ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Ὑπολογισμὸς ἀσυμμετρικῶν κατανομῶν συχνότητος**, *ὑπὸ* ***Θεοδώρου Δ. Μητσοπούλου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἰω. Ξανθάκη.

1. Εἰσαγωγή

Ὑπὸ τὸν ὅρον «ὑπολογισμὸς» νοεῖται ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία προσδιορισμοῦ τῆς συχνότητος μιᾶς ἀσυμμετρικῆς κατανομῆς, εἰς τυχοῦσαν περιοχὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον χρησιμοποιοῦνται σήμερον διάφοροι μέθοδοι, ὡς ἡ λογαριθμικὴ [**2**, σελ. 293][1], ἡ τοῦ μέτρου ἀσυμμετρίας [**2**, σελ. 299], ἡ διὰ τῶν καμπύλων Pearson [**1**, σελ. 12], ἡ διὰ τῶν πολυωνύμων Tchebycheff - Hermite [**3**, σελ. 155], κ. ἄ. Ἅπασαι αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ἀπαιτοῦν πολυπλόκους ὑπολογισμούς, εἰς τρόπον ὥστε νὰ καθίσταται, πρακτικῶς, δυσχερὴς ἡ χρησιμοποίησίς των.

Κατωτέρω ἐκτίθενται τρεῖς νέαι, πρωτότυποι, μέθοδοι ὑπολογισμοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ καλοῦνται, ἡ πρώτη «μέθοδος ἰσοπλάτου ἐξομοιώσεως», ἡ δευτέρα «μέθοδος ἰσοϋψοῦς ἐξομοιώσεως» καὶ ἡ τρίτη «μέθοδος ἰσοδιαστάτου συγκρίσεως». Αὗται ὑπερτεροῦν, καθ' ἡμᾶς, τῶν ἐν χρήσει μεθόδων εἰς ἁπλότητα καὶ ταχύτητα ὑπολογισμῶν, ἡ δὲ ἀκρίβεια τούτων εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ βαθμοῦ ἀσυμμετρίας, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἐν χρήσει μεθόδους, ἐξαρτωμένη μόνον ἐκ τοῦ βαθμοῦ προσεγγίσεως, πρὸς καταλλήλως ἐπιλεγομένας κανονικὰς κατανομάς. Ἡ οὕτω ἐπιτυγχανομένη ἀκρίβεια εἶναι ἐφάμιλλος ἢ καὶ ἀνωτέρα τῆς τῶν ἐν χρήσει μεθόδων.

Σύγκρισις τῶν διαφόρων μεθόδων ἐμφαίνεται, εἰς σχ. 5 καὶ πίνακας 1 ἕως 6.

2. Ὁρισμοί

α. **«Ἀριστερὸς ἢ δεξιὸς κλάδος»** μιᾶς Καμπύλης Συχνότητος (Κ. Σ.) θὰ καλῆται, ἀντιστοίχως, τὸ ἀριστερὸν ἢ δεξιὸν τμῆμα ταύτης, ὡς πρὸς τὴν μεγίστην τεταγμένην της.

β. **«Ἰσοϋψής»** θὰ καλῆται εἷς κλάδος Καμπύλης Συχνότητος Ἀσυμμετρικῆς Κατανομῆς (Κ. Σ. Α. Κ.), ὡς πρὸς ἀντίστοιχον κλάδον Καμπύλης Συχνότητος Κανονικῆς Κατανομῆς (Κ. Σ. Κ. Κ.), ὅταν ἔχῃ τὴν αὐτὴν μεγίστην τεταγμένην (y_m).

---

* TH. D. MITSOPOULOS, **Skewed frequency distributions calculation.**
Δρος Χημ. Μηχ)κοῦ, Ἐπιχειρησ. Ἐρευνητοῦ, Ἀναπληρωτοῦ Γεν. Δ)ντοῦ Ὑπηρεσίας Ἐπιστημονικῆς Ἐρεύνης καὶ Ἀναπτύξεως.

1. Οἱ ἐντὸς [. . .] ἀριθμοὶ ἀναφέρονται εἰς τὴν βιβλιογραφίαν ἥτις ἐμφαίνεται εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας.

γ. **«Ἰσόπλατος»** θὰ καλῆται, συμβατικῶς, εἷς κλάδος Κ. Σ. Α. Κ. ὡς πρὸς ἀντίστοιχον κλάδον Κ. Σ. Κ. Κ., τυπικῆς ἀποκλίσεως σ, ὅταν τὸ εὖρος τούτου ἰσοῦται πρὸς 3σ.

δ. **«Ἰσοδιάστατος»** θὰ καλῆται, συμβατικῶς, εἷς κλάδος Κ. Σ. Α. Κ. ὡς πρὸς ἀντίστοιχον κλάδον Κ. Σ. Κ. Κ. ὅταν εἶναι ταυτοχρόνως ἰσόπλατος καὶ ἰσοϋψὴς πρὸς τοῦτον.

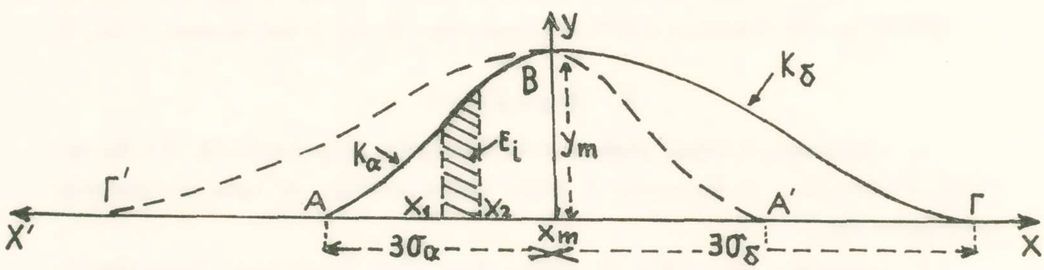
ε. **«Ἰσοδύναμοι»** θὰ καλοῦνται οἱ κλάδοι δύο ἢ περισσοτέρων Κ. Σ. ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ὁλικὴν συχνότητα.

Οἱ αὐτοὶ ὡς ἄνω ὁρισμοὶ θὰ χρησιμοποιοῦνται ὑπὸ ἀναλόγους συνθήκας καὶ διὰ τὰς Κ. Σ. ἐν τῷ συνόλῳ των.

3. Θεμελιώδη θεωρήματα

α. **Θεώρημα 1ον.** Ἐὰν οἱ δύο κλάδοι (K_α καὶ K_δ) μιᾶς Κ. Σ. Α. Κ. συμπίπτουν μὲ τοὺς ἀντιστοίχους κλάδους δύο Κ. Σ. Κ. Κ. τυπικῶν ἀποκλίσεων σ_α καὶ σ_δ ἀντιστοίχως, τότε τὸ ὑπὸ τὴν Κ. Σ. Α. Κ. ἐμβαδὸν (ε_ι) εἰς τυχοῦσαν περιοχὴν $x_1 x_2$ τῆς μεταβλητῆς παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\varepsilon_\iota = 2E \cdot \varphi_\iota \cdot \left(\frac{\sigma_\iota}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta}\right) \tag{1}$$



Σχ. 1.

ἔνθα: Ε εἶναι τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῆς Κ. Σ. Α. Κ.

φ_ι » ὁ λόγος τοῦ ε_ι πρὸς τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῆς ἀντιστοίχου ἐκ τῶν δύο Κ. Σ. Κ. Κ., παρεχόμενος ὑπὸ τῶν στατιστικῶν πινάκων.

