ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἀκεραίων καὶ μερομόρφων συναρτήσεων πεπερασμένης τάξεως** *Ἰωάννου Ἀν. Ἀναστασιάδου**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Ἔστωσαν f(z) καὶ φ(z) δύο ἀκέραιαι συναρτήσεις πεπερασμένου γένους p καὶ ἔστω α μία τιμὴ τοιαύτη ὥστε αἱ συναρτήσεις

$$f(z) - \alpha \quad \text{καὶ} \quad \varphi(z) - \alpha$$

νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις

$$\frac{f(z) - \alpha}{\varphi(z) - \alpha}$$

θὰ εἶναι ἀκεραία ἐστερημένη ριζῶν καί θὰ ἔχωμεν

$$\frac{f(z) - \alpha}{\varphi(z) - \alpha} = e^{P(z)} \tag{1}$$

ὅπου P(z) ἀκέραιον πολυώνυμον τὸ πολὺ βαθμοῦ p.

Ὁ κ. Polya[1] ἀπέδειξεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν πλείονες τῶν τεσσάρων τοιούτων τιμῶν τοῦ ἀπείρου συμπεριλαμβανομένου. Ἡ ἀπόδειξίς του στηρίζεται εἰς τὸ ἀδύνατον ὡρισμένων ταυτοτήτων τοῦ κ. Borel. Ὁ κ. R. Nevanlinna[2], ὁ κ. H. Cartan, εἰς πολλὰς ἀνακοινώσεις καὶ ἄλλοι συγγραφεῖς προήγαγον σημαντικῶς τὴν ἔρευναν ταύτην.

2. Εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν προτίθεμαι, ἀκολουθῶν διαφορετικὴν μέθοδον, νὰ συμπληρώσω τὸν προσδιορισμὸν τῶν τοιούτων τιμῶν α καὶ νὰ δώσω νέας συνθήκας προσδιορισμοῦ τῶν συναρτήσεων.

Ἰδοὺ τὰ κυριώτερα ἀποτελέσματα:

«Ἐὰν δοθοῦν δύο ἀκέραιαι συναρτήσεις πεπερασμένου γένους p

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$$

ὑπάρχει, πλὴν ἐξαιρετικῶν τινων περιπτώσεων, μία τοιαύτη τιμὴ α, ἡ ὁποία εἶναι, ρητὴ συνάρτησις τῶν $3p+2$ πρώτων συντελεστῶν τῆς f(z) καὶ τῶν $3p+2$ πρώτων συντελεστῶν τῆς φ(z) εἰς τὰ ἀναπτύγματά των κατὰ Taylor».

---

* **JEAN ANASTASSIADIS, Sur le problème d'unicité des fonctions entières et méromorphes de genre fini.**

[1] Bestimmung einer ganzen Function endliches Geschlechts durch viererlei Stellen, *Mathematisk Tidskrift*, B, 1921.

[2] a. Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Mathematica*, **48**, 1926.— b. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, (*Collection Borel*, Paris, Gauthier-Villars, 1929, pp. 107-111 et 121-128).

Πράγματι ἡ λογαριθμικὴ παράγωγος τῆς (1) δίδει τὴν σχέσιν

$$f'(z)[\varphi(z)-\alpha]-\varphi'(z)[f(z)-\alpha]=P'(z)[f(z)-\alpha]\ [\varphi(z)-\alpha]$$

ἡ ὁποία ἰσχύει δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ z περιλαμβανομένων καὶ τῶν ριζῶν τῆς $f(z)-\alpha$ καὶ τῆς $\varphi(z)-\alpha$, Ἡ ἰσότης αὐτὴ δίδει

$$(2)\left\{\begin{array}{l} c_1(\gamma_o-\alpha)\ -\gamma_1(c_o-\alpha)=\lambda_o(c_o-\alpha)\ (\gamma_o-\alpha) \\ 2c_2(\gamma_o-\alpha)-2\gamma_2(c_o-\alpha)=\lambda_o[c_1(\gamma_o-\alpha)+\gamma_1(c_o-\alpha)]+\lambda_1(c_o-\alpha)\ (\gamma_o-\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\gamma_{p-1}+\cdots+pc_p(\gamma_o-\alpha)-\gamma_1c_{p-1}-\cdots-p\gamma_p(c_o-\alpha)= \\ =\lambda_o[c_{p-1}(\gamma_o-\alpha)+c_{p-2}\gamma_1+\cdots+\gamma_{p-1}(c_o-\alpha)]+\cdots+\lambda_{p-1}(c_o-\alpha)\ (\gamma_o-\alpha) \end{array}\right.$$

