰ ἀποκτήσει τόσο μεγάλη ἰσχὺ καὶ ἀριστοκρατικὲς τάσεις ὥστε οἱ δημοκρατικὲς δυνάμεις τῆς νοτίου Ἰταλίας κατέστρεψαν τὰ κτίρια ὅπου ἐστεγάζετο ἡ Σχολὴ καὶ ἐπεχείρησαν νὰ διαλύσουν τὴν ἀδελφότητα. Ὁ ἴδιος ὁ Πυθαγόρας κατέφυγε στὸ Μεταπόντιον ὅπου καὶ ἀπέθανε σὲ ἡλικία 75 ἢ 80 ἐτῶν, κατ' ἄλλους δὲ νεώτερος. Ἡ Πυθαγόρειος ἀδελφότητα διατηρήθηκε τουλάχιστον γιὰ δύο ἀκόμα αἰῶνες.

Ὁ Πυθαγόρας εἶχε χωρίσει τὸ ἀκροατήριό του στοὺς ἁπλοὺς ἀκροατὲς ἢ τοὺς «πυθαγορείους» καὶ στοὺς μαθηματικοὺς ἢ τοὺς «πυθαγορικούς». Οἱ πυθαγόρειοι μποροῦσαν μετὰ τριετίαν νὰ μυηθοῦν σὲ πυθαγορικούς, ὁπότε τοὺς ἀπεκαλύπτοντο οἱ κυριώτερες ἀνακαλύψεις ποὺ εἶχε κάνει ἡ Σχολή.

Ἕνα ἀπὸ τὰ σύμβολα ἀναγνωρίσεως, μεταξὺ τῶν πυθαγορικῶν, ἦταν κατὰ πληροφορίες ποὺ δίνει ὁ Ἰάμβλιχος (νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος ἐκ Συρίας, τοῦ 3ου μ.Χ.

αἰώνα) «τὸ τριπλοῦν τρίγωνον» *τὸ ὁποῖο ἐθεωρεῖτο ὡς τὸ σύμβολο τῆς ὑγείας. Στὶς πέντε γωνίες τοῦ συμβόλου αὐτοῦ ἀναγράφονται τὰ γράμματα τῆς λέξεως* «ὑγίεια» *καὶ ὅπου ἡ δίφθογγος* «ει» *ἔχει ἀντικατασταθεῖ μὲ τὸ γράμμα* «θ». *Βλ. σχῆμα 1.*



Σχῆμα 1

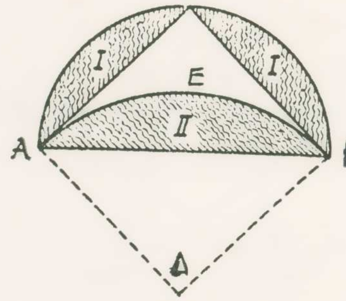
Ἡ Πυθαγόρειος φιλοσοφία ἑδράζεται στὴν ὑπόθεση ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἡ αἰτία τῶν ποικίλων ἰδιοτήτων τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῆς ὕλης. Οἱ ἀριθμοὶ ρυθμίζουν ποιοτικὰ καὶ ποσοτικὰ τὸ Σύμπαν. Ἡ ἄποψη αὐτὴ τῶν Πυθαγορείων σχετικὰ μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ὁδήγησε στὸ νὰ μελετήσουν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς σὲ βάθος, μὲ τὴν σκέψη ὅτι ἀνακαλύπτοντας τὶς πολύπλοκες ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων ὁ ἄνθρωπος θὰ ἦταν σὲ θέση νὰ κατευθύνει ἢ νὰ βελτιώσει σὲ κάποιο βαθμὸ τὸ πεπρωμένο του. Ἐπίσης ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τῆς Γεωμετρίας ὑπάρχει στενὴ σχέση, μελετήθηκε καὶ ἡ Γεωμετρία ἐντατικὰ γιὰ τὸν ἴδιο λόγο.

Ἡ διδασκαλία τοῦ Πυθαγόρα ὑπῆρξε μόνο προφορική, ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ τῶν μελῶν τῆς ἀδελφότητας ὑπῆρχε ἡ συνήθεια ὅλες οἱ ἀνακαλύψεις νὰ τίθενται πρῶτα ὑπόψη τοῦ Πυθαγόρα, εἶναι δύσκολο νὰ γνωρίζομε ποιὲς ἀνακαλύψεις ὀφείλονται σ' αὐτὸν καὶ ποιὲς σὲ ἄλλα μέλη τῆς ἀδελφότητας.

Ἐκτὸς τῶν Πυθαγορείων ὑπῆρξαν, κατὰ τὴν προευκλείδεια ἐποχή, καὶ ἄλλοι μαθηματικοὶ ἐρευνητὲς ὅπως εἶναι ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χίος καὶ ὁ Δημόκριτος, ἀμφότεροι τοῦ δευτέρου ἡμίσεος τοῦ 5ου αἰῶνος π.Χ. καθὼς καὶ ἄλλοι. Πολλὲς ἀξιόλογες ἀνακαλύψεις ἔγιναν στὴν Ἄλγεβρα καὶ στὴν Γεωμετρία. Ἀναφέρομε μερικὲς ἀπὸ αὐτές:

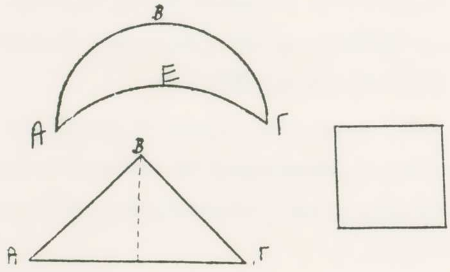
Οἱ Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους

Θεωροῦμε τὸ τετράγωνο ΑΒΓΔ. Μὲ διάμετρο τὴν διαγώνιο ΑΓ γράφομε ἡμιπεριφέρεια καὶ μὲ κέντρο τὸ Δ καὶ ἀκτίνα ΔΓ γράφομε ἕνα τεταρτημόριο περιφερείας. Οἱ μηνίσκοι (βλ. σχῆμα 2) Ι,Ι,ΙΙ καλοῦνται μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους, γνωρίζομε δέ, ἀπὸ τὰ γυμνασιακά μας μαθήματα, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου ΙΙ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο ἄλλων Ι, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι μεταξύ τους. Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιο ΑΒΓ ἀφαιρέσομε τὸν μηνίσκο ΙΙ, ὁ μηνίσκος ποὺ προκύπτει θὰ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τὸ ὁποῖο προκύπτει ἂν ἀφαιρέσομε τοὺς μηνίσκους Ι καὶ Ι. Ἑπομένως ὁ μηνίσκος ΑΒΓΕ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν *μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ τὸ ὁποῖο ἂν τὸ χωρίσομε σὲ δύο μέρη μὲ τὴν κάθετο ἀπὸ τὸ Β στὴν ἀπέναντι πλευρὰ προκύπτει ἕνα τετράγωνο (βλ. σχῆμα 3) ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν μὲ τὸν μηνίσκο ΑΒΓΕ. Παρατηροῦμε ὅτι κατορθώσαμε νὰ τετραγωνίσομε τὸν μηνίσκο ΑΒΓΕ, δηλαδὴ νὰ κατασκευάσομε, μὲ τὴν χρήση μόνο τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτη, τετράγωνο ἐμβαδοῦ ἴσου μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου ΑΒΓΕ.*



Σχῆμα 2

Τὸ παραπάνω πρόβλημα καθὼς καὶ δύο ἄλλα παρόμοια τοῦ Ἱπποκράτη τοῦ Χίου, ἀποτελοῦν ἀναμφιβόλως προσπάθειες τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου μὲ τὴν χρήση μόνο κανόνος καὶ διαβήτη, κάτι ποὺ σήμερα γνωρίζομε ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνει. Πάντως μὲ τὰ παραπάνω προβλήματα ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χίος ἐπέτυχε πρῶτος νὰ ἀποδείξει ὅτι ὁ τετραγωνισμὸς ὁρισμένων καμπυλογράμμων χωρίων εἶναι δυνατός.



