ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 21ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 1974

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur un type spécial de congruences de droites,** *par Othon Pylarinos**.

Résumé, *est donné dans le No 1.*

1. Les surfaces reglées à paramètre distributeur: p constant engendrées par les droites d'une congruence rectiligne non isotrope de l'espace euclidien à trois dimensions: E^3 constituent pour chaque valeur de p deux systèmes de ∞^1 surfaces, qui ne se confondent que pour deux au plus valeurs de p. Ces deux systèmes de surfaces, dans le cas où ils sont distincts, déterminent sur la surface moyenne de la cengruence un réseau de courbes, que l'on peut associer à la valeur de p, à laquelle les deux systèmes de surfaces correspondent. Ainsi sur la surface moyenne d'une congruence non isotrope on peut déterminer un ensemble de réseaux dont chacun est associé à une seule valeur de p de la manière indiquée. Les réseaux de cet ensemble, dont aucun en géneral n'est conjugué sur la surface moyenne d'une congruence non isotrope choisie au hasard, sur les surfaces moyennes des congruences d'un type spécial sont au contraire tous conjugués et c'est à l'étude des congruences ayant cette propriété à surface moyenne minima (effectuée en appliquant la méthode de M. H. Milloux [**4**]), que le présent article est consacré.

A cet effet, après un exposé préliminaire concernant surtout le problème de la détermination des congruences de droites de E^3 et en particulier des congruences de Ribaucour, est établie d'abord une condi-

* ΟΘ. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ μιᾶς εἰδικῆς κατηγορίας εὐθειογενῶν σμηνῶν.**

tion nécessaire et suffisante afin qu'une congruence de droites réelles non isotrope de E^3 jouisse de la propriété qui vient d'être signalée. Ensuite il est demontré que cette condition est remplie dans le cas où la congruence est engendrée par les normales à une surface minima (qui, dans ce cas, est la surface moyenne de la congruence), tandis que, si la congruence est parabolique ayant comme nappe focale unique une surface minima, la condition établie n'est vérifiée que dans le seul cas où la congruence est engendrée par les tangentes aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un hélicoïde minima reglé. Après ces constatations, sont étudiées les congruences ayant la propriété signalée, chacune desquelles admet comme surface moyenne une surface minima, mais elle n'est pas engendrée par les normales à cette surface. Ces congruences — qui, dans ce qui suit, sont appelées, pour abréger, *congruences* R_m — ainsi que les congruences dont chacune est engendrée par les normales à une surface minima sont des congruences de Ribaucour dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par une relation. La surface moyenne d'une congruence R_m, à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minime reglé, son enveloppée moyenne est également un hélicoïde minima reglé qui, dans le cas où la surface moyenne de la congruence est plane, dégénère à une seule droite et ses surfaces génératrices sont des surfaces de révolution. Enfin il est démontré que le problème de la détermination des congruences R_m, dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par une relation donnée, se ramène à la détermination des couples fonctions d'une seule variable vérifiant un système de deux équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre.

2. Soit D une congruence de droites réelles de l'espace E^3 qui — référée aux paramètres u, v — est définie par rapport au système des coordonnées fixe Oxyz choisi dans l'espace E^3 par l'équation vectorielle

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \theta \boldsymbol{l}(u, v) ; \tag{2,1}$$

$\boldsymbol{l}(u, v)$ est le vecteur — unité qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice courante $g(u, v)$ de D et θ est le paramètre aux valeurs duquel correspondent les points de la droite g, la surface S définie par l'équation (vectorielle)

(2, 2) $$\bar{r} = \bar{r}(u, v),$$

sur laquelle on a $\theta = 0$, étant la *surface directrice* de la congruence.

L'extrémité du vecteur $\bar{l}$ (u, v) mené par l'origine O du système Oxyz décrit sur la surface de la sphère — unité ayant comme centre le point O, l'image Σ de la congruence D, dans sa représentation sphérique, les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface Σ étant les images, dans cette représentation de la congruence, des surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites.