καὶ διὰ $n\geqslant p$

$$(3)\quad c_1\gamma_n+\cdots+(n+1)c_{n+1}(\gamma_o-\alpha)-\gamma_1c_n-\cdots-(n+1)\gamma_{n+1}(c_o-\alpha)=\lambda_o[c_n(\gamma_o-\alpha)+\cdots+\gamma_n(c_o-\alpha)]+\cdots+\lambda_{p-1}[c_{n-p+1}(\gamma_o-\alpha)+\cdots+\gamma_{n-p+1}(c_o-\alpha)].$$

Ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν λ_i, $\lambda_i\alpha$ $(i=0, 1, 2, \ldots, p-1)$ μεταξὺ $2p+1$ σχέσεων ἐκ τῶν (3) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν διὰ τὰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις τὰς ἱκανὰς καὶ ἀναγκαίας συνθήκας, ἵνα αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $\varphi(z)$ ἔχουν περισσοτέρας τῆς μιᾶς ἢ καμμίαν τοιαύτην τιμήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὑπάρξεως δυνάμεθα νὰ τὰς προσδιορίσωμεν.

3. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι δίδεται μία ἀκεραία συνάρτησις $f(z)$ πεπερασμένου γένους καὶ μία τιμὴ α. Δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν, ἐκτελοῦντες ἐν ἀνάγκῃ ἕνα κατάλληλον ὁμογραφικὸν μετασχηματισμόν, ὅτι ἡ τιμὴ $z=o$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς $f(z)-\alpha$ καὶ τῆς $\varphi(z)-\alpha$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐὰν δοθοῦν $p+1$ ἀριθμοὶ $\gamma_o, \gamma_1, \cdots \gamma_p$ ὑπάρχει μία καὶ μόνον ἀκεραία συνάρτησις $\varphi(z)$ τοιαύτη ὥστε αἱ συναρτήσεις $f(z)-\alpha$ καὶ $\varphi(z)-\alpha$ νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει ὡς ἀνάπτυγμα κατὰ Taylor

$$\varphi(z)=\sum_{n=o}^{\infty}\gamma_n z^n$$

ὅπου τὰ $\gamma_{p+1}, \cdots$ ὑπολογίζονται γραμμικῶς ἀπὸ τὰ $\alpha, \gamma_o, \cdots, \gamma_p$ καὶ ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς τῆς $f(z)$.

Ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα (2) ὡς πρὸς λ_i $(i=o, I, \cdots p-I)$, ὅπερ εἶναι δυνατὸν ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τσῦ θεωρήματος.

4. Ὁδηγούμεθα οὕτως εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

«Ὑπὸ τὴν αὐτὴν συνθήκην $(c_o\neq\alpha,\ \gamma_o\neq\alpha)$, ἐὰν ὑπάρχῃ μία τιμὴ α διὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀκέραιαι συναρτήσεις πεπερασμένου γένους p

$$f(z)-\alpha \text{ καὶ } \varphi(z)-\alpha$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος καὶ ἐὰν

$$c_n = \gamma_n \text{ διὰ } n = 0, 1, 2, \cdots, p$$

αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $\varphi(z)$ ταυτίζονται».

Ἡ λύσις τῷ ὄντι τοῦ συστήματος (2) ὁδηγεῖ εἰς τὴν σχέσιν

$$\frac{f(z) - \alpha}{\varphi(z) - \alpha} = k = c^{te}$$

ἥτις διὰ $z = 0$ δίδει $k = 1$.

Προκύπτει δὲ εὐκόλως τὸ ἑπόμενον θεώρημα τοῦ προσδιορισμοῦ:

«Μία ἀκεραία συνάρτησις πεπερασμένου γένους p εἶναι πλήρως ὡρισμένη ἀπὸ τὸ σύνολον $E(\alpha)$ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν z ὅπου ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν τιμὴν α καὶ ἀπὸ $p+1$ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι εἰς τὴν δοθεῖσαν σειράν, κατὰ προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος, αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως καὶ τῶν p πρώτων παραγώγων εἰς τὸ σημεῖον $z = 0$».