Σχῆμα 3

Κατὰ τὸ τέλος τοῦ 5ου αἰώνα π.Χ. μιὰ πολὺ σοβαρὴ κρίση ξέσπασε στοὺς κόλπους τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Τὸ αἴτιο τῆς κρίσης ἀπετέλεσε ἡ ἀπροσδόκητη ἀνακάλυψη ὅτι: δοθέντων δύο ὁμοειδῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν *(π.Χ. δύο εὐθυγράμμων τμημάτων)* ΔΕΝ ὑπάρχει πάντα ἕνα τρίτο ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὰ μέγεθος τὸ ὁποῖο μπορεῖ νὰ χρησιμεύσει ὡς κοινὴ μονάδα μετρήσεως τῶν δύο πρώτων. *Μὲ ἄλλα λόγια, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ δοθέντα μεγέθη μπορεῖ νὰ εἶναι ἀσύμμετρα μεταξύ τους. Ἄς σημειωθεῖ ὅτι μέχρι τότε ἐπιστεύετο ὅτι τὸ τρίτο αὐτὸ μέγεθος πάντα ὑπῆρχε. Σὲ ὁμιλία μου ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ (Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, Τόμ. 63, 1988) εἶχα ἀναφερθεῖ διεξοδικότερα στὸ θέμα αὐτό. Πρόκειται γιὰ τὴν ἀνακάλυψη ἀπὸ τοὺς Πυθαγορείους ὅτι ἡ* $\sqrt{2}$ *εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός, δὲν μπορεῖ δηλαδὴ νὰ γραφεῖ ὡς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὁλόκληρη ὅμως ἡ Πυθαγόρειος Θεωρία ἡ ἀφορῶσα τὶς ἀναλογίες καὶ τὰ ὅμοια σχήματα στηριζόταν ἕως τότε στὴν ὑπόθεση ὅτι δύο ὁποιαδήποτε ὁμοειδὴ μεγέθη εἶναι σύμμετρα, ἡ δὲ ἀνακάλυψη τῆς ὑπάρξεως ἀσυμμέτρων μεγεθῶν ὁδηγοῦσε μοιραίως στὴν ἀπόρριψη μεγάλου ἀριθμοῦ ἀποδείξεων στὴν Πυθαγόρεια Θεωρία.*

Ἡ σοβαρότατη αὐτὴ κρίση λύθηκε τὸ 370 π.Χ. χάρις στὸν λαμπρὸ Ἕλληνα μαθηματικὸ Εὔδοξο τοῦ ὁποίου ἡ θεωρία ἀπετέλεσε ἀσφαλὲς θεμέλιο γιὰ τὰ μαθηματικά. Τὴν πληροφορία αὐτὴ τὴν γνωρίζομε ἀπὸ σχετικὲς παρατηρήσεις τοῦ Ἀρχιμήδη καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ σχόλια τοῦ Πρόκλου ἀναφορικὰ μὲ τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ τοῦ Εὐκλείδη. Ἡ θεωρία τοῦ Εὐδόξου ἀποτελεῖ καὶ αὐτὴ μιὰ κορυφαία στιγμὴ στὰ μαθηματικά.

Ἕνας δεύτερος λόγος γιὰ τὸ ξέσπασμα τῆς κρίσης ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω θεωρεῖται ὅτι εἶναι οἱ λογικὲς διερευνήσεις ποὺ ἀκολούθησε ὁ Παρμενίδης (ὁ σπουδαιότερος τῶν Ἐλαιατῶν φιλοσόφων ὁ ὁποῖος ἔζησε τὸ 514 π.Χ.) στὴν ἀνάπτυξη τῶν φιλοσοφικῶν του θεωριῶν, τὶς ὁποῖες, διερευνήσεις, ἐξέφραζε μὲ τρόπο εὐφυὴ ὁ Ζήνων μὲ τὰ περίφημα παράδοξά του καὶ τὰ ὁποῖα εὑρίσκομε στὰ ΦΥΣΙΚΑ τοῦ Ἀριστοτέλη.

Εἶναι γνωστὸ τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος ὅπου αὐτὸς ἰσχυρίζεται ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρχει κίνηση, διότι, ἂν π.χ. ἕνα βέλος εἶναι ἀκίνητο σὲ κάθε χρονικὴ στιγμή, τότε δὲν μπορεῖ νὰ κινεῖται κατὰ τὴν διάρκεια ἑνὸς χρονικοῦ διαστήματος.

Εἶναι ἐπίσης γνωστὸ τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος ποὺ ἀφορᾶ τὸν Ἀχιλλέα καὶ τὴν χελώνα: Ὁ Ἀχιλλέας συναγωνίζεται σὲ ἀγώνα δρόμου τὴν χελώνα ἡ ὁποία εὑρίσκεται μπροστὰ ἀπ' αὐτὸν σὲ κάποια ἀπόσταση. Ξεκινοῦν συγχρόνως. Ὅμως, ἂν καὶ ὁ Ἀχιλλέας εἶναι πολὺ ταχύτερος ἀπὸ τὴν χελώνα δὲν θὰ τὴν φθάσει ποτὲ διότι ὅταν αὐτὸς θὰ εὑρίσκεται στὸ σημεῖο ὅπου ἦταν ἡ χελώνα, αὐτὴ θὰ ἔχει προχωρήσει κάποιο διάστημα. Ὅταν ὁ Ἀχιλλέας θὰ φθάσει στὴ νέα θέση τῆς χελώνας ἐκείνη πάλι θὰ ἔχει προχωρήσει κ.ο.κ. Ἄρα ὁ Ἀχιλλέας δὲν θὰ φθάσει ποτὲ τὴν χελώνα!!

Στὸ δεύτερο αὐτὸ παράδοξο ὁ Ζήνων διαιρεῖ τὸ χρονικὸ διάστημα ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ νὰ φθάσει ὁ Ἀχιλλέας τὴν χελώνα, σὲ ἀπείρου πλήθους μικρότερα διαστήματα καὶ ἰσχυρίζεται ὅτι ἕνα ἄθροισμα μὲ ἄπειρο πλῆθος ὅρων εἶναι ἄπειρο, κάτι βέβαια ποὺ εἶναι λανθασμένο διότι τότε θὰ ἔπρεπε νὰ δεχθοῦμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 1/3 εἶναι ἄπειρος ἀφοῦ εἶναι

$$1/3 = 0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$$

ὅπου στὸ δεξιὸ σκέλος ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος ὅροι, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα θὰ ἔπρεπε κατὰ τὸν Ζήνωνα νὰ εἶναι ἄπειρο.

Ὅμως ὁ μελετητὴς τῶν παραδόξων τοῦ Ζήνωνος πρέπει, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν εὔθυμη πλευρά τους, νὰ ἀντιληφθεῖ ὅτι αὐτὰ σχετίζονται μὲ τὴν περιοχὴ ἐκείνη τῶν μαθηματικῶν ἡ ὁποία περιλαμβάνει σήμερα σπουδαιότατα προβλήματα θεμελιώδους σημασίας, ἀναφερόμενα στὴν ἔννοια τῆς συνεχείας, στὴν χιλιοταλαιπωρημένη ἔννοια τοῦ ὁρίου καθὼς καὶ στὴν ὀρθὴ εἰσαγωγὴ τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Πιθανὸν ὁ Ζήνων μὲ τὰ παράδοξά του νὰ ἀπέβλεπε στὸ νὰ ὑπερασπίσει τὸ φιλοσοφικό του σύστημα ἢ μᾶλλον τὸ φιλοσοφικὸ σύστημα τοῦ Παρμενίδη, δείχνοντας ὅτι εὔκολα κανεὶς μπορεῖ, ξεκινώντας ἀπὸ ἀξιώματα ποὺ ἀνήκουν σὲ συστήματα ποὺ ἀνταγωνίζονται τὸ ἕνα τὸ ἄλλο, νὰ καταλήξει σὲ γελοῖα συμπεράσματα ὅπως αὐτὰ στὰ ὁποῖα καταλήγουν τὰ παράδοξά του.

Ὁ συλλογιστικὸς τρόπος τοῦ Ζήνωνος πρέπει νὰ ἀποτελεῖ σαφῆ προειδοποίηση γιὰ τοὺς νεαροὺς μαθηματικοὺς καθόσον μᾶς διδάσκει πόσο προσεκτικὰ πρέπει νὰ ἐξετάζομε τοὺς ἀποδεικτικοὺς συλλογισμοὺς οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται στὴν ἔννοια τοῦ ὁρίου, προτοῦ τοὺς κάνομε δεκτούς.

Τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ τοῦ Εὐκλείδη

Τίποτα δὲν εἶναι γνωστὸ μετὰ βεβαιότητος γιὰ τὸν Εὐκλείδη ἐκτὸς βέβαια ἀπὸ τὸ διασωθὲν ἔργο του. Οἱ πληροφορίες ποὺ δίνει ὁ Πρόκλος (410-485 μ.Χ.) στὰ σχόλια ποὺ κάμνει γιὰ τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, λέγει ὅτι ὁ Εὐκλείδης προηγήθηκε τοῦ Ἀρχιμήδη διότι ὁ τελευταῖος ἀναφέρει στὸ ἔργο του τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, καὶ ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἀκολούθησε τὸν Εὔδοξο καὶ τὸν Θεαίτητο διότι τὰ ἔργα αὐτῶν περιλαμβάνονται στὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Ἐπειδὴ ὑπάρχει κάποιο περιστατικὸ τὸ ὁποῖο συνδέει τὸν Εὐκλείδη μὲ τὸν βασιλιὰ Πτολεμαῖο, ὁ Πρόκλος συμπεραίνει ὅτι πρόκειται γιὰ τὸν Πτολεμαῖο τὸν Α΄ ὁ ὁποῖος ἔζησε ἀπὸ τὸ 360 μέχρι τὸ 285 π.Χ. καὶ ὑπῆρξε βασιλιὰς τῆς Αἰγύπτου ἀπὸ τὰ 305-285 π.Χ. Πρόκειται γιὰ τὸ ἀκόλουθο περιστατικό.

Ὁ βασιλιὰς ἀφοῦ ἐξέτασε καὶ μελέτησε τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ἐρώτησε τὸν Εὐκλείδη ἂν ὑπῆρχε κάποια συντομότερη ὁδὸς ποὺ ὁδηγοῦσε στὴν Γεωμετρία, ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀπήντησε: «Στὴν Γεωμετρία δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ὁδός».