Les paramètres u, v, auxquels la congruence D est référée, peuvent être toujours choisis de manière que le réseau formé par les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface sphérique Σ soit orthogonal. Dans ce cas, si l'on pose

(2, 3) $$\bar{l}_u = a\bar{t}, \quad \bar{l}_v = b\bar{g}, \text{*}$$

en désignant par $\bar{t}$, $\bar{g}$ les vecteurs — unités qui au point courant de l'image sphérique Σ de D déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes v = Cte, u = Cte issues de ce point, d'après les suppositions faites, on aura

(2, 4) $$\bar{t}^2 = \bar{g}^2 = \bar{l}^2 = 1, \qquad \bar{t} \times \bar{g} = 0, \qquad \bar{t} \wedge \bar{g} = \varepsilon \bar{l}, \text{**}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 et on peut choisir les sens positifs sur les directions de ces tangentes de manière que l'on ait

(2, 5) $$\bar{t} \wedge \bar{g} = \bar{l}.$$

En outre on a — comme on sait [**4**, p. 6] — pour les dérivées $\bar{t}_u$, $\bar{t}_v$ et $\bar{g}_u$, $\bar{g}_v$ des vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$ les expressions.

(2, 6) $$\left\{ \begin{aligned} \bar{t}_u &= -\frac{a_v}{b}\bar{g} - a\bar{l}, \qquad & \bar{t}_v &= \frac{b_u}{a}\bar{g} \\ \bar{g}_u &= \frac{a_v}{b}\bar{t}, & \bar{g}_v &= -\frac{b_u}{a}\bar{t} - b\bar{l}, \end{aligned} \right.$$

---

* On admet que les opérations de dérivation par rapport à u et à v, qui seront faites dans cet article, sont légitimes dans les intervalles considérés et, si f est une fonction des u, v, on désigne par f_u, f_v, f_{u^2}, f_{uv}, f_{v^2} ses dérivées du premier et du second ordre respectivement par rapport à u et à v.

** Les notations $\bar{t} \times \bar{g}$, $\bar{t} \wedge \bar{g}$ désignent les produits scalaire et vectoriel respectivement des vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$.

les scalaires a, b, que les formules (2, 3) et (2, 6) renferment, étant des fonctions des u, v vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\left[\frac{b_u}{a}\right]_u + \left[\frac{a_v}{b}\right]_v + a\,b = 0, \tag{2, 7}$$

à laquelle on parvient, si l'on exprime, en ayant égard aux (2, 6), que la dérivée $\bar{t}_{uv}$ de $\bar{t}$ ainsi que la dérivée $\bar{g}_{uv}$ de $\bar{g}$ ont une valeur unique en chaque point de l'image sphérique Σ de D [**4**, p. 7].

Par ailleurs le carré de l'élément linéaire: $d\sigma^2$ de l'image sphérique Σ de la congruence D référée aux paramètres u, v, grâce aux (2, 3) et (2, 4), affecte la forme

$$d\sigma^2 = a^2du^2 + b^2dv^2 \tag{2, 8}$$

et l'équation (2, 7) exprime en outre que la courbure totale de la surface dont le carré de l'élément linéaire est de la forme (2, 8), est constante = 1.

3. La parallèle à la génératrice courante g de la congruence issue du point-image de cette droite sur la surface de la sphère - unité, dans la représentation sphérique de la congruence et les tangentes aux courbes v = Cte, u = Cte issues de ce même point, sur les directions desquelles les sens positifs sont définis par les vecteurs-unités $\boldsymbol{l}$, $\bar{t}$, $\bar{g}$ respectivement, forment un trièdre qui, d' après les suppositions faites dans le paragraphe 2, est trirectangle et direct; ce trièdre: $[\bar{t}\,\bar{g}\,\boldsymbol{l}]$ est le trièdre mobile de référence, auquel M. M. H. Milloux et P. Vincensini se rapportent, en appliquant la méthode exposée par M. H. Milloux [**4**], dans l'étude qu'ils ont faite de certaines propriétés intrinsèques à la congruence.