σ_ι » ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τοῦ κλάδου τῆς Κ. Σ. Κ. Κ. εἰς ὃν ἐμπίπτει ἡ περιοχὴ $x_1 x_2$ (ἤτοι $\sigma_\iota = \sigma_\alpha$ ἢ $\sigma_\iota = \sigma_\delta$).

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν K_α καὶ K_δ (σχ. 1) οἱ κλάδοι τῆς Κ. Σ. Α. Κ. ΑΒΓ, ἰσοϋψοῦς πρὸς τὰς Κ. Σ. Κ. Κ. ΑΒΑ′ καὶ Γ′ΒΓ.

Θὰ εἶναι [**4**, σελ. 40] :

$$\frac{E_\iota}{E_\alpha + E_\delta} = \frac{E_\iota}{E} = \frac{\sigma_\iota}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta} \tag{2}$$

ἔνθα : E_α καὶ E_δ εἶναι τὰ ἐμβαδά, ἀντιστοίχως, τοῦ ἀριστεροῦ καὶ δεξιοῦ κλάδου τῆς Κ. Σ. Α. Κ.

E_ι εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κλάδου τῆς Κ. Σ. Κ. Κ. εἰς ὃν ἐμπίπτει ἡ περιοχὴ $x_1\, x_2$ (ἤτοι $E_\iota = E_\alpha$ ἢ $E_\iota = E_\delta$).

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει :

$$E_\iota = E \cdot \left(\frac{\sigma_\iota}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta}\right) \tag{3}$$

Ἐκ τῆς Κ. Σ. Κ. Κ. εἰς ἣν ἐμπίπτει ἡ περιοχὴ $x_1\, x_2$ θὰ εἶναι :

$$\varepsilon_\iota = 2E_\iota \cdot \varphi_\iota \tag{4}$$

ἢ κατόπιν τῆς (3) :

$$\varepsilon_\iota = 2E \cdot \varphi_\iota \cdot \left(\frac{\sigma_\iota}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta}\right) \quad \text{ὅ. ἔ. δ.} \tag{5}$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν Κ. Σ. Α. Κ. τῆς μορφῆς τοῦ 1ου θεωρήματος εἶναι μαθηματικῶς ἀκριβής, δι᾽ ὃ αἱ ἔχουσαι τὴν μορφὴν ταύτην Κ. Σ. Α. Κ. θὰ καλοῦνται περαιτέρω «ἰδανικαί».

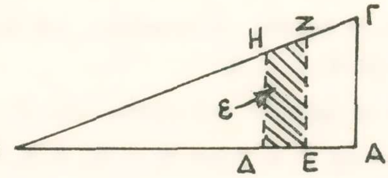
Παρατήρησις. Τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν Ε τῆς Κ. Σ. Α. Κ. εὑρίσκεται ὡς ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κλάδων, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται ἀκριβῶς, βάσει τῆς μεγίστης τεταγμένης (y_m) καὶ τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων τῶν κλάδων, ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως [**4**, σελ. 37] :

$$E = E_\alpha + E_\delta = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\alpha \cdot y_m}{2} + \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\delta \cdot y_m}{2} = \sqrt{2\pi} \cdot y_m \cdot \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\delta}{2}\right) \tag{6}$$

β. **Θεώρημα 2ον.** Τὸ ἐμβαδὸν (ε) τυχόντος τραπεζίου (ΔΕΖΗ) ἔχοντος τὰς μὲν κορυφάς του ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου (ΑΒΓ), τὰς δὲ βάσεις του παραλλήλους πρὸς τὴν ἑτέραν κάθετον πλευρὰν τοῦ τριγώνου παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\varepsilon = \frac{(\mathrm{BE} + \mathrm{B\Delta}) \cdot (\mathrm{BE} - \mathrm{B\Delta})}{\mathrm{AB}^2} \cdot \mathrm{E} \qquad (7)$$

ἔνθα Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.



Σχ. 2.

Ἀπόδειξις. Θὰ εἶναι:

$$\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{BEZ} - \mathrm{B\Delta H}}{\mathrm{AB\Gamma}} = \frac{\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{EZ} - \mathrm{B\Delta}\,.\,\mathrm{\Delta H}}{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{A\Gamma}} \qquad (8)$$

ἀλλά:

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} \qquad (9)$$

καί:

$$\mathrm{\Delta H} = \frac{\mathrm{B\Delta}\,.\,\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} \qquad (10)$$

ἐξ' οὗ:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{BE} \cdot \dfrac{\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} - \mathrm{B\Delta} \cdot \dfrac{\mathrm{B\Delta}\,.\,\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{A\Gamma}} \cdot \mathrm{E} = \frac{(\mathrm{BE}+\mathrm{B\Delta})\,.\,(\mathrm{BE}-\mathrm{B\Delta})}{\mathrm{AB}^2} \cdot \mathrm{E} \text{ ὅ.ἔ.δ.} \qquad (11)$$

γ. **Θεώρημα 3ον.** Ἐὰν δύο καμπύλαι, μονότονοι εἰς τὸ διάστημα δ, ἔχουν ἐντὸς τοῦ διαστήματος τούτου δύο κοινὰ σημεῖα (τομῆς ἢ ἐπαφῆς), τότε ἡ διαφορὰ τῶν ὑπὸ τὰς καμπύλας ταύτας ἀθροιστικῶν ἐμβαδῶν, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τοῦ ἑνὸς κοινοῦ σημείου, γίνεται ἀπολύτως μεγίστη εἰς τὸ ἕτερον κοινὸν σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροιστικῶν ἐμβαδῶν E_1 καὶ E_2 θὰ γίνῃ ἀπολύτως μεγίστη ἐκεῖ ὅπου μηδενίζεται ἡ α΄. παράγωγος τῆς διαφορᾶς ταύτης. Ἀλλὰ εἶναι:

$$\mathrm{E} = \int \sigma(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \qquad (12)$$

ἐξ οὗ:

$$(\mathrm{E})' = \sigma(\mathrm{x}) \qquad (13)$$

ἢ

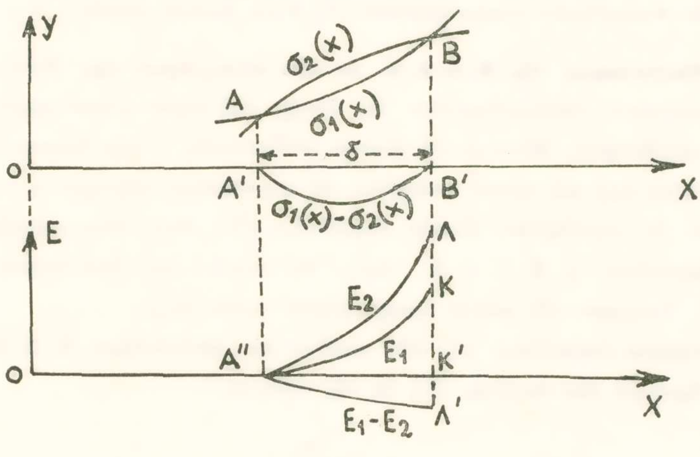
$$(\mathrm{E}_1)' = \sigma_1(\mathrm{x}) \qquad (14)$$

καὶ $$(E_2)' = \sigma_2(x) \tag{15}$$

ἄρα : $$(E_1 - E_2)' = \sigma_1(x) - \sigma_2(x) = 0 \tag{16}$$

ἢ $$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \tag{17}$$

Συνεπῶς ἡ διαφορὰ θὰ γίνῃ ἀπολύτως μεγίστη ἐκεῖ ὅπου ἐξισοῦνται αἱ ἀντίστοιχοι τεταγμέναι, ἤτοι εἰς τὸ ἑπόμενον κοινὸν σημεῖον (τομῆς ἢ ἐπαφῆς) ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 3.