Τὸ παραπάνω ἀμφιβόλου ἴσως αὐθεντικότητας ἀνέκδοτο, καθὼς καὶ κάποιο ἄλλο παρόμοιο μὲ αὐτό, εἶναι τὸ μόνο πράγμα ποὺ γνωρίζομε γιὰ τὴν προσωπικότητα τοῦ Εὐκλείδη. Γνωρίζομε ἐπίσης ὅτι ἔζησε περὶ τὸ 300 π.Χ. καὶ τὸ σημαντικότερο ἀπ' ὅλα ὅτι ἔγραψε τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

Τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ἀποτελοῦνται ἀπὸ 13 Βιβλία, ὅπως λέγονται, τὰ ὁποῖα σὲ μετάφραση ἀποτελοῦν ἕνα ὀγκώδη τυπωμένο τόμο. Στὰ 13 αὐτὰ βιβλία περιλαμβάνεται, μὲ ἐλάχιστες ἐξαιρέσεις, ἡ μέχρι τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ὑπάρχουσα μαθηματικὴ γνώση. Τὸ κολοσσιαῖο ἐπίτευγμα τοῦ Εὐκλείδη ἔγκειται στὴν παρουσίαση τοῦ ὑλικοῦ ὑπὸ μιὰ ὑπέροχα συστηματοποιημένη μορφὴ καθὼς καὶ στὸν ἀριστουργηματικὸ τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο πραγματεύεται τὸ ὑλικὸ αὐτὸ ὡς ἕνα ὀργανικὸ σύνολο. Τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ἀποτελοῦν ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα ἐπιτεύγματα τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ. Χρησιμοποιή-

θηκαν ὡς διδακτικὸ σύγγραμμα ἐπὶ 2.000 χρόνια καὶ περιέχουν τὴν βασικὴ ὕλη τῆς Γεωμετρίας ποὺ σήμερα διδάσκεται στὴν Μέση Ἐκπαίδευση.

Τὸ Βιβλίο I ἀρχίζει μὲ ἕνα πλῆθος ὁρισμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος εἶναι: «Σημεῖο εἶναι αὐτὸ ποὺ δὲν ἔχει καμμιὰ διάσταση». Τοὺς ὁρισμοὺς ἀκολουθοῦν πέντε ἀξιώματα καὶ πέντε βασικὲς ἔννοιες ὅπως ἡ ἀκόλουθη: «Τὰ εἰς τρίτον ἴσα εἶναι καὶ μεταξύ τους ἴσα». Τὰ παραπάνω ἀποτελοῦν τὶς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁλόκληρη ἡ θεωρία.

Τὰ ἀξιώματα ἀποτελοῦν τὶς βασικὲς ὑποθέσεις οἱ ὁποῖες ἀναφέρονται στὸ ὑπὸ μελέτην ἀντικείμενο, δηλαδὴ στὴν περίπτωσή μας στὴν Γεωμετρία, ἐνῶ οἱ βασικὲς ἔννοιες ἰσχύουν σὲ ὅλους τοὺς κλάδους τῆς γνώσης. Σήμερα ἡ διάκριση αὐτὴ μεταξὺ ἀξιωμάτων καὶ βασικῶν ἐννοιῶν δὲν γίνεται. Καὶ τὰ δύο εἴδη ὑποθέσεων καλοῦνται ἁπλῶς ἀξιώματα.

Θὰ ἦταν ἴσως χρήσιμο, γιὰ τοὺς μὴ εἰδικούς, νὰ δοθεῖ μιὰ εἰκόνα τοῦ τί συμβαίνει μέσα σὲ μιὰ μαθηματικὴ θεωρία. Οὐσιαστικά, ἕνα μαθηματικὸ ἔργο ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ σειρὰ θεωρημάτων καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀποδείξεών τους. Ἡ ἀπόδειξη ἑνὸς θεωρήματος συνίσταται στὸ νὰ δείξομε ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι λογικὴ συνέπεια προηγουμένων θεωρημάτων. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι δὲν μποροῦμε νὰ ἀποδείξομε τὸ πρῶτο «θεώρημα» τῆς θεωρίας μας διότι δὲν προηγοῦνται αὐτοῦ ἄλλα θεωρήματα. Τὰ θεωρήματα αὐτὰ ποὺ δὲν μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν καλοῦνται «ἀξιώματα». Πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι εἶναι ἀδιάφορο γιὰ τὴν θεωρία ἂν τὰ ἀξιώματα εἶναι «ἀληθῆ» ἢ ὄχι. Ἡ θεωρία ἁπλῶς λέγει ὅτι, ἂν τὰ ἀξιώματα ἀληθεύουν τότε καὶ τὰ προκύπτοντα ἀπὸ αὐτὰ θεωρήματα ἀληθεύουν. Ἐπιπλέον ἀπὸ τῆς σκοπιᾶς τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν δὲν ἐνδιαφέρει ποιὰ εἶναι ἡ φύση τῶν ἀντικειμένων στὰ ὁποῖα ἀναφέρονται τὰ ἀξιώματα, ὅπως εἶναι τὰ σημεῖα, οἱ εὐθεῖες, οἱ κύκλοι κλπ. Αὐτὸ ποὺ ἐνδιαφέρει εἶναι νὰ γνωρίζομε ποιὲς σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν μὴ καθοριζομένων αὐτῶν ἀντικειμένων. Παράδειγμα τέτοιας σχέσεως εἶναι: «δύο διακεκριμένες "εὐθεῖες" ἔχουν τὸ πολὺ ἕνα κοινὸ σημεῖο».

Τὰ παραπάνω δίνουν τὴν ψευδαίσθηση ὅτι μιὰ μαθηματικὴ θεωρία ἀνάγεται σὲ μιὰ ἄσκοπη καὶ στείρα συζήτηση. Συμβαίνει ὅμως τὸ ἀντίθετο. Τὸ γεγονὸς ἀκριβῶς ὅτι ἀποφεύγομε νὰ καθορίσομε τὴν φύση τῶν ἀντικειμένων ποὺ ἀναφέρονται σὲ μιὰ θεωρία, καθιστᾶ τὴν θεωρία αὐτὴ πολὺ χρήσιμη, καὶ τοῦτο διότι κάθε φορὰ ποὺ συναντοῦμε ἀντικείμενα τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὶς σχέσεις ποὺ ἀπαιτοῦν τὰ ἀξιώματα, ὅπως λ.χ. συμβαίνει αὐτὸ στὴν Φυσική, τότε ὁλόκληρη ἡ θεωρία μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ στὰ συγκεκριμένα αὐτὰ ἀντικείμενα.

Ἐξάλλου τὰ ἀξιώματα μιᾶς θεωρίας δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τυχαῖα καὶ αὐθαίρετα. Πρέπει νὰ ἔχουν τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες.

1. Π λ η ρ ό τ η τ α. Ὁποιαδήποτε ὑπόθεση ποὺ θὰ χρησιμοποιηθεῖ στὴν θεωρία πρέπει νὰ περιέχεται στὰ ἀξιώματα, ἔτσι ὥστε νὰ μὴ ὑπάρξουν σ' αὐτήν, ἀργότερα, ἄλλες σιωπηρῶς γενόμενες ὑποθέσεις.

2. Σ υ ν έ π ε ι α. Εἶναι ἀδύνατον νὰ προκύπτουν ἀντιφατικὰ θεωρήματα ἀπὸ τὰ ἀξιώματα.

3. Ἀ ν ε ξ α ρ τ η σ ί α. Κανένα ἀπὸ τὰ ἀξιώματα δὲν πρέπει νὰ εἶναι συνέπεια τῶν ἄλλων.

Ἂν θελήσομε νὰ ξεχωρίσομε τὰ σπουδαιότερα γεωμετρικὰ ἀποτελέσματα ποὺ περιλαμβάνονται στὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, αὐτὰ εἶναι τὰ ἀκόλουθα δύο:

(α) Τὸ Πυθαγόρειο Θεώρημα $(\alpha^2=\beta^2+\gamma^2)$.

(β) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ 180°.

Τὸ ἀποτέλεσμα (β) προκύπτει ἀπὸ τὸ πέμπτο ἀξίωμα, τὸ ὁποῖο λέγει: ἂν σὲ ἕνα ἐπίπεδο, εὐθεία τέμνει δύο ἄλλες εὐθεῖες τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου ἔτσι ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν νὰ εἶναι μικρότερο τῶν 180°, τότε οἱ δύο εὐθεῖες προεκτεινόμενες τέμνονται σὲ ἕνα σημεῖο κείμενο πρὸς τὸ μέρος ὅπου εὑρίσκονται οἱ δύο γωνίες τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερο τῶν 180°.

Ὁ ἴδιος ὁ Εὐκλείδης εἶχε ἀντιληφθεῖ ὅτι τὸ πέμπτο αὐτὸ ἀξίωμα δὲν ἦταν τόσο «διαφανὲς» ὅσο τὰ ὑπόλοιπα τέσσερα. Εἶναι γνωστὸ ὅτι ἔγιναν πάρα πολλὲς ἀποτυχημένες προσπάθειες νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ ἀξίωμα αὐτὸ ἦταν συνέπεια τῶν ἄλλων ἀξιωμάτων. Οἱ ἀποτυχίες αὐτὲς ὁδήγησαν στὴν ἀνακάλυψη τῆς Μη-Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἀπὸ τοὺς C. F. Gauss, J. Bolyai καὶ N. I. Lobachevski, κατὰ τὶς ἀρχὲς τοῦ 19ου αἰώνα.