A cet effet, au lieu de l'équation (2, 2) qui détermine la surface directrice S de la congruence par rapport au système de référence fixe Oxyz, on considère les deux équations

$$\bar{r}_u = t_1\bar{t} + g_1\bar{g} + l_1\boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = t_2\bar{t} + g_2\bar{g} + l_2\boldsymbol{l}, \tag{3, 1}$$

où $t_1, g_1, l_1, t_2, g_2, l_2$ sont les composantes suivant les directions des axes du trièdre mobile $[\bar{t}\,\bar{g}\,\boldsymbol{l}]$ des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}\,(u, v)$ de l'équation (2, 2). Les équations (3, 1) déterminent la surface S par rapport au système fixe Oxyz à une translation près, lorsque les scalaires, que ces équations renferment, sont des fonctions des u, v vérifiant avec a, b les trois équations aux dérivées partielles:

$$(3,2)\begin{cases} t_{1v} - t_{2u} = g_1 \dfrac{b_u}{a} + g_2 \dfrac{a_v}{b} + al_2, \quad g_{1v} - g_{2u} = -t_1 \dfrac{b_u}{a} - t_2 \dfrac{a_v}{b} - bl_1, \\ l_{1u} - l_{2v} = bg_1 - at_2 \end{cases}$$

qui expriment, eu égard aux (2, 3) et (2, 6), la condition de compatibilité des deux équations (3, 1) [**4**, p. 8].

Si la congruence D n'est pas isotrope, ses paramètres distributeurs principaux: p_1, p_2, qui sur la génératrice courante g de D sont, par définition, les extrema du paramètre distributeur p sur g des surfaces engendrées par les droites de D, auxquelles g appartient, ne sont pas constamment égaux. On aura donc, dans ce cas.

$$(3,3) \qquad p_1 \not\equiv p_2 .$$

En outre, dans ce cas, la génératrice courante g de D appartient à deux surfaces distinctes engendrées par des droites de D, les paramètres distributeurs desquelles sur leur génératrice commune g sont respectivement égaux aux paramètres distributeurs principaux de D sur elle. Ces surfaces — qui, dans ce qui suit, sont appelées *surfaces distributrices principales de la congruence* — constituent deux systèmes distincts de ∞^1 surfaces réelles dont les images sur la surface de la sphère-unité, dans la représentation sphérique de la congruence, forment un réseau orthogonal [**2**, p. 204].

Cela étant, on peut supposer que *la congruence (non isotrope) D soit référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales.*

Si en plus on choisit comme surface directrice S de D sa surface moyenne et que l'on tienne compte que, pour que la surface définie à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz par les équations (3, 1) soit la surface moyenne de la congruence, il faut et il suffit — comme on sait [**4**, p. 17] — que les scalaires t_1, g_2, qui figurent dans les équations (3, 1), soient liés avec a, b par la relation $bt_1 + ag_2 = 0$, on reconnait aisément que t_1, g_2 doivent être $\equiv 0$, tandis que pour les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de D, qui sur la génératrice courante g de D sont respectivement égaux aux paramètres distributeurs de ses surfaces distributrices principales $v = Cte$, $u = Cte$ issues de cette droite, on a les expressions

$$p_1 = \frac{g_1}{a}, \quad p_2 = -\frac{t_2}{b}, \tag{3, 4}$$

Ainsi, dans le cas envisagé, les équations (3, 1) acquièrent la forme

$$\bar{r}_u = ap_1\bar{g} + l_1\boldsymbol{l}, \quad \bar{r}_v = -bp_2\bar{t} + l_2\boldsymbol{l}, \tag{3, 5}$$

les scalaires l_1, l_2, p_1, p_2, qui y figurent, étant des fonctions des u, v vérifiant avec a, b les trois équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} p_{1v} = -(p_1 - p_2)\dfrac{a_v}{a} - \dfrac{l_1 b}{a}, \quad p_{2u} = (p_1 - p_2)\dfrac{b_u}{b} + \dfrac{l_2 a}{b}, \\ l_{1v} - l_{2u} = ab(p_1 + p_2), \end{cases} \tag{3, 6}$$

qui s'obtiennent des trois équations (3, 2), si l'on y pose $t_1 = g_2 = 0$ et que l'on remplace g_1, t_2 par leurs valeurs tirées des (3, 4).