Ἐὰν ἀντὶ τῶν ἐμβαδῶν ληφθῶσιν αἱ ἀντίστοιχοι ἀθροιστικαὶ συχνότητες, ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων, τότε προσδιορίζεται, στατιστικῶς, ἡ θέσις τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἀντιστοίχων Κ. Σ.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δύνανται νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ Κ.Σ.Α.Κ. κατὰ τὰς κατωτέρω περιγραφομένας μεθόδους.

4. Μέθοδος ἰσοπλάτου ἐξομοιώσεως

α. **Προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς κατανομῆς.** Λαμβάνονται ὡς παράμετροι τὸ ὁλικὸν εὗρος (ω) καὶ ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ (x_m). Τὸ εὗρος προσδιορίζεται ἀπ᾽ εὐθείας ἐκ τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων, ἡ δὲ ἐπικρατοῦσα τιμὴ ἐκ τῆς σχέσεως :

$$x_m = x_1 + c\,\frac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \tag{18}$$

ἔνθα : x_1 εἶναι τὸ κατώτερον ὅριον τοῦ ἐπικρατοῦντος διαστήματος τάξεως.
c εἶναι τὸ εὗρος τοῦ ἐπικρατοῦντος διαστήματος τάξεως.

Δx_1 καὶ Δx_2 εἶναι αἱ διαφοραὶ συχνότητος μεταξὺ τοῦ ἐπικρατοῦντος διαστήματος τάξεως καὶ τῶν γειτονικῶν του.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἄνω παραμέτρων γίνεται μετ' ἀκριβείας ἐὰν εἶναι γνωστὴ ἡ γραφικὴ ἢ ἡ ἀναλυτικὴ παράστασις τῆς Κ. Σ. Ἐὰν ὑπάρχουν μόνον στατιστικὰ δεδομένα τότε αἱ παράμετροι αὗται δύνανται νὰ ἐλέγχωνται διὰ τῆς χαράξεως τῆς ἀντιστοίχου Κ. Σ. ἡ ὁποία, κατὰ κανόνα, εἶναι ὁμαλή, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων (N) εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος, π.χ. $N > 1000$.

β. **Ὑπολογισμὸς τῆς Κ. Σ. Α. Κ. ἐκ τῶν παραμέτρων της.** Βάσει τῶν ἀνωτέρω παραμέτρων, ὑπολογιζομένων ἐφ' ἅπαξ, διὰ τυχὸν χαρακτηριστικὸν στοιχεῖον τοῦ πληθυσμοῦ, δύναται νὰ γίνεται μελλοντικῶς ὁ προσδιορισμὸς τῆς μερικῆς συχνότητος (η_ι) τοῦ αὐτοῦ στοιχείου, εἰς οἱανδήποτε περιοχὴν $x_1\, x_2$ τῆς μεταβλητῆς καὶ δι' οἱανδήποτε ὁλικὴν συχνότητα (N), ἄνευ νέων μετρήσεων. Πρὸς τοῦτο ἐξομοιοῦται ἡ Κ. Σ. Α. Κ. πρὸς «ἰσόπλατον καὶ ἰσοδύναμον ἰδανικὴν» Κ. Σ. Α. Κ. ἔχουσαν τὴν αὐτὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν (x_m).

Αἱ τυπικαὶ ἀποκλίσεις (σ_ι) τῶν κλάδων τῶν ἀντιστοίχων Κ. Σ. Κ. Κ. παρέχονται ἐξ ὁρισμοῦ (ὡς παράγρ. 2γ) ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\sigma_\iota = \frac{\omega_\iota}{3} \tag{19}$$

Ἀκολούθως αἱ μερικαὶ συχνότητες (η_ι) παρέχονται ἐκ τῆς σχέσεως (1), εἰς τὴν ὁποίαν τίθενται ἀντὶ τῶν ἐμβαδῶν αἱ ἴσαι πρὸς ταῦτα συχνότητες, ἤτοι :

$$\eta_\iota = 2N \cdot \varphi_\iota \cdot \left(\frac{\sigma_\iota}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta} \right) = 2N \cdot \varphi_\iota \left(\frac{\omega_\iota}{\omega} \right) \tag{20}$$

Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τυχούσης Κ. Σ. Α. Κ. κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 4.

5. Μέθοδος ἰσοϋψοῦς ἐξομοιώσεως

α. **Προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς κατανομῆς.** Λαμβάνονται ὡς παράμετροι ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ (x_m) καὶ αἱ τυπικαὶ ἀποκλίσεις (σ_ι) τῆς «ἰσοϋψοῦς καὶ ἰσοδυνάμου κατὰ κλάδους ἰδανικῆς» Κ. Σ. Α. Κ. Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ ὑπολογίζεται ὡς ἀνωτέρω (σχέσ. 18). Αἱ τυπικαὶ ἀποκλίσεις ὑπολογίζονται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως [**4**, σελ. 37] :

$$\sigma_\iota = \frac{2N_\iota}{\sqrt{2\pi} \cdot \varrho_m} \tag{21}$$

ἔνθα: N_ι ($=N_\alpha$ ἢ N_δ) εἶναι αἱ συχνότητες τῶν ἀριστεροῦ ἢ δεξιοῦ κλάδων τῆς Κ. Σ. Α. Κ. Αὗται λαμβάνονται ἀμέσως ἐκ τῶν στατιστικῶν δεδομένων, βάσει τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς.

ϱ_m εἶναι ἡ μεγίστη πυκνότης συχνότητος, προκύπτουσα, εἰς πρώτην προσέγγισιν, ὡς ὁ λόγος τῆς συχνότητος (η_m) τοῦ ἐπικρατοῦντος διαστήματος τάξεως, πρὸς τὸ εὖρος (c) τοῦ διαστήματος τάξεως [**4**, σελ. 30], ἤτοι:

$$\varrho_m = \frac{\eta_m}{c} \tag{22}$$

Παρατήρησις. Ἡ ϱ_m δύναται νὰ προσδιορισθῇ μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\varrho_m = \frac{\eta_m}{c} \cdot \left(\frac{0{,}3989}{\alpha}\right) \tag{23}$$

ἔνθα α εἶναι ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης σχετικῆς συχνότητος κανονικῆς κατανομῆς εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς ἕκαστον κλάδον τμήματος τοῦ ἐπικρατοῦντος διαστήματος τάξεως διὰ $\sigma = 1$. Αὕτη λαμβάνεται ἀμέσως ἐκ τῶν σχετικῶν στατιστικῶν πινάκων καὶ διαφέρει ἐλάχιστα τοῦ 0,3989 διὰ μικρὰ διαστήματα τάξεως.

β. **Ὑπολογισμὸς τῆς Κ. Σ. Α. Κ. ἐκ τῶν παραμέτρων της.** Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μερικῆς συχνότητος (η_ι) εἰς τυχοῦσαν περιοχὴν $x_1 x_2$ γίνεται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν στατιστικῶν πινάκων κανονικῆς κατανομῆς, ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\eta_\iota = 2\varphi_\iota \cdot N_\iota \tag{24}$$

ἔνθα: φ_ι εἶναι ἡ σχετικὴ συχνότης εἰς τὴν περιοχὴν $x_1 x_2$.