Κατωτέρω παραθέτομε περίληψη τῶν περιεχομένων ἑκάστου τῶν δεκατριῶν βιβλίων τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Β ι β λ ί ο 1. Στοιχειώδεις κατασκευές, θεωρήματα ἰσότητας, ἐμβαδὰ πολυγώνων, Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Β ι β λ ί ο 2. Γεωμετρικὴ Ἄλγεβρα.

Β ι β λ ί ο 3. Γεωμετρία τοῦ κύκλου.

Β ι β λ ί ο 4. Κατασκευὴ ὁρισμένων κανονικῶν πολυγώνων.

Β ι β λ ί ο 5. Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Εὐδόξου.

Β ι β λ ί ο 6. Ὅμοια σχήματα.

Β ι β λ ί α 7-9. Θεωρία ἀριθμῶν.

Β ι β λ ί ο 10. Ταξινόμηση ὁρισμένων ἀρρήτων ἀριθμῶν (Θεαίτητος).

Β ι β λ ί ο 11. Στερεομετρία, ἁπλοὶ ὄγκοι.

Β ι β λ ί ο 12. Ὑπολογισμὸς ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων διὰ τῆς «μεθόδου τῆς ἐξαντλήσεως» (ὁλοκλήρωση) τοῦ Εὐδόξου.

Β ι β λ ί ο 13. Κατασκευὴ πέντε κανονικῶν στερεῶν.

Μιὰ προσεκτικὴ ἐξέταση τῶν περιεχομένων τῶν Βιβλίων μᾶς πείθει ὅτι ἡ ἄποψη ὅτι οἱ «ἔννοιες «Εὐκλείδης» καὶ «Γεωμετρία» εἶναι ταυτόσημες» δὲν δικαιολογεῖται πλήρως. «Εὐκλείδης» σημαίνει κάτι παραπάνω ἀπὸ «Γεωμετρία». Πράγματι τὰ Βιβλία 2 καὶ 10, οὐσιαστικά, πραγματεύονται ἀλγεβρικὰ θέματα ἐνῶ τὰ Βιβλία 7, 8 καὶ 9 ἀσχολοῦνται μὲ τὴν Θεωρία τῶν 'Αριθμῶν.

'Ο Εὐκλείδης ἀσχολεῖται μὲ τὴν θεωρία διαιρετότητας τῶν ἀκεραίων καὶ δίδει μεγάλη ἔμφαση στὸν ρόλο ποὺ παίζουν οἱ «πρῶτοι ἀριθμοί» (οἱ ἀκέραιοι δηλαδὴ ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 1 καὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς μόνο ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτό τους: 2,3,5,7,11,13,...). Εὑρίσκομε, μεταξὺ ἄλλων, μιὰ μέθοδο εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη) καθὼς καὶ μιὰ ἀπόδειξη «κλασσικοῦ κάλλους» τῆς ὑπάρξεως ἀπείρου πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Σύντομη ἀ ν α φ ο ρ ὰ σ τ ὴ ζ ω ὴ κ α ὶ σ τ ὸ ἔ ρ γ ο τοῦ 'Αρχιμήδη

'Απὸ πλευρᾶς σπουδαιότητας περιεχομένου καὶ κομψότητας ὕφους κανένα κλασσικὸ σύγγραμμα μαθηματικῶν δὲν ὑπερτερεῖ τοῦ ἔργου τοῦ 'Αρχιμήδη. 'Εξάλλου αὐτὸ εἶχε ἤδη ἀναγνωρισθεῖ καὶ κατὰ τὴν ἀρχαιότητα, ὅπως προκύπτει ἀπὸ αὐτὰ ποὺ ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος (2ο ἥμισυ τοῦ 1ου αἰώνα μ.Χ.) στὴν βιογραφία τοῦ Ρωμαίου στρατηγοῦ Μάρκελλου ὁ ὁποῖος κατέλαβε τὶς Συρακοῦσες κατὰ τὸν πόλεμο τοῦ 218-201 π.Χ. Εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ πολεμικὲς μηχανὲς ποὺ εἶχε ἐφεύρει ὁ 'Αρχιμήδης εἶχαν παίξει σπουδαῖο ρόλο κατὰ τὴν ἄμυνα τῶν Συρακουσῶν.

'Ο 'Αρχιμήδης σὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ βιβλία του προτάσσει κάποια εἰσαγωγὴ ἢ πρόλογο σχετικὰ μὲ τὸ πρόβλημα ποὺ προτίθεται νὰ ἀναπτύξει. Οἱ πρόλογοι αὐτοὶ ἀπετέλεσαν πηγὴ πολυτίμων πληροφοριῶν γιὰ τοὺς ἱστορικοὺς τῶν μαθηματικῶν καὶ εἰδικότερα ρίχνουν φῶς σὲ ὅ,τι ἀφορᾶ τὴν ζωὴ καὶ τὴν προσωπικότητα τοῦ 'Αρχιμήδη. 'Επιπλέον, ἂν λάβομε ὑπόψη καὶ αὐτὰ ποὺ ἀναφέρονται γιὰ τὸν 'Αρχιμήδη στὰ κλασσικὰ ἀρχαῖα κείμενα, καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ 'Αρχιμήδης εἶναι ἐκεῖνος ἐκ τῶν ἀρχαίων 'Ελλήνων μαθηματικῶν γιὰ τὸν ὁποῖο ἔχομε τὶς περισσότερες βιογραφικὲς πληροφορίες.

'Ο 'Αρχιμήδης, υἱὸς τοῦ ἀστρονόμου Φειδία, γεννήθηκε στὶς Συρακοῦσες τὸ 287 π.Χ. 'Εσπούδασε στὴν 'Αλεξάνδρεια καὶ ἔζησε στὶς Συρακοῦσες, ἀσχολούμενος μὲ τὴν ἔρευνα τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν, τῆς 'Αστρονομίας καὶ τῆς Μηχανικῆς.

Στὸ ἔργο τοῦ Πλουτάρχου ὑπάρχει εὐρεία ἀναφορὰ στὴν ζωὴ τοῦ 'Αρχιμήδη, στὶς φιλικὲς σχέσεις ποὺ εἶχε μὲ τὸν Τύραννο τῶν Συρακουσῶν 'Ιέρωνα, στὶς ἐφευρέ-

σεις του, στὴν ἱστορικὴ φράση «Δός μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν κινάσω», καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἐνδεικτικὴ τῶν μελετῶν τοῦ Ἀρχιμήδη στὴν Θεωρητικὴ Μηχανική.

Ὁ φόνος τοῦ Ἀρχιμήδη ἀπὸ ἕνα Ρωμαῖο στρατιώτη (212 π.Χ.) εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ὀλίγα δραματικὰ ἐπεισόδια ποὺ ἀναφέρονται στὴν Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν. Αὐτὸ συνέβη ὅταν ὁ Ἀρχιμήδης, ἀπορροφημένος ἀπὸ τὴν μελέτη ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος ποὺ εἶχε χαράξει ἐπάνω στὴν ἄμμο, ἐνοχληθεὶς ἀπὸ τὸν στρατιώτη, τοῦ εἶπε τὴν περίφημη φράση «Μὴ μοῦ τοὺς κύκλους τάραττε» φράση ἡ ὁποία ἀπέβη μοιραία γι' αὐτόν.

Ἕνα δεύτερο δραματικὸ ἐπεισόδιο εἶναι ἐκεῖνο τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Evariste Galois (1811-32), ὁ ὁποῖος μὲ μεγάλη ἀγωνία βιάζεται νὰ διατυπώσει γραπτῶς τὶς πραγματικὰ ἐμπνευσμένες ἰδέες του τὴν νύχτα τῆς παραμονῆς τῆς ἡμέρας ποὺ ἐπρόκειτο νὰ μονομαχήσει μὲ κάποιον, φοβούμενος μήπως σκοτωθεῖ τὴν ἑπομένη, ὅπως καὶ ἔγινε. Στὶς σημειώσεις τῆς νύχτας ἐκείνης ὁ Galois ἀποδεικνύει ὅτι μιὰ ἐξίσωση 5ου ἢ ἀνωτέρου βαθμοῦ δὲν ἐπιδέχεται, πάντοτε, λύση ποὺ νὰ προκύπτει μὲ τὴν ἐξαγωγὴ ριζῶν ἐκφράσεων οἱ ὁποῖες περιλαμβάνουν τοὺς συντελεστὲς τῆς ἐξισώσεως. Ὁ Galois πέθανε στὴν ἡλικία τῶν 21 ἐτῶν.

Λίγες εἶναι οἱ μαθηματικὲς μεγαλοφυΐες ποὺ πέθαναν ἀπὸ στερήσεις (φυματίωση κλπ.) νέοι καὶ πτωχοί. Παράδειγμα ἀποτελεῖ ὁ Νορβηγὸς Nielsen Henrik Abel (1802-29).

Πολλὲς εἶναι οἱ ἱστορίες καὶ τὰ ἀνέκδοτα ποὺ ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος σχετικὰ μὲ τὴν ἀφηρημάδα ποὺ χαρακτήριζε τὸν Ἀρχιμήδη. Εἶναι γνωστὴ ἡ ἱστορία ποὺ ἀναφέρεται στὴν ἀνακάλυψη τῆς Ἀρχῆς ποὺ σήμερα εἶναι γνωστὴ ὡς Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ ποὺ ἀφορᾶ τὴν ἄνωση ποὺ ὑφίσταται πᾶν σῶμα ἐμβαπτιζόμενον ἐντὸς ὑγροῦ. Ἡ ἀνακάλυψη ἔγινε ὅταν ὁ Ἀρχιμήδης ἔκαμνε τὸ μπάνιο του στὰ δημόσια λουτρά, ἤτανε δὲ τόσο μεγάλος ὁ ἐνθουσιασμός του ὥστε σηκώθηκε καὶ ἄρχισε νὰ τρέχει γυμνὸς στοὺς δρόμους τῶν Συρακουσῶν φωνάζοντας «Εὕρηκα, εὕρηκα».