De la dernière équation (3, 6) résulte que, *dans le cas où la congruence non isotrope D est engendrée par les normales à une même surface, ses paramètres distributeurs principaux p_1 p_2 sont liés par la relation*

$$p_1 + p_2 = 0, \tag{3, 7}$$

car, dans ce cas, on a nécessairement $l_{1v} - l_{2u} = 0$ [**4**, p. 8].

Si la congruence D est isotrope, d'après la définition des congruences de ce type [2, p. 209], les surfaces engendrées par ses droites, auxquelles appartient sa génératrice courante g, admettent sur g le même paramètre distributeur.

Donc, dans ce cas, les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de la congruence sont liés par la relation

$$p_1 - p_2 = 0. \tag{3, 8}$$

En outre, si l'on réfère la congruence D à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal et que l'on choisisse comme surface directrice S de D sa surface moyenne, dans les expressions (3, 1) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre de l'équation (2, 2) de S on aura — comme on le voit aisément — $t_1 = 0$, $g_2 = 0$, $\dfrac{g_1}{a} = -\dfrac{t_2}{b} \equiv p$.

Ainsi les équations (3, 1) affectent la forme

$$\bar{r}_u = ap\bar{g} + l_1\bar{l}, \quad \bar{r}_v = -bp\bar{t} + l_2\bar{l} \tag{3,9}$$

et les équations (3, 2), qui expriment la condition de compatibilité des deux équations (3, 1), deviennent

$$p_u = l_2\frac{a}{b}, \quad p_v = -l_1\frac{b}{a}, \quad l_{1u} - l_{2v} = 2abp. \tag{3,10}$$

Les considérations précédentes montrent que à chaque réseau orthogonal (u, v) sur la surface de la sphère-unité ou sur une partie Σ de cette surface on peut faire associer un ensemble de congruences dont chacune est définie à une translation près par rapport au système fixe Oxyz.

En effet, si l'on réfère la surface de la sphère-unité ou une partie Σ de cette surface à deux paramètres u, v tels que le réseau formé par les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ tracées sur elle soit orthogonal, le carré de l'élément linéaire de la surface Σ aura la forme (2, 8), les coefficients a, b, qui y figurent, étant des fonctions des u, v vérifiant l'équation (2, 7). Cela étant, à chaque système de fonctions p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v vérifiant avec a, b les équations (3, 6) on peut faire associer une congruence définie à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz. Cette congruence admet comme surface moyenne la surface S qui est définie à une translation près par rapport au système Oxyz par les équations compatiples qui s'obtiennent des deux équations (3, 5) en y remplaçant les scalaires qui y figurent par les fonctions a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v du système considéré. Les surfaces S et Σ sont représentées, l'une sur l'autre, de manière que leurs points homologues correspondent à un même système de valeurs des u, v, la droite de la congruence issue de chaque point de sa surface moyenne S étant parallèle à la normale à la surface Σ en son point homologue de ce point de S. Les fonctions p_1, p_2 des u, v du système considéré sont les paramètres distributeurs principaux de la congruence et, si $p_1 \not\equiv p_2$, les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par les droites de cette congruence sont ses surfaces distributrices principales.

Si $p_1 = p_2$ la congruence est isotrope, tandis que, *si une des fonctions* p_1, p_2 *des u, v est* $\equiv 0$, *la congruence est parabolique,* car, dans ce cas, les deux nappes focales de la congruence coïncident — comme on le constate aisément en ayant égard aux équations (3, 5) — avec sa surface moyenne.