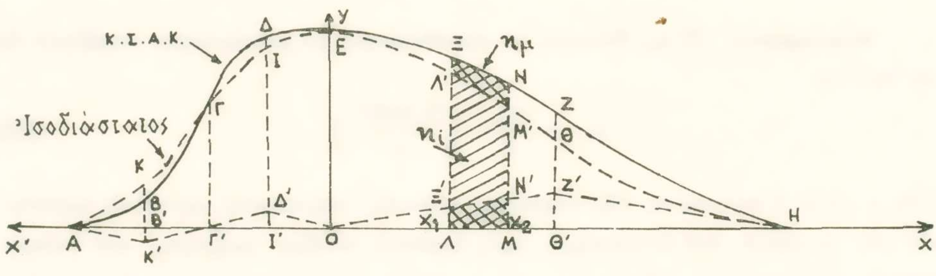
N_ι εἶναι ἡ ὁλικὴ συχνότης τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς τὴν περιοχὴν $x_1 x_2$ κλάδου τῆς Κ. Σ. Α. Κ. Αὕτη ὑπολογίζεται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως [**4**, σελ. 40]:

$$N_\iota = \frac{\sigma_\iota \cdot N}{\sigma_\alpha + \sigma_\delta} \tag{25}$$

Συγκριτικὸν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἐμφαίνεται εἰς πίνακα 5.

6. Μέθοδος ἰσοδιαστάτου συγκρίσεως

α. **Ἀρχὴ τῆς μεθόδου.** Ἡ μερικὴ συχνότης (η) εἰς τυχοῦσαν περιοχὴν $x_1 x_2$ (σχ. 4) τῆς μεταβλητῆς, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μερικῶν συχνοτήτων τῆς «ἰσοδιαστάτου ἰδανικῆς» ($\eta_\varkappa$) καὶ τῆς τοιαύτης (η_μ) τοῦ μηνίσκου ΕΖΗΘ ὅστις σχηματίζεται μεταξὺ τῆς Κ. Σ. Α. Κ. καὶ τῆς «ἰσοδιαστάτου», ἐντὸς τῶν γειτονικῶν πρὸς τὴν περιοχὴν $x_1 x_2$ κοινῶν σημείων των (τομῆς ἢ ἐπαφῆς). Ἡ η_κ λαμβάνεται πάντοτε θετική, ἡ δὲ η_μ λαμβάνεται ὡς θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἐφ' ὅσον ἡ Κ. Σ. Α. Κ. εὑρίσκεται ἀντιστοίχως ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς «ἰσοδιαστάτου» εἰς τὴν περιοχὴν $x_1 x_2$. Τὸ ἐμβαδὸν (ἄρα καὶ ἡ συχνότης) ἑκάστου μηνίσκου (π. χ. τοῦ ΕΖΗΘ) θεωρεῖται, κατὰ προσέγγισιν, ὡς ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΘ′Ζ′ καὶ Ζ′Θ′Η, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν (ΟΘ′ καὶ Θ′Η) ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ἀνοίγματος



Σχ. 4.

(ΟΗ) τοῦ μηνίσκου καὶ τὴν ἑτέραν (Θ′Ζ′) ἴσην πρὸς τὴν τεταγμένην (ΘΖ) τοῦ μηνίσκου εἰς τὸ μέσον του. Ἡ η_μ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν Μ′ΝΞΛ′, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς περίπου ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΜΝ′Ξ′Λ, καὶ τοῦτο προσδιορίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (7) τοῦ 2ου θεμελιώδους θεωρήματος ἀνωτέρω, συναρτήσει τῶν ἀποστάσεων ΟΜ καὶ ΟΛ τῶν ὁρίων τῆς περιοχῆς $x_1 x_2$ ἀπὸ τοῦ γειτονικοῦ κοινοῦ σημείου (τομῆς ἢ ἐπαφῆς) καὶ τῆς ὁλικῆς συχνότητος (M_i) τοῦ μηνίσκου, περὶ ἧς κατωτέρω (παρ. 6β (5)).

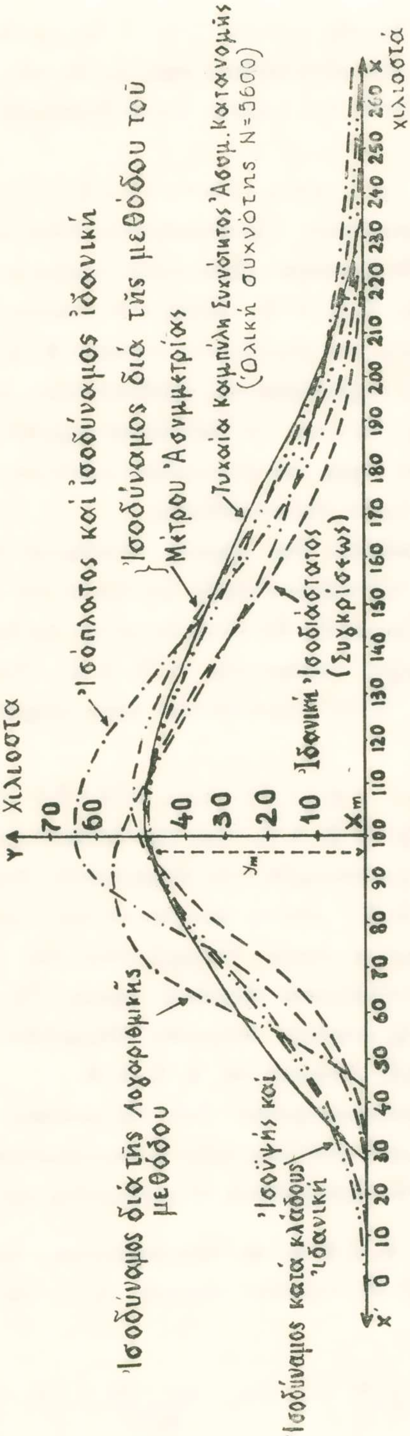
β. **Προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῆς κατανομῆς.** Λαμβάνονται αἱ κατωτέρω παράμετροι, προσδιοριζόμεναι ὡς ἀκολούθως:

1) Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ (x_m): Ὡς παράγρ. 4α ἀνωτέρω.

2) Τὸ εὖρος (ω): Ὡς παράγρ. 4α ἀνωτέρω. Ἐκφράζεται ὡς διαφορὰ τῶν ἀκραίων τιμῶν του.

3) Ὁ λόγος (Φ / Ν) τῶν ὁλικῶν συχνοτήτων τῆς «ἰσοδιαστάτου» καὶ τῆς Κ. Σ. Α. Κ. Ἐκ τούτων ἡ μὲν Ν προσδιορίζεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων, ἡ δὲ Φ ὡς ἄθροισμα τῶν ὁλικῶν συχνοτήτων (Φ_α καὶ Φ_δ) τῶν κλάδων τῆς «ἰσοδιαστάτου», αἵτινες προσδιορίζονται ἐκ τῆς σχέσεως [**4**, σελ. 37]:

$$\Phi_\iota = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\iota \cdot y_m \tag{26}$$



Σύγκρισις διαφόρων μεθόδων ὑπολογισμοῦ ἀσυμμετρικῶν κατανομῶν

Σχ. 5.