Ἂν οἱ ἱστορίες τοῦ εἴδους αὐτοῦ μᾶς φαίνονται ἀστεῖες ἢ ἀκόμα καὶ γελοῖες, ἂς μὴ ξεχνοῦμε ὅτι μιὰ μεγαλοφυΐα τῆς ὁλκῆς τοῦ Ἀρχιμήδη πρέπει νὰ ἔχει καὶ τὴν ἱκανότητα νὰ μπορεῖ νὰ συγκεντρώνει τὴν προσοχή της ἐξ ὁλοκλήρου καὶ ἐπὶ μεγάλο χρονικὸ διάστημα στὸ πρόβλημα ποὺ τὴν ἀπασχολεῖ ἀποκλείοντας ἀπὸ τὴν σκέψη της κάθε τι ἄλλο.

Οὐσιαστικά, αὐτὰ περίπου εἶναι ὅλα ὅσα γνωρίζομε γιὰ τὴν ζωὴ τοῦ Ἀρχιμήδη.

Μερικὰ χαρακτηριστικὰ τῆς προσωπικότητάς του προκύπτουν ἀπὸ τοὺς προλόγους τῶν ἔργων του. Γράφει ὁ ἴδιος, ὅτι εἶχε τὴν συνήθεια νὰ στέλνει στοὺς φίλους του στὴν Ἀλεξάνδρεια μερικὰ ἀπὸ τὰ θεωρήματά του χωρὶς ὅμως νὰ στέλνει μαζὶ *καὶ τὶς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων αὐτῶν, γιὰ νὰ δοκιμάζουν καὶ οἱ φίλοι του τὴν χαρὰ νὰ τὰ ἀποδεικνύουν μόνοι τους. Ὅμως παρετήρησε ὅτι μερικοὶ ἀπὸ τοὺς «φίλους» παρουσίαζαν τὰ ἀποσταλέντα θεωρήματα ὡς δικά τους καὶ μάλιστα χωρὶς κὰν νὰ τὰ ἀποδείξουν. Ἡ συμπεριφορὰ αὐτὴ ἐνόχλησε τὸν Ἀρχιμήδη καὶ τὸν ἀνάγκασε στὴν τελευταία ὁμάδα τῶν θεωρημάτων ποὺ εἶχε ἀποστείλει νὰ συμπεριλάβει δύο θεωρήματα τὰ ὁποῖα ἦταν λανθασμένα. Ἡ πράξη αὐτὴ ἀποτελοῦσε προειδοποίηση πρὸς ἐκείνους ποὺ ἰσχυρίζονταν ὅτι ἀνακαλύπτουν τὸ κάθε τι χωρὶς ὅμως νὰ παρέχουν τὶς σχετικὲς ἀποδείξεις, διότι ὁ ἰσχυρισμός τους αὐτὸς θὰ ἐσήμαινε ὅτι μποροῦν νὰ ἀνακαλύψουν καὶ τὰ μὴ ὑπάρχοντα, καὶ τὰ ἀδύνατα!*

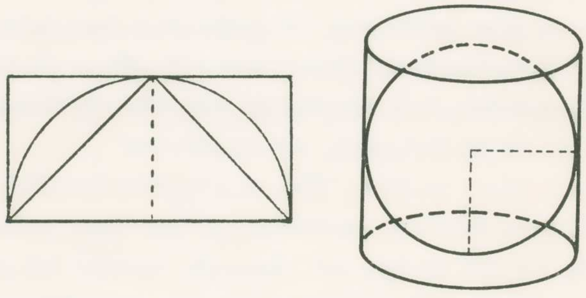
Ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδη. Ἐνῶ τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ τοῦ Εὐκλείδη ἀποτελοῦν συλλογὴ καὶ ταξινόμηση ὅλων τῶν ἀποτελεσμάτων ποὺ εἶχαν ἀποκτηθεῖ μέχρι τὴν ἐποχὴ ἐκείνη, κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδη ἀποτελεῖ καὶ μιὰ νέα συμβολὴ στὴν μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Τὰ ὑπάρχοντα ἔργα του στὴν ἑλληνικὴ γλώσσα ἀναφέρονται, πιθανὸν κατὰ τὴν ἀκόλουθη χρονολογικὴ σειρά, στὰ κάτωθι θέματα:

1. *Ἰσορροπία, ἐπιπέδων σχημάτων, I.*
2. *Εὕρεση ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου.*
3. *Ἰσορροπία ἐπιπέδων σχημάτων, II.*
4. *Σφαίρα καὶ Κύλινδρος I, II.*
5. *Ἕλικες.*
6. *Κωνικὲς τομές. Σφαιροειδή.*
7. *Ἐπιπλέοντα σώματα.*
8. *Μέτρηση τοῦ κύκλου.*
9. *Ἀριθμητικὸς συμβολισμὸς γιὰ τὴν παράσταση μεγάλων ἀριθμῶν. Ἡ σχετικὴ ἐργασία φέρει τὴν ὀνομασία «Ψαμμίτης». Τὸ ἑλληνικὸ κείμενο τῶν ἔργων αὐτῶν ἐξεδόθη, στὴν τελική του μορφή, ἀπὸ τὸν J. L. Heiberg. Ὁ ἴδιος ἐκδότης ἀνεκάλυψε τὸ 1906 τὸ ἑλληνικὸ κείμενο ἑνὸς ἀκόμη βιβλίου, ἴσως τοῦ τελευταίου, ὑπὸ τὸν τίτλο «Ἡ Μέθοδος». Τὸ κείμενο αὐτὸ εἶναι αὐτὸ ποὺ ἀποκαλοῦν οἱ ἀρχαιολόγοι «παλίμψηστο» ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ ἀρχικὸ κείμενο εἶχε ἀποξεσθεῖ καὶ ἐπ' αὐτοῦ εἶχε γραφεῖ κάποιο ἄλλο κείμενο. Ἀνακαλύφθηκε στὴν βιβλιοθήκη ἑνὸς μοναστηριοῦ τῆς Κωνσταντινουπόλεως καὶ ἦταν γραμμένο σὲ πάπυρο τοῦ 10ου αἰώνα μ.Χ. Ἡ ἀνάγνωσή του παρουσίασε πολλὲς δυσκολίες.*

Στὶς ἐργασίες ποὺ ἀναφέρονται στὴν ἰσορροπία ἐπιπέδων σχημάτων ἀναπτύσσεται ἡ θεωρία τῶν μοχλῶν καὶ στὴν συνέχεια προσδιορίζεται τὸ κέντρο βάρους διαφόρων ἐπιπέδων σχημάτων. Οἱ ἐργασίες γιὰ τὴν ἰσορροπία ἐπιπέδων σχημάτων καθὼς καὶ ἐκείνη γιὰ τὰ ἐπιπλέοντα σώματα εἶναι τὰ μόνα συγγράμματα τῆς ἀρχαιότητας, σὲ θέματα Φυσικῆς, ποὺ παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον γιὰ τὸν σύγχρονο ἀναγνώστη.

Τὰ περισσότερα βιβλία τοῦ 'Αρχιμήδη ἀναφέρονται σὲ θέματα τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν καὶ ἀνήκουν στὴν περιοχὴ ποὺ σήμερα ὀνομάζομε Διαφορικὸ καὶ Ὁλοκληρωτικὸ Λογισμό. Θὰ σχολιάσομε ἐν συντομίᾳ δύο μόνο ἀπὸ τὰ βιβλία αὐτά.

(α) Σφαίρα καὶ Κύλινδρος. Ἂν τὸ παρακάτω ὀρθογώνιο τὸ περι-



Σχ. 4

στρέψομε περὶ τὴν στικτὴ γραμμή, παράγεται ἕνας κῶνος ἐγγεγραμμένος σὲ ἕνα ἡμισφαίριο τὸ ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένο σὲ ἕνα κύλινδρο. Οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν αὐτῶν εὑρίσκονται σὲ ἀναλογία 1:2:3. Μὲ ἄλλα λόγια τὸ ἡμισφαίριο εἶναι διπλάσιο τοῦ κώνου, ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου ὁ δὲ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι τὰ 2/3 τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου. Ὁ 'Αρχιμήδης ἦταν τόσο ὑπερήφανος γιὰ τὸ ἀποτέλεσμὰ αὐτὸ ὥστε ἐζήτησε νὰ χαραχθεῖ ἐπάνω στὸ μνῆμα του μία σφαίρα ἐγγεγραμμένη σὲ κύλινδρο, καθὼς καὶ τὸ κλάσμα 2/3 (βλ. σχῆμα 4). Τὴν ἐπιθυμία αὐτὴ τοῦ 'Αρχιμήδη ἐξεπλήρωσε ὁ Κικέρων ὅταν τὴν ἐποχὴ ποὺ ἦταν ἀξιωματοῦχος στὴν Σικελία διεπίστωσε ὅτι ὁ τάφος τοῦ 'Αρχιμήδη ἦταν παραμελημένος καὶ διέταξε τὴν ἐπισκευή του.