Donc les congruences de l'ensemble associé au réseau orthogonal (u, v), considéré sur la surface sphérique Σ, correspondent aux systèmes de fonctions p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v vérifiant avec les fonctions a (u, v), b (u, v) les équations (3, 6), tandis que a (u, v), b (u, v) vérifient l'équation (2, 7).

4. *Une congruence de Ribaucour,* d'après la définition des congruences de ce type [**1**, p. 308] — est engendrée par les parallèles aux normales à une surface S′ représentée sur la surface moyenne S de la congruence avec orthogonalité des éléments linéaires homologues, la droite de la congruence issue de chaque point de sa surface moyenne S étant parallèle à la normale à la surface S′ en son point homologue de ce point de S. La surface S′ est appelée, dans ce cas, *surface génératrice de la congruence.*

Si la surface moyenne S de la congruence considérée D, référée à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal, est définie à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz par les équations (3, 5), une surface S′ représentée sur la surface S de manière que la droite de D issue du point courant de S soit parallèle à la normale à S′ en son point homologue de ce point de S, les points homologues des deux surfaces correspondant à un même système de valeurs des u, v, peut être définie à une translation près par rapport au système Oxyz par deux équations de la forme

$$(4,1) \qquad \bar{r}'_u = t'_1\bar{t} + g'_1\bar{g}, \qquad \bar{r}'_v = t'_2\bar{t} + g'_2\bar{g},$$

les scalaires t'_1, g'_1 et t'_2, g'_2, qui y figurent, étant des fonctions des u, v vérifiant la condition de compatibilité de ces deux équations.

En outre, afin que dans cette représentation des surfaces S′, S, l'une sur l'autre, les éléments linéaires homologues des deux surfaces soient orthogonaux, il faut que l'on ait $\left[\bar{r}_u + \bar{r}_v \dfrac{dv}{du}\right] \times \left[\bar{r}'_u + \bar{r}'_v \dfrac{dv}{du}\right] = 0$ quelle que soit la valeur du rapport $\dfrac{dv}{du}$ et pour tous les systèmes de valeurs des u, v, auxquels correspondent les droites de la congruence;

donc il faut — comme on le voit aussitôt en ayant égard aux (3, 5) et (4, 1) — que l'on ait

$$p_1 g_1' = 0, \qquad p_2 t_2' = 0, \qquad a p_1 g_2' - b p_2 t_1' = 0. \tag{4, 2}$$

Or, *si la congruence D n'est pas parabolique,* il faut qu l'on ait

$$g_1' = 0, \qquad t_2' = 0, \qquad \frac{t_1'}{a p_2} = \frac{g_2'}{b p_2} \equiv \varrho, \tag{4, 3}$$

puisque, dans ce cas, on a $p_1 \not\equiv 0$, $p_2 \not\equiv 0$.

Il en résulte que, dans ce cas, les équations (4, 1) doivent avoir la forme

$$\bar{r}_u' = \varrho a p_1 \bar{t}, \qquad \bar{r}_v' = \varrho b p_2 \bar{g} \tag{4, 4}$$

et, pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$\{\varrho a p_1 \bar{t}\}_v - \{\varrho b p_2 \bar{g}\}_u = 0. \tag{4, 5}$$

La condition (4, 5) est équivalente aux deux conditions

$$\frac{\varrho_u}{\varrho} + \frac{p_{2u}}{p_2} - \frac{p_1 - p_2}{p_2}\frac{b_u}{b} = 0, \qquad \frac{\varrho_v}{\varrho} + \frac{p_{1v}}{p_1} + \frac{p_1 - p_2}{p_1}\frac{a_v}{a} = 0, \tag{4, 6}$$

auxquelles on parvient en y remplaçant les dérivées $\bar{t}_v$, $\bar{g}_u$ des vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$ par leurs expessions (2, 6) et en égalant les composantes de ses deux membres suivant la direction de chacun des deux premiers axes du trièdre $[\bar{t}\,\bar{g}\,\bar{l}]$, les composantes de ses deux membres suivant la direction du troisième axe de ce trièdre étant toutes les deux $\equiv 0$. Par ailleurs les conditions (4, 6), en vertu des (3, 6), sont équivalentes aux conditions

$$\frac{\varrho_u}{\varrho} = -\frac{l_2 a}{p_2 b}, \qquad \frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{l_1 b}{p_1 a}, \tag{4, 7}$$

qui ne sont remplies que si l'on a

$$\left[\frac{l_1 b}{p_1 a}\right]_u + \left[\frac{l_2 a}{p_2 b}\right]_v = 0. \tag{4, 8}$$