Ἡ σ_ι ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως (19), ἡ δὲ y_m ἐκ τῆς σχέσεως (22) ἢ (23) ἀνωτέρω, δεδομένου ὅτι αὕτη ἰσοῦται πρὸς ϱ_m [**4**, σελ. 30].

Ὁ λόγος Φ/Ν ἐκφράζεται ὑπὸ μορφὴν ἁπλοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ 4 τοὐλάχιστον δεκαδικὰ ψηφία.

4) Αἱ θέσεις τῶν σημείων τομῆς (x_τ/ω) μεταξὺ τῆς Κ.Σ.Α.Κ. καὶ τῆς «ἰσοδιαστάτου». Προσδιορίζονται βάσει τοῦ 3ου θεμελιώδους θεωρήματος, ὡς παράγρ. 3γ ἀνωτέρω. Πρὸς τοῦτο λαμβάνονται αἱ κατὰ κλάδον ἀθροιστικαὶ συχνότητες τῆς Κ.Σ.Α.Κ. (βάσει τῶν στατιστικῶν παρατηρήσεων) καὶ τῆς «ἰσοδιαστάτου» (βάσει τῶν στατιστικῶν πινάκων Κ.Σ.Κ.Κ.). Ἐκεῖ ὅπου ἡ διαφορὰ τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων τῆς «ἰσοδιαστάτου» ἀπὸ τῆς Κ.Σ.Α.Κ. καταστῇ ἀπολύτως μεγίστη, θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τομῆς. Ἡ ἀκριβὴς θέσις τούτου, καθὼς καὶ τὸ εὖρος τοῦ ἀντιστοίχου μηνίσκου, εὑρίσκονται ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Ὁ λόγος x_τ/ω ἐκφράζεται ὑπὸ μορφὴν ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὴν τετμημένην τοῦ σημείου τομῆς (μὲ ἀρχὴν τὴν x_m) καὶ παρονομαστὴν τὸ ὁλικὸν εὖρος ω. Προφανῶς θὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς διὰ τὸν ἀριστερὸν καὶ θετικὸς διὰ τὸν δεξιὸν κλάδον τῆς Κ.Σ.Α.Κ. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα σημεῖα τομῆς, ταῦτα παρατίθενται κατὰ σειρὰν ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ πρὸς τὸν δεξιὸν κλάδον.

5) Αἱ σχετικαὶ συχνότητες (M_ι/N) τῶν μηνίσκων τῶν σχηματιζομένων μεταξὺ τῆς Κ.Σ.Α.Κ. καὶ τῆς «ἰσοδιαστάτου». Ἡ M_ι ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπολύτως μεγίστην διαφορὰν τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων τῆς «ἰσοδιαστάτου» ἀπὸ τῆς Κ.Σ.Α.Κ., αἵτινες προκύπτουν κατὰ τὸν ὡς ἄνω προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σημείου τομῆς. Ἐκφράζονται ὑπὸ μορφὴν ἀλγεβρικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ μὲ 4 τοὐλάχιστον δεκαδικὰ ψηφία. Τὸ ἀλγεβρικὸν σημεῖον προκύπτει αὐτομάτως ἐκ τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς. Παρατίθενται κατὰ σειρὰν ἐκ τῆς ἀριστερᾶς πρὸς τὴν δεξιὰν πτέρυγα τῆς Κ.Σ.Α.Κ.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς μεθόδου παραμέτρων εἶναι μεγαλύτερος τῶν προεκτεθεισῶν μεθόδων, ἀλλὰ ἡ ἐπιτυγχανομένη ἀκρίβεια εἶναι, κατὰ κανόνα, μεγαλυτέρα, δυναμένη ἐνίοτε νὰ προσεγγίσῃ τὴν ἀπόλυτον.

γ. **Ὑπολογισμὸς τῆς Κ.Σ.Α.Κ. ἐκ τῶν παραμέτρων της.** Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μερικῆς συχνότητος (η_ι) εἰς τυχοῦσαν περιοχὴν $x_1\,x_2$ τῆς μεταβλητῆς παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\eta_\iota = \eta_\kappa + \eta_\mu = 2\Phi \cdot \varphi_\iota \cdot \left(\frac{\omega_\iota}{\omega}\right) + \frac{(x_2' - x_1') \cdot (x_2' + x_1')}{(\delta/2)^2} \cdot \left(\frac{M_\iota}{N}\right) \cdot \frac{N'}{2} \quad (27)$$

ἔνθα: η_κ εἶναι ἡ μερικὴ συχνότης τῆς «ἰσοδιαστάτου» εἰς περιοχὴν $x_1 x_2$

η_μ » ἡ μερικὴ συχνότης τοῦ μηνίσκου εἰς περιοχὴν $x_1 x_2$

Φ » ἡ ὁλικὴ συχνότης τῆς «ἰσοδιαστάτου» (ὡς παρ. 6β (3))

φ_ι » ἡ σχετικὴ συχνότης τῆς «ἰσοδιαστάτου» εἰς περιοχὴν $x_1 x_2$

δ » τὸ εὖρος τοῦ ἀντιστοίχου μηνίσκου (ὡς παρ. 6β (4))

ω_ι » τὸ εὖρος τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου τῆς Κ. Σ. Α. Κ.

ω » τὸ ὁλικὸν εὖρος τῆς Κ. Σ. Α. Κ.

N' » ἡ ὁλικὴ συχνότης τῆς Κ. Σ. Α. Κ.

M_ι / N » ἡ σχετικὴ συχνότης τοῦ ἀντιστοίχου μηνίσκου (παράμετρος)

x_1' καὶ x_2' » αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν τετμημένων τῶν ὁρίων x_1 καὶ x_2 μὲ ἀρχὴν τὸ πλησιέστερον πρὸς ἕκαστον ὅριον κοινὸν σημεῖον μεταξὺ Κ. Σ. Α. Κ. καὶ «ἰσοδιαστάτου», ἐξαγόμενον ἀμέσως ἐκ τῶν παραμέτρων τῆς κατανομῆς. Προφανῶς ἐὰν τὰ ὅρια x_1 καὶ x_2 κεῖνται ἑκατέρωθεν ἑνὸς κοινοῦ σημείου, ἢ τοῦ μέσου τοῦ ἀνοίγματος τοῦ ὑπερκειμένου μηνίσκου, τότε ἡ περιοχὴ $x_1' x_2'$ θεωρεῖται ὡς ἄθροισμα δύο μερικῶν τοιούτων, μὲ ἐνδιάμεσον ὅριον τὸ σημεῖον τοῦτο.

Συγκριτικὸν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ἐμφαίνεται εἰς πίνακα 6.

Γραφικὴ παράστασις ἐφαρμογῆς τῶν προεκτεθεισῶν μεθόδων, ὡς καὶ τῶν συνηθεστέρων ἐκ τῶν ἐν χρήσει, ἤτοι τῆς λογαριθμικῆς καὶ τῆς τοῦ μέτρου ἀσυμμετρίας, ἐμφαίνεται εἰς σχεδιάγραμμα 5, διὰ τὴν αὐτὴν Κ. Σ. Α. Κ. χαραχθεῖσαν τυχαίως.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bricas, N.: Le systeme de Courbes de Pearson. Ἀθῆναι, 1949.

2. Croxton, F. - Cowden, D.: Applied General Statistics - Prentice Hall, 1948.

3. Kendall, M. G - Stuart, A.: The Advanced Theory of Statistics, Griffin, 1963.

4. ΜΗΤΣΟΠΟΥΛΟΥ, Θ.: Συμβολὴ εἰς τὴν σπουδὴν καὶ ἀξιοποίησιν βασικῶν στατιστικῶν ἐννοιῶν. Ἀθῆναι, 1969. (Διδακτορικὴ Διατριβή).