(β) Μέτρηση τοῦ κύκλου. 'Αποδεικνύει πρῶτα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν A κύκλου ἀκτῖνος ϱ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου μὲ βάση ἴση πρὸς τὴν περιφέρεια, Γ, τοῦ κύκλου καὶ ἀντίστοιχο ὕψος ϱ, ἤτοι $A = \frac{1}{2}\varrho\Gamma$. 'Απὸ τὴν τελευταία αὐτὴ σχέση προκύπτει ὅτι ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτῖνος του ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρο. Τὸν λόγο αὐτό, τὸν ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ ἑλληνικὸ γράμμα π, προσπαθεῖ ὁ 'Αρχιμήδης νὰ ὑπολογίσει μετρώντας τὶς περιμέτρους ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου καὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου στὸν κύκλο, ὅπου ἀμφότερα τὰ πολύγωνα ἔχουν 96 πλευρές, καὶ εὑρίσκει: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. Ἡ τιμὴ 22/7 τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητας χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερα ὡς προσεγγιστικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ π.

Γιὰ τὴν ἄλλη μεγάλη μαθηματικὴ μορφὴ (260 π.Χ.–200 π.Χ.), τὸν 'Απολλώνιο, θὰ ἀναφέρομε μόνο τὸ περίφημο ἔργο του γιὰ τὶς Κωνικὲς Τομές, τὸ ὁποῖο περιλαμβάνει περὶ τὶς 400 προτάσεις καὶ ὅπου μελετᾶ τὶς ἰδιότητες τῆς «παραβολῆς» τῆς «ὑπερβολῆς» καὶ «ἐλλείψεως» μὲ τέτοια πληρότητα ποὺ λίγα ἀπομένουν νὰ μελετηθοῦν ἀπὸ τοὺς ἐπερχομένους.

Τελειώνοντας, θερμὰ θὰ συνιστοῦσα σὲ κάθε μαθηματικὸ καὶ ἰδιαιτέρως στοὺς νεώτερους νὰ μελετήσουν τὰ παραπάνω συγγράμματα ἢ ἐπιλεκτικὰ νὰ μελετήσουν τουλάχιστον μιὰ σειρὰ θεωρημάτων ἀπὸ τὰ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ὅπως ἐκείνη ποὺ ὁδηγεῖ στὴν κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, τὸ θεώρημα ποὺ βεβαιώνει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρο, καθὼς καὶ τὸ περίφημο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ἡ κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, ἡ ὁποία εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρουσα αὐτὴ καθ' ἑαυτήν, χρησιμοποιεῖται ἀκόμα, στὸ Βιβλίο 13, καὶ γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου, τοῦ στερεοῦ δηλαδὴ ἐκείνου ποὺ περιορίζεται ἀπὸ 12 ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα. 'Επίσης ἡ κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι πολὺ χρήσιμη γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν ἑλληνικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

'Απὸ τὰ ἔργα τοῦ 'Αρχιμήδη τεράστιο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἐργασίες ποὺ ἀναφέρονται στὴν κατασκευὴ κανονικοῦ ἑπταγώνου, τὴν εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου καὶ τὴν μέτρηση τοῦ κύκλου. Τὸ βιβλίο του «Ἡ Μέθοδος» φαίνεται νὰ ἀποτελεῖ τὸν πρόδρομο τῆς Θεωρίας Ὁλοκληρώσεως ποὺ σήμερα γνωρίζομε. Ὅμως τὰ λίγα αὐτὰ δείγματα τοῦ ἔργου τοῦ 'Αρχιμήδη ποὺ ἀναφέρω δὲν μᾶς δίνουν τὴν πλήρη εἰκόνα τῆς μεγαλοφυΐας τοῦ ἀνδρός. 'Αποτελοῦν ἁπλῶς μιὰ ἔνδειξη τῆς τόλμης, τῆς ἰσχύος καὶ τῆς ἐφευρετικότητας μὲ τὴν ὁποία ἀντιμετώπιζε κάθε δύσκολο πρόβλημα. Γιὰ νὰ ἀντιληφθεῖ κανεὶς πληρέστερα καὶ βαθύτερα τὸ μεγαλοφυές του ἔργο πρέπει νὰ μελετήσει μὲ κάθε λεπτομέρεια καὶ ἐμβρίθεια μερικὲς τουλάχιστον ἀπὸ τὶς κομψότατες δομὲς τῶν θεωρημάτων του τὰ ὁποῖα βρίθουν ἀπὸ δύσκολα καὶ ὡραιότατα ἀποτελέσματα. Τὸ ἐρευνητικὸ ἔργο τοῦ 'Αρχιμήδη ἐκτείνεται σχεδὸν σ' ὅλα τὰ μαθηματικὰ θέματα τῆς ἐποχῆς του.

Μελετώντας τὰ ἔργα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων μαθηματικῶν καὶ εἰδικότερα ἐκεῖνα τοῦ Πυθαγόρα, τοῦ Εὐκλείδη καὶ τοῦ 'Αρχιμήδη, πολλαπλὰ εἶναι τὰ συναισθήματα ποὺ γεννῶνται στὸν ἀναγνώστη. Αὐτός, ἀναγνωρίζει, ἔχει τὴν βαθύτατη αἴσθηση, ὅτι πρόκειται περὶ γνησίων, αὐθεντικῶν προϊόντων τοῦ πνεύματος καὶ τὰ ὁποῖα μπορεῖ καὶ ἀπολαμβάνει χωρὶς νὰ ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν παλαιότητά τους, διότι αὐτὰ ἀποτελοῦν μέρος τοῦ ζῶντος ὀργανισμοῦ ποὺ λέγεται Μαθηματικά. Ἡ μελέτη τῶν ἔργων αὐτῶν ὁδηγεῖ ἀβίαστα στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἱκανότητα δημιουργίας τέτοιων νοητικῶν δομῶν εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ γνωρίσματα ἐκεῖνα ποὺ ξεχωρίζουν τὸν ἄνθρωπο ἀπὸ τὸ κτῆνος.

ΠΟΛΥ ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Τὰ Θεωρητικὰ Μαθηματικὰ ξεκίνησαν ἀπὸ τὴν Ἑλλάδα καὶ ἀναπτύχθηκαν περὶ τὰ μέσα τοῦ 4ου π.Χ. αἰ. Ἡ δημιουργία τῶν μαθηματικῶν ἐκείνων ποὺ ὑπερέβαιναν τὴν ἐξυπηρέτηση τῶν πρακτικῶν μόνο ἀναγκῶν τοῦ ἀνθρώπου, ἀποτελεῖ ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ ἀξιοθαύμαστα συμβάντα στὴν ἱστορία τοῦ ἀνθρώπινου πολιτισμοῦ, καὶ τὸ ὁποῖο εἶχε τεράστιο ἀντίκτυπο στὴν ἀνάπτυξη ὅλων τῶν κλάδων τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἡ ἀνασυγκρότηση-ἀνασύνθεση τῶν σπουδαιοτέρων ἑλληνικῶν μαθηματικῶν κειμένων ὀφείλεται στοὺς ἱστορικοὺς τοῦ 19ου αἰώνα. Ἡ παλαιότερη ἐκτενὴς ἔκθεση, ἡ ἀφορῶσα τὴν πρὸ τοῦ Εὐκλείδη ἐποχή, ὀφείλεται στὸν Πρόκλο (410-485 μ.Χ.).

Οἱ πρῶτοι ἐπωνύμως γνωστοὶ Ἕλληνες μαθηματικοί, ὑπῆρξαν: ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (639-546 π.Χ.) καὶ ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (510; π.Χ.). Ἀμφότεροι ἦταν Ἴωνες. Ὁ Πυθαγόρας ἵδρυσε τὴν περίφημη Σχολή του στὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας καὶ τὰ μέλη τῆς Σχολῆς ὀνομάζονταν Πυθαγόρειοι. Ἡ Πυθαγόρειος Φιλοσοφία ἑδράζεται στὴν ὑπόθεση, ὅτι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἡ αἰτία τῶν ποικίλων ἰδιοτήτων τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῆς ὕλης. Ἡ Σχολὴ ἐρευνοῦσε τὴν θεωρία τῶν Ἀναλογιῶν (σὲ σχέση καὶ μὲ τὴν μουσική), τοὺς πολυγωνικοὺς ἀριθμούς (τριγωνικούς, τετραγωνικοὺς) καὶ ἐν γένει τὴν Θεωρία τῶν Ἀριθμῶν καὶ τὴν Γεωμετρικὴ Ἄλγεβρα.

Οἱ Πυθαγόρειοι ἐγνώριζαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ἀκόμα καὶ μετὰ τὴν διάλυση τῆς Πυθαγόρειας Σχολῆς, οἱ Πυθαγόρειοι ἐξακολούθησαν νὰ προάγουν τὰ μαθηματικὰ σὲ συνεργασία μὲ τὴν Ἀκαδημία τοῦ Πλάτωνος.

