befindenden vorgekühlten Flüssigkeit. Durch Einwirkung äusserer Wärmeentziehung wird ein Trockeneis erzeugt, welches absolut kompakt, kristallinisch, schwerbrechend und von einem spezifischen Gewicht ist, welches am meisten dem theoretischen nahesteht. Das so erzeugte Trockeneis, besitzt demzufolge Eigenschaften, die bis heute nicht einwandfrei erzielt werden konnten.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—Περὶ τῶν ἐξαιρετικῶν συνδυασμῶν τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων*, *ὑπὸ* ***Ἰωάννου Ἀν. Ἀναστασιάδου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

Ὁ Θ. Βαρόπουλος[1] ἔχει φανερώσει τὴν σημασίαν, διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν μιᾶς ἀλγεβροειδοῦς, τὴν ὁποίαν ἔχουσιν αἱ γραμμικαὶ σχέσεις αἱ ὑπάρχουσαι μεταξὺ τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζονται ὡς συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις ὁρίζει τὴν ἀλγεβροειδῆ.

Ὁ P. Montel[2], εἰσάγων τὴν βασικὴν ἔννοιαν τοῦ ἐξαιρετικοῦ συνδυασμοῦ, ἔδωσε μίαν ἄλλην ἔννοιαν, ἐπίσης ἐνδιαφέρουσαν, τὴν τῆς ἐξαιρετικῆς ἐνελίξεως.

Τέλος ὁ M. Ghermanescu[3], γενικεύων τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Montel διὰ τοὺς ὁμογενεῖς συνδυασμούς, εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τῶν πρωταρχικῶν ἐξαιρετικῶν συνδυασμῶν.

Αἱ τρεῖς αὗται ἔννοιαι, ἂν καὶ ἔχωσι τελείως διάφορον σημασίαν, ἔχουσιν ὅμως ἕνα κοινὸν σύνδεσμον. Εἶναι σχέσεις γραμμικαί, ὁμογενεῖς ἢ μή, μεταξὺ τῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὴν ἀλγεβροειδῆ ἢ τὸν συνδυασμόν.

Ἔστω τὸ σύστημα $\{f(z)\}$ ν ἀκεραίων συναρτήσεων

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_\nu(z)$$

καὶ θεωρήσωμεν τὸν συνδυασμὸν

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z) \tag{1}$$

ὅπου $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ εἶναι σταθεραί.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει κοινὴ ἐξαιρετικὴ ἐνέλιξις, ὅταν ὑπάρχωσι σταθεραὶ $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ τοιαῦται, ὥστε ὁ συνδυασμὸς (1) νὰ γίνεται μηδέν.

Θέσωμεν

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(i)} z^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

* **JEAN A. ANASTASSIADIS.—Sur les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières.**

[1] Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes, *Bull. de la Soc. Math. de France*, **53**, 1925, p. 23-34.

[2] Sur les familles complexes et leurs applications, *Acta Mathem.*, **49**, 1926, p. 115-161.

[3] Le théorème de Picard-Borel, *Annales de l'École Normale S^re*, **52**, 1935, p. 221-268.

Ἐὰν ὑπάρχῃ γραμμικὴ σχέσις, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1 \alpha_o^{(1)} + \lambda_2 \alpha_o^{(2)} + \ldots + \lambda_\nu \alpha_o^{(\nu)} = -\lambda_o$$

$$\lambda_1 \alpha_k^{(1)} + \lambda_2 \alpha_k^{(2)} + \ldots + \lambda_\nu \alpha_k^{(\nu)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots \infty)$$

καὶ ἡ ὁρίζουσα

$$D \equiv \| \alpha_j^i \| \qquad (j, i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

εἶναι μηδέν.

Ὁ προδιορισμὸς ἑπομένως τῶν συστημάτων $(\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$, τὰ ὁποῖα δίδουν τὰς ἀνεξαρτήτους γραμμικὰς σχέσεις, εἶναι πρόβλημα θεωρητικῶς ἁπλοῦν. Πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία ὁρίζουσα τάξεως $\nu - \lambda$ ἐκ τοῦ πίνακος τῶν συντελεστῶν α_h^k $(h, k = 1, 2 \ldots, \nu)$ διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ τοιαύτη, ὥστε ὅλαι αἱ ὁρίζουσαι τάξεως ἀνωτέρας νὰ εἶναι μηδὲν διὰ νὰ ὑπάρχωσι λ ἀνεξάρτητοι σχέσεις μὲ σταθεροὺς συντελεστάς.

Εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ οἱ πρωταρχικοὶ ἐξαιρετικοὶ συνδυασμοί, ἂν πρόκηται περὶ ὁμογενῶν συνδυασμῶν.