Π Ι Ν Α Ξ 1

Μέθοδος μέτρου ἀσυμμετρίας

Π α ρ ά μ ε τ ρ ο ι : $\bar{x} = 117{,}7$ χιλ., $\sigma = 42{,}7$ χιλ., $\alpha_3 = +0{,}226$ $N = 5600$

Διάστημα τάξεως	$x = \bar{x}$ — ὅρ./ κατώτ.	ἀνώτ.	x/σ	$F_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	$F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	$\alpha_3 F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	$F_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \alpha_3 F_2\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	Σχετικὴ συχνότης	Μερικὴ Συχνότης Ὑπολογισθεῖσα	Πραγματικὴ	Σφάλμα
... <0	—∞		—∞	0,5000	— 0,0665	— 0,0150	0,5150	0,0007	4	—	4
0 - 10	117,7		2,756	0,4971	— 0,0763	— 0,0172	0,5143	0,0018	10	—	10
10 - 20	107,7		2,522	0,4941	— 0,0813	— 0,0184	0,5125	0,0039	22	—	22
20 - 30	97,7		2,288	0,4889	— 0,0872	— 0,0197	0,5086	0,0077	43	3	40
30 - 40	87,7		2,054	0,4800	— 0,0925	— 0,0209	0,5009	0,0136	76	84	8
40 - 50	77,7		1,820	0,4656	— 0,0958	— 0,0217	0,4873	0,0222	124	164	40
50 - 60	67,7		1,585	0,4436	— 0,0951	— 0,0215	0,4651	0,0334	187	235	48
60 - 70	57,7		1,351	0,4117	— 0,0885	— 0,0200	0, 4317	0,0468	262	308	46
70 - 80	47,7		1,117	0,3679	— 0,0754	— 0,0170	0,3849	0,0607	340	376	36
80 - 90	37,7		0,883	0,3114	— 0,0566	— 0,0128	0,3242	0,0743	416	440	24
90 - 100	27,7		0,649	0,2419	— 0,0353	— 0,0080	0,2499	0,0853	478	480	2
100 - 110	17,7		0,415	0,1610	— 0,0160	— 0,0036	0,1646	0,0925	518	476	42
110-117,7	7,7		0,180	0,0714	— 0,0032	— 0,0007	0,0721				
								0,0929	520	470	50
117,7-120		2,3	0,054	0,0215	+ 0,0030	+ 0,0007	0,0208				
120 - 130		12,3	0,288	0,1133	+ 0,0080	+ 0,0018	0,1115	0,0907	508	450	58
130 - 140		22,3	0,522	0,1992	+ 0,0242	+ 0,0055	0,1937	0,0822	460	414	46
140 - 150		32,3	0,756	0,2752	+ 0,0450	+ 0,0102	0,2650	0,0713	399	365	34
150 - 160		42,3	0,990	0,3389	+ 0,0657	+ 0,0148	0,3241	0,0591	331	315	16
160 - 170		52,3	1,225	0,3895	+ 0,0822	+ 0,0186	0,3712	0,0471	264	274	10
170 - 180		62,3	1,460	0,4279	+ 0,0924	+ 0,0209	0,4070	0,0358	200	239	39
180 - 190		72,3	1,694	0,4549	+ 0,0961	+ 0,0217	0,4332	0,0262	147	195	48
190 - 200		82,3	1,928	0,4731	+ 0,0947	+ 0,0214	0,4517	0,0185	104	143	39
200 - 210		92,3	2,161	0,4846	+ 0,0901	+ 0,0204	0,4642	0,0125	70	93	23
210 - 220		102,3	2,396	0,4917	+ 0,0844	+ 0,0191	0,4726	0,0084	47	53	6
220 - 230		112,3	2,630	0,4957	+ 0,0768	+ 0,0174	0,4783	0,0057	32	20	12
230 - 240		122,3	2,864	0,4779	+ 0,0744	+ 0,0168	0,4811	0,0028	16	3	13
240 - 250		132,3	3,100	0,4990	+ 0,0712	+ 0,0161	0,4829	0,0018	10	—	10
250<...		+∞	+∞	0,5000	+ 0,0665	+ 0,0150	0,4850	0,0021	12	—	12
								1,0000	5600	5600	738

Ὁλικὸν Σφάλμα : $\varepsilon = \frac{738 \times 100}{5600} = 13{,}2\,\%$ (Ὑπολογισμὸς παραμέτρων εἰς πίν. 2)

Π Ι Ν Α Ξ 2

Ὑπολογισμὸς παραμέτρων

Διαστήματα τάξεως	Μέσον διαστήματος τάξεως	Συχνότης (η)	Διαφορὰ ἀπὸ μηδενὸς (δ)	η . δ	η . δ²	η . δ³
20- 30	25	3	— 9	— 27	243	— 2187
30- 40	35	84	— 8	— 672	5376	—43008
40- 50	45	164	— 7	—1148	8036	—56252
50- 60	55	235	— 6	—1410	8460	—50760
60- 70	65	308	— 5	—1540	7700	—38500
70- 80	75	376	— 4	—1504	6016	—24064
80- 90	85	440	— 3	—1320	3960	—11880
90-100	95	480	— 2	— 960	1920	— 3840
100-110	105	476	— 1	— 476	476	— 476
110-120	$115 = \bar{x}_0$	470	0	0	0	0
120-130	125	450	1	450	450	450
130-140	135	414	2	828	1656	3312
140-150	145	365	3	1095	3285	9855
150-160	155	315	4	1260	5040	20160
160-170	165	274	5	1370	6850	34250
170-180	175	239	6	1434	8604	51624
180-190	185	195	7	1365	9555	66885
190-200	195	143	8	1144	9152	73216
200-210	205	93	9	837	7533	67797
210-220	215	53	10	530	5300	53000
220-230	225	20	11	220	2420	26620
230-240	235	3	12	36	432	5184
		5600		+1512	102464	+181386

$$\nu_1 = c\,\frac{\Sigma\eta\delta}{N} = 10\,\frac{(+1512)}{5600} = +2{,}70$$

$$\nu_2 = c^2\,\frac{\Sigma\eta\delta^2}{N} = 100\,\frac{102464}{5600} = 1830$$

$$\nu_3 = c^3\,\frac{\Sigma\eta\delta^3}{N} = 1000\,\frac{(+181386)}{5600} = +32390$$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \nu_1 = 115 + 2{,}7 = 117{,}7$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 1830 - 7{,}29 = 1822{,}71, \quad \sigma = \sqrt{\mu_2} = 42{,}7$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\,\nu_2 + 2\nu_1^3 = 32390 - 17567 + 39 = +17606$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{(+17606)}{(42{,}7)^3} = +0{,}226$$

Π Ι Ν Α Ξ 3

Λογαριθμική μέθοδος

$Q_1 = 80 + \frac{210 . 10}{440} = 85,2$ $\qquad$ $Q_2 = 110 + \frac{234 . 10}{470} = 115$ $\qquad$ $Q_3 = 140 + \frac{300 . 10}{365} = 148,2$