Les considérations précédentes montrent que la condition (4, 8) est nécessaire, afin que la congruence non parabolique D soit une congruence de Ribaucour ; d'autre part elle en est suffisante, car les deux équations qui s'obtiennent des équations (4, 4) en y remplaçant ϱ par une fonction

$\varrho(u, v)$ vérifiant les équations (4, 7) qui sont compatibles, lorsque la condition (4, 8) est remplie, sont également compatibles et elles déterminent à une translation près par rapport au système fixe Oxyz une surface S′ représentée sur la surface moyenne S de D de la manière indiquée.

Donc, *si la surface moyenne d'une congruence non parabolique référée à deux paramètres u, v tels que le réseau (u, v) sur la surface de la sphère-unité soit orthogonal, est définie à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz par les équations (3, 5), pour que le congruence soit une congruence de Ribaucour, il faut et il suffit que les fonctions scalaires a, b,* p_1, p_2, l_1, l_2 *des u, v, qui figurent dans les équations (3, 5) et vérifient les équations (2, 7) et (3, 6), vérifient en plus l'équation (4, 8).*

La condition (4, 8) est remplie, comme il résulte des deux premières équations (3, 6), si l'on a $p_1 = p_2 \not\equiv 0$; dans ce cas la congruence D est isotrope et — comme on sait [**1**, p. 311] — les congruences isotropes sont des congruences de Ribaucour.

Il est à noter que *les courbes que les surfaces développables d'une congruence non parabolique déterminent sur la surface moyenne ne forment un réseau conjugué sur elle que dans le seul cas où la congruence est une congruence de Ribaucour* [1, p. 309].

5. Si la congruence considérée D n'est pas isotrope et que cette congruence, référée à ces surfaces distributrices principales v = Cte, u = Cte et ayant comme directrice sa surface moyenne S, soit définie par l'équation (2, 1), les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface S peuvent s'écrive sous la forme (3, 5) ; cela étant, on trouve pour le paramètre distributeur p sur la génératrice courante g de D d'une surface engendrée par des droites de D correspondant à une relation : v = v (u) entre u, v, issue de g, en appliquant la formule connue et en ayant égard aux (2, 3) et (3, 5), l'expression

$$(5, 1) \qquad p = \frac{a^2 p_1 + b^2 p_2 \mu^2}{a^2 + b^2 \mu^2},$$

où $\mu = \dfrac{dv}{du}$ et $p_1 \not\equiv p_2$, puisque D est une congruence non isotrope.

Il s'ensuit que l'équation

$$(5, 2) \qquad a^2 (c - p_1)\, du^2 + b^2 (c - p_2)\, dv^2 = 0,$$

où c est une constante arbitraire, détermine pour chaque valeur de c deux systèmes de ∞^1 surfaces engendrées par les droites de D à paramètre distributeur p constant égal à la valeur considérée de c, qui — comme il résulte de l'équation (5, 2) — ne se confondent que dans le seul cas où un des paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de la congruence est constant et c est égal à la valeur constante de ce paramètre. Ces deux systèmes de surfaces interceptent sur la surface moyenne S de la congruence un réseau de courbes, qui peut être associé à la valeur de c, à laquelle les deux systèmes de surfaces correspondent et ne dégénère à un seul systéme de ∞^1 courbes que pour deux au plus valeurs de c.