Μιὰ ἄλλη ἐπίσης σημαντικὴ Σχολὴ ὑπῆρξε ἡ Ἐλαιατική (540 π.Χ.), τῆς ὁποίας ἐξέχοντα μέλη ἦταν ὁ Παρμενίδης καὶ ὁ Ζήνων. Ὁ τελευταῖος εἶναι γνωστὸς γιὰ τὰ περίφημα «παράδοξά» του, τῶν ὁποίων οἱ συλλογισμοὶ «ὁδηγοῦν» σὲ ἄτοπα συμπεράσματα. Ἡ φιλοσοφία τοῦ Ζήνωνος μποροῦμε νὰ ποῦμε, ὅτι τείνει νὰ πλησιάσει ἐκείνη τῶν «ἀτομικῶν» φιλοσόφων, ὅπως εἶναι ὁ Δημόκριτος καὶ ὁ Ἐπίκουρος.

Τὰ μέσα τοῦ 4ου π.Χ. αἰ. ἀποτελοῦν τὴν λεγομένη ἐποχὴ τοῦ Περικλέους ἢ τοῦ Χρυσοῦ Αἰώνα τῶν Ἀθηνῶν. Μὲ τὴν μελέτη τῶν προβλημάτων τῆς «Τριχοτομήσεως τυχούσας γωνίας», τοῦ «Διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου» καὶ τοῦ «Τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου», ἀσχολοῦνταν οἱ σοφιστές: Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος (527 π.Χ.), Ἱπποκράτης ὁ Χίος (430 π.Χ.), Ἀρχύτας ἐκ Τάραντος (430-365 π.Χ.), Μέναιχμος (350 π.Χ.) καὶ *ὁ ἀδελφὸς τοῦ τελευταίου Δεινόστρατος (350 π.Χ.), οἱ ὁποῖοι καὶ ἔδωσαν λύση σ' αὐτά, μὲ τὴν χρήση τῶν κωνικῶν τομῶν καὶ τῆς ὑπερβατικῆς καμπύλης* $\psi = \chi \cot(\pi\chi/2)$.

Τὰ παραπάνω προβλήματα ἦταν τὴν ἐποχὴ ἐκείνη γνωστὰ ὡς: «Τὰ τρία μεγάλα προβλήματα».

Περὶ τὸ 400 π.Χ., ἡ 'Αθήνα, ἂν καὶ ἡ πολιτική της ἐπιρροὴ εἶχε αἰσθητὰ ἐλαττωθεῖ, ἐξακολουθοῦσε νὰ παραμένει τὸ κέντρο τοῦ ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ. Τὴν ἐποχὴ ἐκείνη ἀνθοῦσε ἡ 'Ακαδημία τοῦ Πλάτωνος (τῆς ὁποίας συνέχεια εἶναι ἡ σημερινὴ 'Ακαδημία 'Αθηνῶν), ὁ δὲ Πλάτων καὶ οἱ ὁμοϊδεάτες του ἐπέδειξαν ἰδιαίτερο μεγάλο καὶ ζωηρὸ ἐνδιαφέρον γιὰ τὰ μαθηματικά. 'Ο 'Αρχύτας, ὁ Μέναιχμος καὶ ὁ Δεινόστρατος ἀνῆκαν ἢ ἦταν πολὺ στενὰ συνδεδεμένοι μὲ τὴν 'Ακαδημία τοῦ Πλάτωνος.

Κατὰ τὴν διάρκεια τῶν πρώτων πενήντα ἐτῶν τῆς λειτουργίας τῆς 'Ακαδημίας διεξήχθη ἔρευνα στὶς ἀκόλουθες περιοχές:

α) Μεθοδολογία τῶν Μαθηματικῶν ἢ τῶν Φυσικῶν 'Επιστημῶν ἐν γένει (διαλεκτική, ἀνάλυση, σύνθεση).

β) Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς Μεσοποταμιακῆς Ἄλγεβρας. 'Ο Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος (5ος αἰ. π.Χ.), ὁ διδάσκαλος τοῦ Πλάτωνος, καὶ ὁ Θεαίτητος συνεισέφεραν πολὺ στὴν ἔρευνα αὐτή. 'Η «Θεωρία τῶν 'Αναλογιῶν» τοῦ Εὐδόξου ἀνήκει ἐπίσης στὴν περιοχὴ αὐτή.

γ) 'Η μέθοδος διὰ τῆς «ἐξαντλήσεως» τοῦ Εὐδόξου (408-355 π.Χ.).

δ) Μελέτες ἐπὶ τῶν «Τριῶν Μεγάλων Προβλημάτων».

ε) Κωνικὲς Τομές.

Γιὰ πρώτη φορά, τότε, ἡ λέξη ΜΑΘΗΜΑ χρησιμοποιήθηκε μὲ τὴν ἔννοια ποὺ ἔχει σήμερα ἡ λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Οἱ κατακτήσεις ποὺ εἶχε κάνει ὁ Μέγας 'Αλέξανδρος ἐπιτάχυναν τὴν ἤδη μέχρι τότε ἀξιόλογη πολιτιστικὴ ἐπίδραση τῶν 'Αθηνῶν.

'Αργότερα, κατὰ τὴν ἐποχὴ τῶν Πτολεμαίων, τὸ κέντρο τοῦ πολιτισμοῦ μεταφέρθηκε στὴν 'Αλεξάνδρεια. Τὸ Μουσεῖο τῆς 'Αλεξανδρείας, τὸ ὁποῖο περιελάμβανε τὴν περίφημη «Βιβλιοθήκη τῆς 'Αλεξανδρείας» καὶ λειτουργοῦσε, ἐπίσης, καὶ ὡς Πανεπιστήμιο, εἶχε ἑκατοντάδες χιλιάδες τόμους βιβλίων.

Στὴν 'Αλεξάνδρεια βρίσκονταν τὰ 13 βιβλία τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ τοῦ Εὐκλείδη, τοῦ συγγράμματος ἐκείνου τὸ ὁποῖο ἀπετέλεσε, ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνες, τὸ ὑπόδειγμα γιὰ τὴν ἐκπόνηση ἄλλων σπουδαιοτάτων συγγραμμάτων, ὅπως τὰ ἀκόλουθα:

a) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, τοῦ Isaac Newton.

b) Ethics, τοῦ Spinoza.

'Η ἄποψη ἀρκετῶν ἱστορικῶν εἶναι, ὅτι ἡ μεθοδολογία ποὺ ἀκολούθησε ὁ Εὐ-

κλείδης πηγάζει ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη (384-322), ὁ ὁποῖος ἀφοῦ ἐμαθήτευσε στὴν Ἀκαδημία τοῦ Πλάτωνος, ἵδρυσε κατόπιν νέα σχολή, τὴν «Σχολὴ τῶν Περιπατητικῶν», τῆς ὁποίας πολλὰ δόγματα ἦταν ἀντίθετα μὲ ἐκεῖνα τῆς Ἀκαδημίας τοῦ Πλάτωνος.

Μιὰ ἄλλη ὁμάδα ἱστορικῶν ὑποστηρίζει, ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου τοῦ Εὐκλείδη βρίσκονται στὴν Ἐλαιατικὴ Σχολή.

Ὑπάρχουν τὰ πρωτότυπα ὁρισμένων μερῶν τοῦ 1ου Βιβλίου τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ στὸ ἔργο τοῦ Οἰνοπίδη τοῦ Χίου, ὁ ὁποῖος ὑπῆρξε μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος (450 π.Χ.), σύγχρονος τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Ἱπποκράτη τοῦ Χίου.

Ὁ 3ος αἰ. π.Χ. ὑπῆρξε ὁ χρυσὸς αἰώνας τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν. Ὁ Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος (287-212 π.Χ.), ὑπῆρξε ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός, φυσικός, μηχανικὸς καὶ τεχνολόγος τῆς ἀρχαιότητας. Τὸ ἔργο του ἀναφέρεται σὲ θέματα, ὅπως:

α) Εὕρεση ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου.

β) Ἀπόδειξη, διὰ τῆς μεθόδου τῆς «ἐξαντλήσεως» τῆς ἀκρίβειας ἑνὸς ἀποτελέσματος, ποὺ προέκυψε διὰ πειραματικῆς ὁδοῦ.

γ) Ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς τῆς σταθερᾶς, «π».

δ) Μελέτη ἑλίκων καὶ ἄλλων καμπύλων, σφαιρῶν καὶ κυκλικῶν κυλίνδρων.

ε) Στατική. Ὀπτικὴ καὶ ἐφαρμογὲς αὐτῶν.

Τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη ἐπέδρασε βαθύτατα καὶ καθοριστικὰ στὸ ἔργο τῶν μετέπειτα μαθηματικῶν.

Σύγχρονος τοῦ Ἀρχιμήδη ἦταν ὁ Ἀπολλώνιος ἐκ Πέργης (200 π.Χ.), στὸν ὁποῖον ὀφείλεται τὸ σύγγραμμα «Κωνικῶν Βιβλία», ἀποτελούμενο ἀπὸ ὀκτὼ βιβλία ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα ἔχει χαθεῖ. Ἡ γεωμετρικὴ θεωρία τῶν κωνικῶν τομῶν, ποὺ περιλαμβάνει τὸ ἐν λόγῳ σύγγραμμα, τὸ ὁποῖο δὲν διαφέρει πολὺ ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ σήμερα ἔχουμε στὴν διάθεσή μας, εἶχε πολὺ μεγάλη ἐπίδραση -ἰδίως- στοὺς ἐπιστήμονες τοῦ 17ου αἰώνα.