5. Διὰ τὰς μερομόρφους συναρτήσεις πεπερασμένου γένους p ἔχομεν ἀνάλογα ἀποτελέσματα. Ἔστωσαν

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{h_1(z)}, \qquad \varphi(z) = \frac{g_2(z)}{h_2(z)}$$

δύο μερόμορφοι συναρτήσεις πεπερασμένου γένους p καὶ ἔστω α μία τιμὴ τοιαύτη ὥστε αἱ συναρτήσεις $f(z) - \alpha$ καὶ $\varphi(z) - \alpha$ νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος. Σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν

$$\frac{g_1(z) - \alpha\, h_1(z)}{g_2(z) - \alpha\, h_2(z)}$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀκεραία, ἐστερημένη ριζῶν καὶ δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

«Ὑπάρχουν, ἐν γένει δύο τοιαῦται τιμαὶ α, αἱ ὁποῖαι εἶναι ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ εἶναι ρηταὶ συναρτήσεις τῶν $3p+2$ πρώτων συντελεστῶν ἑκάστης τῶν συναρτήσεων $g_1(z)$, $h_1(z)$, $g_2(z)$, $h_2(z)$».

Ἔχομεν ἐπίσης τὸ ἑπόμενον θεώρημα προσδιορισμοῦ:

«Μία μερόμορφος συνάρτησις πεπερασμένου γένους p εἶναι πλήρως προσδιωρισμένη ἀπὸ τὰ σύνολα $E(\alpha)$ καὶ $E(\beta)$ τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ὅπου ἡ συνάρτησις λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς α καὶ β καὶ ἀπὸ $2p+2$ ἀριθμοὺς

$$\alpha_n - \alpha\, b_n, \quad \alpha_n - \beta\, b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, p)$$

$$(\alpha_0 - a b_0 \neq 0, \qquad \alpha_0 - \beta b_0 \neq 0)».$$

RÉSUMÉ

Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions entières de genre fini p et soit α une valeur telle que les fonctions $f(z) - \alpha$ et $\varphi(z) - \alpha$ aient les mêmes zéros avec

les mêmes ordres de multiplicité. L'auteur complète les réslutats déjà obtenus par M. M. Polya, R. Nevanlinna et H. Cartan en démontrant le théorème suivant:

«Si on donne deux fonctions entières de genre fini p

$$f(z)=\sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n, \quad \varphi(z)=\sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n z^n$$

il y a en général, sauf quelques cas exceptionnels, une valeur α, telle que les fonctions $f(z)-\alpha$ et $\varphi(z)-\alpha$ aient les mêmes zéros avec les mêmes ordres de multiplicité. Cette valeur α est une fonction rationnelle des c_i et γ_i $(i=0, 1, \cdots, 3p+1)$».

Il démontre ensuite le théorème suivant d'unicité:

«Une fonction entière de genre fini p est complètement determinée par l'ensemble $E(\alpha)$ des points du plan de z ou la fonction prend la valeur α et par $p+1$ nombres qui seront, d'un facteur constant près, les valeurs de la fonction et de ses p premières derivées au point $z=0$».

On peut généraliser ces résultats pour les fonctions méromorphes de genre fini.

ΛΕΩΝ. Ν. ΚΑΡΑΠΙΠΕΡΗ.—*Συμβολὴ εἰς τὴν μελέτην τῶν ἐξατμισιμέτρων Piche καὶ Wild.*

ΛΕΩΝ. Ν. ΚΑΡΑΠΙΠΕΡΗ.—*Ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας καὶ τοῦ χρώματος τοῦ οὐρανοῦ κατὰ τὴν ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου τῆς 9 Ἰουλίου 1945.*

ΚΩΝΣΤ. Ι. ΜΑΚΡΗ.—*Ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς λαμπρότητος τοῦ ζενὶθ κατὰ τὴν ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου τῆς 9 Ἰουλίου 1945.*

Π. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΚΗ.—*Ὑπεριῶδες φάσμα ἀπορροφήσεως ἐνίων ἀρυλιδεναιθυλαμινῶν.*

Π. ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑΚΗ.—*Ὑπεριῶδες φάσμα ἀπορροφήσεως τῶν φαινολουριῶν ἐνίων ἀμινῶν.*

ΓΑΣΠΑΡ. ΜΙΣΤΑΡΔΗ.—*Γεωμορφολογία τοῦ ἀνωτέρου τμήματος τοῦ Παρνασσοῦ.*