'Αρχή : $x_0 = 29$ $\qquad -29 \qquad\qquad -29 \qquad\qquad -29$

$\qquad\qquad\qquad 56,2 \qquad\qquad 86 \qquad\qquad 119,2$

Παράμετροι :

$$\text{Λογ. } \bar{x} = \frac{\text{λογ. } 56,2 + \text{λογ. } 119,2 + 1,2554 \,.\, \text{λογ. } 86}{3,2554} = 1,92130 \qquad (\bar{x} = 83,43 + 29 = 112,43)$$

$$\text{Λογ. } S = 0,7413 \,.\, (\text{λογ. } 119,2 - \text{λογ. } 56,2) = 0,24206 \qquad N = 5.600$$

Διαστήματα Τάξεως		Λογ. ορίων		λογ. x =	λογ. x	'Αθροιστικὸν ποσοστὸν	Σχετικὴ συχνότης	Μερικὴ συχνότης (η_i)		
Μὲ ἀρχὴν $x_0 = 0$	Μὲ ἀρχὴν $x_0 = 29$	Κατωτέρ.	'Ανωτέρ.	= | λογ. $\bar{x}$ — — λογ. ὁρ |	λογ. S		(φ_i)	'Υπολογισθεῖσα	Πραγματικὴ	Σφάλμα
. . . < 30	. . . < 1	— ∞		— ∞	— ∞	0,5000	—	—	3	3
30 - 40	1 - 11	0,00000		0,92130	3,806	0,5000	—	—	84	84
40 - 50	11 - 21	1,04139		0,87991	3,635	0,5000	0,0067	38	164	126
50 - 60	21 - 31	1,32222		0,59908	2,475	0,4933	0,0312	175	235	60
60 - 70	31 - 41	1,49136		0,42994	1,776	0,4621	0,0633	354	308	46

70 - 80	41 - 51	1,61278		0,30852	1,275	0,3988	0,0874	489	376	113
80 - 90	51 - 61	1,70757		0,21373	0,883	0,3114	0,0984	551	440	111
90 - 100	61 - 71	1,78533		0,13597	0,562	0,2130	0,0993	556	480	76
100 - 110	71 - 81	1,85126		0,07004	0,289	0, 1137	0,0926	519	476	43
110-112,43	81-83,43	1,90849		0,01281	0,053	0,0211				
							0,0831	465	470	5
112,43-120	83,43-91		1,95904	0,03774	0,156	0,0620				
120 - 130	91 - 101		2,00432	0,08302	0,344	01,346	0,0726	407	450	43
130 - 140	101 - 111		2,04532	0,12402	0,512	0,1957	0,0611	342	414	72
140 - 150	111 - 121		2,08279	0,16149	0,667	0,2476	0,0519	291	365	74
150 - 160	121 - 131		2,11727	0,19597	0,809	0,2907	0,0431	241	315	74
160 - 170	131 - 141		2.14922	0,22792	0,941	0,3267	0,0360	202	274	72
170 - 180	141 - 151		2,17898	0,25768	1,064	0,3563	0,0296	166	239	73
180 - 190	151 - 161		2,20683	0,28553	1,179	0,3808	0,0245	137	195	58
190 - 200	161 - 171		2,23300	0,31170	1,288	0,4011	0,0203	114	143	29
200 - 210	171 - 181		2,26007	0,33877	1,399	0,4190	0,0179	100	93	7
210 - 220	181 - 191		2,28103	0,35973	1,486	0,4314	0,0124	69	53	16
220 - 230	191 - 201		2,30320	0,38190	1,578	0,4428	0,0114	64	20	44
230 - 240	201 - 211		2,32428	0,40298	1,655	0,4520	0,0092	52	3	49
240 - 250	211 - 221		2,34439	0,42309	1,748	0,4597	0,0077	43	—	43
250 - 260	221 - 231		2,36361	0,44231	1,827	0,4662	0,0065	36	—	36
260 - 270	231 - 241		2,38202	0,46072	1,903	4,715	0,0053	30	—	30
270 - 280	241 - 251		2,39967	0,47836	1,976	0,4760	0,0045	25	—	25
280 - 290	251 - 261		2,41664	0,49534	2,046	0,4796	0,0036	20	—	20
290< . . .	261< . . .		+ ∞	+ ∞	+ ∞	0,5000	0,0204	114	—	114
							1,0000	5600	5600	1546

$$\text{῾Ολικὸν Σφάλμα : } \varepsilon = \frac{1546 \times 100}{5600} = 27{,}5\,\%$$

Π Ι Ν Α Ξ 4

Μέθοδος ἰσοπλάτου ἐξομοιώσεως

Π α ρ ά μ ε τ ρ ο ι :

$x_m = 100$ χιλ.
$\omega = 235 - 29 = 206$ χιλ.
$(\omega_\alpha = 100 - 29 = 71$ χιλ.)
$(\omega_\delta = 235 - 100 = 135$ χιλ.)

$\sigma_\alpha = \frac{71}{3} = 23{,}7$ χιλ.

$\sigma_\delta = \frac{135}{3} = 45$ χιλ.

$N = 5600$

Διαστήματα	$x = \mid x_m - ὅρ. \mid$		$\frac{x}{\sigma_i}$	Ἀθροιστικὸν ποσοστὸν	Σχετικὴ Συχνότης (φ_i)	Μερικὴ Συχνότης (η_i)		
	κατώτ.	ἀνώτ.				Ὑπολογισθεῖσα	Πραγματική	Σφάλμα
<20	— ∞		— ∞	0,5000	0,0005	2	—	2
20- 30	80		3,376	0,4995	0,0011	4	3	1
30- 40	70		2,953	0,4984	0,0041	16	84	68
40- 50	60		2,531	0,4943	0,0117	45	164	119
50- 60	50		2,110	0,4826	0,0283	109	235	126
60- 70	40		1,688	0,4543	0,0570	220	308	88
70- 80	30		1,266	0,3973	0,0967	374	376	2
80- 90	20		0,844	0,3006	0,1371	530	440	90
90-100	10		0,422	0,1635	0,1635	632	480	152
100-100		10	0,222	0,0879	0,0879	645	476	169
110-120		20	0,444	0,1714	0,0835	609	470	139
120-130		30	0,667	0,2476	0,0762	559	450	109
130-140		40	0,889	0,3130	0,0654	480	414	66
140-150		50	1,111	0,3667	0,0537	394	365	29
150-160		60	1,333	0,4087	0,0420	308	315	7
160-170		70	1,556	0,4401	0,0314	231	274	43
170-180		80	1,778	0,4623	0,0222	163	239	76
180-190		90	2,000	0,4772	0,0149	110	195	85
190-200		100	2,222	0,4869	0,0097	71	143	72
200-210		110	2,444	0,4928	0,0059	44	93	49
210-220		120	2,667	0,4962	0,0034	25	53	28
220-230		130	2,889	0,4981	0,0019	14	20	6
230-240		140	3,111	0,4991	0,0010	8	3	5
240<...		+ ∞	+ ∞	0,5000	0,0009	7	—	7
					1,0000	5600	5600	1538

$$\text{Ὁλικὸν σφάλμα} : \varepsilon = \frac{1538 \times 100}{5600} = 27{,}4\ \%$$

ΠΙΝΑΞ 5

Μέθοδος ἰσοϋψοῦς ἐξομοιώσεως

Παράμετροι:

$x_m = 100$ χιλ. $y_m = 48$ χιλ.