Les valeurs, μ_1, μ_2 de $\frac{dv}{du}$, auxquelles correspondent au point courant de la surface S les tangentes aux courbes issues de ce point appartenant au réseau associé à une valeur de c de la manière indiquée, d'après (5, 2), sont

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{c-p_1}{p_2-c}}. \tag{5, 3}$$

Or, si L, M, N sont les coefficients de la seconde forme différentielle fondamentale de la surface S, pour que le réseau associé à cette valeur de c soit conjugué, il faut et il suffit que l'on ait $L+M(\mu_1+\mu_2)+$ $+N\mu_1\mu_2=0$ et finalement, grâce aux (5, 3) :

$$Lb^2(c-p_2)+Na^2(c-p_1)=0. \tag{5, 4}$$

De cette relation, qui est linéaire en c, résulte que, dans le cas où la congruence non isotrope D est choisie au hasard, sur sa surface moyenne S en général aucun de réseaux associés aux valeurs de c de la manière indiquée n'est conjugué.

Pour que le réseau associé à la constante c soit conjugué, quelle que soit la valeur de c, il faut et il suffit que l'on ait dans l'équation (5, 4):

$$Lb^2p_2+Na^2p_1=0, \qquad Lb^2+Na^2=0$$

et, comme on a $p_1 \neq p_2$, il faut et il suffit que l'on ait

$$L=0, \qquad N=0, \tag{5, 5}$$

ou, ce qui revient au même, il faut et il suffit que la fonction $\bar{r}(u, v)$ du second membre de l'équation (2, 2) de la surface S' vérifie les équations

$$(5,6) \qquad \bar{r}_{u^2} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0, \qquad \bar{r}_{v^2} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0.$$

Ces conditions, si l'on y remplace les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ de la fonction $\bar{r}(u, v)$ par leurs expressions (3, 5) et les dérivées $\bar{r}_{u^2}$, $\bar{r}_{v^2}$ de cette même fonction par leurs expressions

$$(5,7) \qquad \begin{cases} \bar{r}_{u^2} = a\left(p_1 \dfrac{a_v}{b} + l_1\right)\bar{t} + (ap_1)_u \bar{g} + l_{1u}\, \boldsymbol{l}, \\[2ex] \bar{r}_{v^2} = -(bp_2)_v \bar{t} + b\left(-p_2 \dfrac{b_u}{a} + l_2\right)\bar{g} + l_{2v}\, \boldsymbol{l}, \end{cases}$$

auxquelles on parvient en différentiant les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ de la fonction $\bar{r}(u, v)$ par rapport à et u à v respectivement et en ayant égard aux (2, 3) et (2, 6), acquièrent la forme

$$(5,8) \qquad \begin{cases} a^2 p_1^2 l_2 a_v + a^2 b\, p_1 l_1 l_2 - b^2 l_1 p_2 (ap_1)_u + ab^2 p_1 p_2 l_{1u} = 0 \\ b^2 p_2^2 l_1 b_u - ab^2 p_2 l_1 l_2 - a^2 l_2 p_1 (bp_2)_v + a^2 b\, p_1 p_2 l_{2v} = 0. \end{cases}$$

Les constatations précédentes, compte tenu du fait que les conditions (5, 5) ou (5, 6) sont nécessaires et suffisantes afin que les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ tracées sur la surface S définie par l'équation (2, 2) soient ses lignes asymptotiques, permettent de formuler le :

Théorème I. Afin que le réseau de courbes, que les surfaces reglées à paramètre distributeur p constant engendrées par les droites d'une congruence non isotrope déterminent sur sa surface moyenne, soit conjugué, quelle que soit la valeur constante de p, il faut et il suffit que les courbes, que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur sa surface moyenne, soient les lignes asymptotiques de cette surface.

Il est à noter que, *si les courbes, que les surfaces distributrices principales d'une congruence non isotrope déterminent sur sa surface moyenne, sont les lignes asymptotiques de cette surface et que la congruence ne soit pas parabolique, cette congruence est nécessairement une congruence de Ribaucour,* car, dans ce cas, le réseau de courbes, que les surfaces développables de la congruence, qui sont des surfaces reglées à paramètre distributeur constant $= 0$, déterminent sur sa surface moyenne, d'après le théorème I, est conjugué et cette propriété caractérise — comme nous l'avons signalé dans le paragraphe 4 — les congruences de Ribaucour.