Ἄλλοι μαθηματικοὶ τῆς ἴδιας περιόδου ὑπῆρξαν, ὁ Ἐρατοσθένης ἐκ Συρίας (275-195 π.Χ.), ὁ ὁποῖος ἐπινόησε μέθοδο εὑρέσεως τῶν πρώτων ἀριθμῶν γνωστὴ μὲ τὸ ὄνομα «Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους» καὶ ὁ Ἵππαρχος (150 π.Χ.), ὁ ἐπονομαζόμενος «πατέρας τῆς Ἀστρονομίας», ὁ ὁποῖος κατάρτισε «πίνακα τῶν ἡμιτόνων».

Ἡ ἑλληνιστικὴ ἐπίδραση ἄρχισε νὰ μειώνεται τὸν 1ον αἰ. π.Χ., μὲ ἀποτέλεσμα νὰ συμβεῖ τὸ ἴδιο μὲ τὴν ἐπίδραση τῆς Ἀλεξανδρείας ὡς κέντρου πολιτισμοῦ.

Τὸ Μουσεῖο (ἡ Βιβλιοθήκη τῆς Ἀλεξανδρείας) κάηκε τὸ 48 π.Χ. καὶ ἀνοικοδομήθηκε ἀργότερα. Μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς ἐκείνης θὰ ἀναφέρομε τὸν Ἥρωνα (60 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος ἀνακάλυψε τὸν νόμο ἀνακλάσεως τοῦ φωτός, τὸν

Μενέλαο (100 μ.Χ.), ὁ ὁποῖος συνέγραψε τὰ «Σφαιρικά», τὸν Θέωνα ἐκ Σμύρνης (125 μ.Χ.), τὸν Πτολεμαῖο (150 μ.Χ.), συγγραφέα τῆς «Ἀλμαγέστης» (συλλογῆς ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων), τὸν Νικόμαχο (50-150 μ.Χ.), συγγραφέα τοῦ βιβλίου «Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγή», τὸν Διόφαντο (250 μ.Χ.), τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιστημονικὴ σταδιοδρομία δὲν εἶναι τελείως γνωστή, καὶ ὁ ὁποῖος συνέγραψε τὰ «Ἀριθμητικά», ἕνα σύγγραμμα ἀποτελούμενο ἀπὸ 13 βιβλία, ἀπὸ τὰ ὁποῖα διασώθηκαν τὰ ἕξη, καὶ τὰ ὁποῖα εἶχαν μεγάλη ἐπίδραση στὸ ἔργο τοῦ περίφημου Γάλλου μαθηματικοῦ Fermat (1601-1665) καὶ τέλος τὸν τελευταῖο πολὺ ἀξιόλογο μαθηματικὸ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης, τὸν Πάππο (300 μ.Χ.), ἔργο τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ «Συναγωγή», ἕνα 8τομο σύγγραμμα, τὸ ὁποῖο εἶχε πολὺ μεγάλη ἐπίδραση στὸ ἔργο τοῦ κορυφαίου Γάλλου μαθηματικοῦ Descartes (1596-1650). Τὸ σύγγραμμα αὐτὸ τοῦ Πάππου σώζεται μέχρι σήμερα.

Ἡ περίοδος ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν πτώση τῆς Δυτικῆς Ρωμαϊκῆς Αὐτοκρατορίας εἶναι μιὰ δύσκολη περίοδος γιὰ τὶς ἑλληνοαιγυπτιακὲς Θετικὲς Ἐπιστῆμες.

Τὸ Μουσεῖο (ἡ Βιβλιοθήκη τῆς Ἀλεξανδρείας) καταστράφηκε γιὰ δεύτερη φορὰ τὸ 392 μ.Χ. Ὁ Θέων ἐξ Ἀλεξανδρείας (300 μ.Χ.) καὶ ἡ κόρη του Ὑπατία (370-415; μ.Χ.), ἀσχολοῦνταν τὴν ἐποχὴ ἐκείνη μὲ τὴν ἑρμηνεία τῶν κλασικῶν κειμένων. Μεταξὺ τῶν κειμένων ποὺ διασώθηκαν περιλαμβάνονται τὰ σχόλια καὶ οἱ ἑρμηνεῖες τοῦ Πρόκλου (410-485 μ.Χ.) ποὺ ἀφοροῦν τὸ 1ο βιβλίο τῶν ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ τοῦ Εὐκλείδη.

Ἡ Ἀκαδημία Ἀθηνῶν ἔκλεισε τὸ 529 μ.Χ., κατόπιν ἐντολῆς τοῦ Αὐτοκράτορος Ἰουστινιανοῦ (527-565 μ.Χ.). Ὁ τελευταῖος Διευθυντὴς τῆς Ἀκαδημίας ὑπῆρξε ὁ Σιμπλίκιος, ὁ τελευταῖος τῶν νεοπλατωνικῶν φιλοσόφων, ὁ ὁποῖος σχολίασε καὶ ἑρμήνευσε τὸν Ἀριστοτέλη.

Λίγο μετὰ τὸ κλείσιμο τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἡ Ἀλεξάνδρεια κατελήφθη ἀπὸ τοὺς Μαυριτανούς, ὁπότε πολλοὶ ἐπιστήμονες καὶ ἄνθρωποι τῶν γραμμάτων κατέφυγαν στὴν Κωνσταντινούπολη, τὴν πρωτεύουσα τῆς Ἀνατολικῆς Αὐτοκρατορίας.

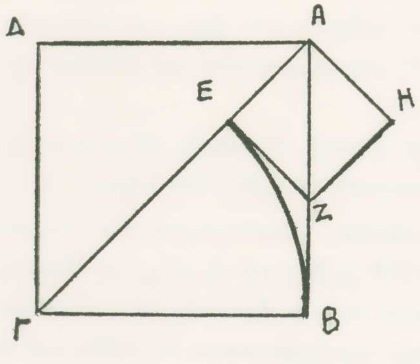
Παραθέτομε μιὰ γνωστὴ γιὰ τὴν ἁπλότητα καὶ κομψότητά της γεωμετρικὴ ἀπόδειξη τῆς προτάσεως:

> Ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ παντὸς τετραγώνου εἶναι μεγέθη ἀσύμμετρα μεταξύ τους.

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ καλοῦνται σύμμετρα ἂν ὑπάρχει κάποιο εὐθύγραμμο τμῆμα μήκους, δ, καὶ θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, μ, ν, ἔτσι ὥστε $(ΚΛ) = μδ$, $(ΜΝ) = νδ$. Ἂν τὰ μεγέθη ΚΛ, ΜΝ εἶναι σύμμετρα, τότε γιὰ συντομία γράφομε ΚΛ-δ-ΜΝ.

Ἀπόδειξη τῆς παραπάνω προτάσεως.

Ἔστω ΑΒΓΔ δοθὲν τετράγωνο. Ἔστω Ε ἡ τομὴ τῆς ΑΓ μὲ τὴν περιφέρεια ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν ΓΒ. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ στὸ Ε τέμνει τὴν ΑΒ στὸ σημεῖο Ζ. Ἀναγνωρίζεται εὔκολα ὅτι $ΕΑ = ΕΖ = ΖΒ$. Θέλομε νὰ ἀποδείξομε ὅτι τὰ μεγέθη ΑΓ, ΑΒ εἶναι ἀσύμμετρα. Θὰ ὑποθέσομε τὸ ἀντίθετο, ὅτι δηλαδὴ ΑΓ-δ-ΑΒ (γιὰ κάποιο δ) καὶ θὰ καταλήξομε σὲ ἄτοπο.



Ἡ ὑπόθεσή μας συνεπάγεται ὅτι ΑΕ-δ-ΑΒ ἤτοι ΑΕ-δ-ΑΖ. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΕ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΖ τοῦ νεοσχηματισθέντος τετραγώνου ΑΕΖΗ εἶναι μεγέθη σύμμετρα. Ἂν ἐπὶ τοῦ ΑΕΖΗ ἐπαναλάβομε τὴν παραπάνω διαδικασία καὶ συνεχίσομε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ἐπὶ τοῦ ἑκάστοτε προκύπτοντος νέου τετραγώνου κ.ο.κ., παρατηροῦμε ὅτι ἡ πλευρά (ἄρα καὶ ἡ διαγώνιος) κάθε νέου τετραγώνου ἔχει μῆκος τὸ ὁποῖο προκύπτει ἂν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀμέσως προηγουμένου τετραγώνου πολλαπλασιασθεῖ ἐπὶ $\sqrt{2} - 1 < 1$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν (καὶ τῶν διαγωνίων) τῶν ἐν λόγω τετραγώνων τείνει στὸ μηδέν. Κατὰ συνέπειαν γιὰ κάποιο ἀπ' τὰ τετράγωνα αὐτὰ θὰ ἔχομε ὅτι ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος θὰ εἶναι, ἡ κάθε μία, μικρότερη τοῦ δ, ἐνῶ τόσο ἡ πλευρὰ ὅσο καὶ ἡ διαγώνιος θὰ εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τοῦ δ! Ἄτοπο. Ἡ πρόταση ἀποδείχθηκε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Otto Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2nd edition. Providence: Brown University Press, 1957.

2. B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, 2nd edition, Oxford University Press, 1961.

3. *The Thirteen books of Euclid's Elements, tranlated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, by Sir Thomas L. Heath. 3 vols. New York: Dover Publications, 1956.

4. Asger Aaboe, *Episodes from the early history of mathematics*. The Mathematical Association of America.