$$\sigma_\alpha = \frac{2 \times 2090}{2,5 \times 48} = 34,8 \text{ χιλ.}$$

$$\sigma_\delta = \frac{2 \times 3510}{2,5 \times 48} = 58,5 \text{ χιλ.}$$

$N_\alpha = 2090$

$N_\delta = 3510$

$N = 5600$

Διαστήματα τάξεως	x = | x_m—ὅρ. | κατώτ.	x = | x_m—ὅρ. | ἀνώτ.	x / σ_i	Ἀθροιστικὸν ποσοστὸν	Σχετικὴ Συχνότης (φ_i)	Μερικὴ συχνότης (η_i) Ὑπολογισθεῖσα	Μερικὴ συχνότης (η_i) Πραγματική	Σφάλμα
<0	—∞		—∞	0,5000	0,0020	8	—	8
0- 10	100		2,874	0,4980	0,0028	12	—	12
10- 20	90		2,586	0,4952	0,0059	25	—	25
20- 30	80		2,299	0,4893	0,0114	48	3	45
30- 40	70		2,011	0,4779	0,0202	84	84	—
40- 50	60		1,724	0,4577	0,0329	138	164	26
50- 60	50		1,437	0,4248	0,0501	209	235	26
60- 70	40		1,149	0,3747	0,0691	289	308	19
70- 80	30		0,862	0,3056	0,0882	369	376	8
80- 90	20		0,575	0,2174	0,1044	436	440	4
90-100	10		0,287	0,1130	0,1130	472	480	8
						2090	2090	
100-110		10	0,171	0,0679	0,0679	476	476	—
110-120		20	0,342	0,1338	0,0659	463	470	7
120-130		30	0,513	0,1961	0,0623	437	450	13
130-140		40	0,684	0,2530	0,0569	400	414	14
140-150		50	0,855	0,3037	0,0507	356	365	9
150-160		60	1,026	0,3475	0,0438	307	315	8
160-170		70	1,197	0,3843	0,0368	258	274	16
170-180		80	1,368	0,4144	0,0301	211	239	28
180-190		90	1,539	0,4381	0,0237	166	195	29
190-200		100	1,710	0,4564	0,0183	128	143	15
200-210		110	1,881	0,4700	0,0136	95	93	2
210-220		120	2,051	0,4798	0,0098	69	53	16
220-230		130	2,222	0,4869	0,0071	50	20	30
230-240		140	2,393	0,4917	0,0048	34	3	31
240-250		150	2,564	0,4948	0,0031	22	—	22
250-260		160	2,735	0,4969	0,0021	15	—	15
260-270		170	2,906	0,4982	0,0013	9	—	9
270-280		180	3,077	0,4990	0,0008	7	—	7
280<...		+∞	+∞	0,5000	0,0010	7	—	7
						3510	3510	
					1,0000	5600	5600	459

Ὁλικὸν Σφάλμα: $\varepsilon = \frac{459 \times 100}{5600} = 8,2\,\%$

Π Ι Ν Α Ξ 6

Μέθοδος συγκρίσεως

Παράμετροι:

$x_m = 100$ χιλ.

$\omega = 235 - 29 = 206$ χιλ.

$\Phi/N = \frac{4122}{5600} = 0,7361$

$x_\tau / \omega = 0$

$M_1/N = \frac{(+668)}{5600} = +0,1193$

$M_2/N = \frac{(+815)}{5600} = +0,1455$

$\omega_\alpha = 100 - 29 = 71$ χιλ. $\sigma_\alpha = \frac{71}{3} = 23,7$ χιλ.

$\omega_\delta = 235 - 100 = 135$ χιλ. $\sigma_\delta = \frac{135}{3} = 45$ χιλ.

$N = 5.600$

Διαστήματα τάξεως	x/σ κατώτ. ὅριον	x/σ ἀνώτ. ὅριον	Ἀθροιστικὸν ποσοστὸν	Σχετικὴ συχνότης	Συχνότης Ἰσοδιαστάτου Μερικὴ (ηκ)	Συχνότης Ἰσοδιαστάτου Ἀθροιστ. (Φ)	Συχνότης Πραγματικὴ Μερικὴ (η)	Συχνότης Πραγματικὴ Ἀθροιστ. (N)	N — Φ	Διόρθωσις (η_μ)	Διορθωθεῖσα Συχνότης ($\eta_\iota = \eta\kappa + \eta_\mu$)	Σφάλμα ($\lvert\eta - \eta_\iota\rvert$)
... <20	— ∞		0,5000	0,0005	1	1	—	—		—1	—	—
20 - 30	3,376		0,4995	0,0011	3	4	3	3	—1	21	24	21
30 - 40	2,953		0,4984	0,0041	12	16	84	87	71	63	75	9
40 - 50	2,531		0,4943	0,0117	33	49	164	251	202	104	137	27
50 - 60	2,110		0,4826	0,0283	81	130	235	486	353	146	227	8
60 - 70	1,688		0,4543	0,0570	162	292	308	794	502	146	308	—
70 - 80	1,266		0,3973	0,0967	275	567	376	1170	603	104	379	3
80 - 90	0,844		0,3006	0,1371	390	957	440	1610	653	63	453	13
90 - 100	0,422		0,1635	0,1635	465	1422	480	2090	668	21	486	6
100 - 110		0,222	0,0879	0,0879	475	475	476	476	1	7	482	6
110 - 120		0,444	0,1714	0,0835	451	926	470	946	20	24	475	5
120 - 130		0,667	0,2476	0,0762	412	1338	450	1396	58	42	454	4
130 - 140		0,889	0,3130	0,0654	353	1691	414	1810	119	58	411	3
140 - 150		1,111	0,3667	0,0537	290	1981	365	2175	194	75	365	—
150 - 160		1,333	0,4087	0,0420	227	2208	315	2490	282	92	319	4
160 - 170		1,556	0,4401	0,0314	170	2378	374	2764	386	108	278	4
170 - 180		1,778	0,4623	0,0222	120	2498	239	3003	505	108	228	11
180 - 190		2,000	0,4772	0,0149	80	2578	195	3198	620	92	172	23
190 - 200		2,222	0,4869	0,0097	52	2630	143	3341	711	75	130	13
200 - 210		2,444	0,4928	0,0059	32	2662	93	3434	772	58	90	3
210 - 220		2,667	0,4962	0,0034	18	2680	53	3487	807	42	60	7
220 - 230		2,889	0,4981	0,0019	10	2690	20	3507	817	25	35	15
230 - 240		3,111	0,4991	0,0010	5	2695	3	3510	815	7	12	9
240 <...		+∞	0,5000	0,0009	5	2700	—	—	—	—5	—	—
				1,0000	4122	4122	5600	5600			5600	194

Ὁλικὸν Σφάλμα : $\varepsilon = \frac{194 \times 100}{5600} = 3,4\ \%$

SUMMARY

The paper describes three new methods for the calculation of skewed distributions.

In the first instance definitions are given for the conceptions of «contour», «equilateral», «equidimensional» and «equivalent» frequency curves.

Then three basic theorems are developed :

1. The first deals withe the calculation of frequency curves, whose branches coincide with those of two different normal distribution frequency curves.

These are termed «ideal frequency curves».

2. The second describes the calculation of the area of a trapezoid segment of a rectangular triangle as a function of the total area.

3. The third deals with the designation of the point of intersection of two frequency curves, as a function of their cumulative areas.

Lastly, use is made of these theorems to develop the following methods for the calculation of skewed distributions :

a) The method of «equilateral simulation» based on the first theorem.

b) The method of «Contour simulation» based on the relations between the areas and the standard deviations of the branches of the ideal frequency curve.

c) The method of «equidimensional comparison» based on the second and third theorems.

An appendix gives comparative tables for the calculation of a skewed distribution frequency curve, according to the methods described above, as well as according to the main methods now in use, namely the logarithmic, and the method of the measure of asymmetry.