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ συνδυασμὸς

$$F(z) = \lambda_o + \lambda_1 f_1(z) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z)$$

μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων γραμμικῶς συναρτήσεων

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_\nu(z)$$

εἶναι ἐξαιρετικὸς τοῦ πρώτου τύπου, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει σχέσις τῆς μορφῆς

$$\lambda_o + \lambda_1 f_1(z) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z) = P(z) \qquad (2)$$

ὅπου $P(z)$ πολυώνυμον. Ἂν ὑπάρχωσι $k\, (\leqslant \nu - 1)$ τοιαῦτα πολυώνυμα, καλέσωμεν ἀντιστοίχως $m_1, m_2, \ldots, m_k$ τοὺς βαθμούς των καὶ m τὸν μεγαλύτερον μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ὀνομάσωμεν χαρακτηριστικὴν ὁρίζουσαν τάξεως n τὴν ὁρίζουσαν

$$D_n \equiv \| \alpha_j^i \| \qquad (j = n, n+1, \ldots, n+\nu-1;\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Αἱ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι τάξεως $m+1, m+2, \ldots$, εἶναι ὅλαι μηδέν, ἐνῷ ἡ D_m εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν m τῶν πολυωνύμων $P(z)$. Θεωροῦντες δὲ ἓν σύστημα ν ἐξισώσεων ἐκ τῶν

$$\lambda_1 \alpha_q^{(1)} + \lambda_2 \alpha_q^{(2)} + \ldots + \lambda_\nu \alpha_q^{(\nu)} = 0 \qquad (q \geqslant m+1)$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ἐξαιρετικοὺς συνδυασμοὺς τοῦ πρώτου τύπου.

Ἡ ἀοριστία, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος, ἐξηγεῖται εὐκόλως, διότι ὅλοι οἱ οὕτω προκύπτοντες συνδυασμοὶ εἶναι ὁμόλογοι καὶ ἀνήκουσιν εἰς τὴν αὐτὴν ἐξαιρετικὴν ὁμάδα.

Ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ὁ συνδυασμὸς

$$F(z) = \lambda_o + \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z)$$

μεταξὺ τῶν ἀνεξαρτήτων γραμμικῶς ἀκεραίων συναρτήσεων $f_i(z)$, αἵτινες ὑποτίθενται τάξεως πεπερασμένης, εἶναι ἐξαιρετικὸς τοῦ δευτέρου τύπου, ἤτοι ὅτι ὑπάρχει σχέσις τῆς μορφῆς

$$\lambda_o + \lambda_1 f_1(z) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z) = e^{P(z)}$$

ὅπου P(z) πολυώνυμον. Ἂν p εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου P(z) γνωρίζομεν ὅτι ὁ p δὲν εἶναι ποτὲ μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν τάξιν τῶν συναρτήσεων $f_i(z)$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἀπεδείξαμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

«Αἱ σταθεραὶ

$$\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$$

τῶν ἐξαιρετικῶν συνδυασμῶν τοῦ δευτέρου τύπου, ἢ τῶν βασικῶν ἐξαιρετικῶν συνδυασμῶν διὰ τοὺς ὁμογενεῖς συνδυασμούς, εἶναι αἱ λύσεις ἑνὸς συστήματος ὁμογενοῦς, τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πολυώνυμα ὡς πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀναπτυγμάτων τοῦ Taylor τῶν συναρτήσεων $f_i(z)$».

Ἡ ἀοριστία ἡ ὁποία θὰ παρουσιάζεται κατὰ τὴν λύσιν τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος ἐξηγεῖται ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω.

RÉSUMÉ

L'auteur veut exprimer les combinaisons exceptionnelles, homogènes ou non, des fonctions entières par rapport aux coefficients des fonctions données. Grâce aux théorèmes démontrés, on peut calculer exactement les combinaisons exceptionnelles d'un système $\{f(z)\}$ de ν fonctions, si les fonctions du système sont d'ordre fini.

ΓΕΩΠΟΝΙΑ.—Ἐπὶ μιᾶς τερατομορφίας ἄνθους κριθῆς*, *ὑπὸ* ***Σταύρου Παπανδρέου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάννου Πολίτου.

Ὡς γνωστόν, ἡ κριθή, ὡς καὶ ὅλα τὰ ἄλλα φθινοπωρινὰ σιτηρά, ἔχει ἄνθος περιλαμβάνον τρεῖς στήμονας καὶ ἕνα διχαλωτὸν ὕπερον. Τὰ δύο ταῦτα μέρη τοῦ ἄνθους εὑρίσκονται ἐγκεκλεισμένα, ἐντὸς τῶν λεπύρων οὕτως, ὥστε δὲν εἶναι ἐμφανῆ εἰμὴ μόνον εἰς τὸν παρατηρητήν, ὅστις θὰ διανοίξῃ μετὰ προσοχῆς τὰ λέπυρα ταῦτα καὶ θὰ ἐξετάσῃ αὐτὰ τῇ βοηθείᾳ φακοῦ.

Οἱ ἀσχολούμενοι εἰς τὴν μελέτην τῶν σιτηρῶν, τὴν παρακολούθησιν τῆς γονιμοποιήσεως καὶ ἰδίως τὰς διασταυρώσεις αὐτῶν, διαθέτουσι πολὺ ὑλικὸν διὰ τὰς παρατηρήσεις ταύτας.

Εἰς χῶρον εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς Πάρνηθος, παρὰ τὸ Σανατόριον, παραχωρηθέντα ὑπὸ τῆς διοικήσεως τοῦ Θεραπευτηρίου «Εὐαγγελισμός», ἐγκατεστήσαμεν πειραματικὸν ἀγρὸν μικρᾶς ἐκτάσεως πρὸς τὸν σκοπὸν νὰ παρατηρήσωμεν τὴν ἀντίδρασιν

* **STAVROS PAPANDRÉOU.—Sur la tératomorphie d'une fleur d'orge.**