Il en résulte que, dans ce cas, une des conditions (5, 8), qui — eu égard que l'on a $p_1 \not\equiv 0$, $p_2 \not\equiv 0$ — peuvent s'écrire, comme on le constate aisément, sous la forme

$$(5,9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a\,b\,p_1 p_2 \left[\frac{l_1 b}{p_1 a}\right]_u - b p_2 l_1 b_u + a p_1 l_2 a_v + a b\, l_1 l_2 = 0, \\ & a\,b\,p_1 p_2 \left[\frac{l_2 a}{p_2 b}\right]_v + b p_2 l_1 b_u - a p_1 l_2 a_v - a b\, l_1 l_2 = 0, \end{aligned} \right.$$

peut être remplacée par la condition (4, 8) qui, dans le cas envisagé, est nécessaire et suffisante, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 4, afin que la congruence soit une congruence de Ribaucour.

6. Si dans les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface S, qui, par hypothèse, est la surface moyenne de la congruence non isotrope D référée à ses surfaces distributrices principales $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$, on a

$$(6,1) \qquad l_1 = 0, \qquad l_2 = 0,$$

les conditions (5, 8) qui, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 5, sont nécessaires et suffisantes, afin que les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ tracées sur la surface S′ soient ses lignes asymptotiques, sont évidemment remplies et des deux équations (3, 5), qui, grâce aux (6, 1), deviennent

$$(6,2) \qquad \bar{r}_u = a p_1 \bar{g}, \qquad \bar{r}_v = - b p_2 \bar{t},$$

résulte que l'on a

$$(6,3) \qquad \bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0, \qquad \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v = a\,b\,p_1 p_2 \bar{l}.$$

La première relation (6, 3) exprime que le réseau (u, v) formé par les lignes asymptotiques de la surface S est orthogonal et que, par conséquent, S est une surface minima, tandis que, d'après la seconde relation (6, 3), la congruence D est engendrée par les normales à sa surface moyenne S.

D'autre part, si la congruence D est engendrée par les normales à une surface minima S, cette surface est la surface moyenne de D, car les courbures principales k_1, k_2 de S en son point courant P sont liées, dans ce cas, par la relation

$$k_1 + k_2 = 0 \tag{6, 4}$$

et, si F_1, F_2 sont les points focaux de la droite de D issue du point P de S, qui est la normale à S en P, on a — comme on sait [**3**, p. 188] — $\overline{PF_1} = \frac{l}{k_1}$, $\overline{PF_2} = \frac{l}{k_2}$ et, en vertu de (6, 4), $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 0$.

En outre on reconnaît aisément, en tenant compte du fait que le réseau des lignes de courbure d'une surface minima est isotherme [**3**, p. 275] et en ayant égard à (6, 4), que les courbes que les surfaces distributrices principales de la congruence engendrée par les normales à une surface minima déterminent sur cette surface, sont ses lignes asymptotiques.

On peut donc, en ayant égard au théorème I, énoncer le :

Théorème II. Le réseau de courbes, que les surfaces reglées à paramètre distributeur p constant engendrées par les normales à une surface minima déterminent sur cette surface, est conjugué, quelle que soit la valeur constante de p.

Nous allons maintenant étudier les congruences non isotropes, chacune desquelles admet comme surface moyenne une surface minima, mais elle n'est pas engendrée par les normales à cette surface, le réseau de courbes que les surfaces reglées à paramètre distributeur p constant engendrées par les droites de la congruence déterminent sur sa surface moyenne étant conjugué, quelle que soit la valeur constante de p.

A cet effet on peut distinguer deux cas suivant que la congruence non isotrope ayant la propriété indiquée est parabolique ou n'est pas parabolique et, par suite, elle est une congruence R_m.

7. Supposons en premier lieu que la congruence non isotrope D soit une congruence parabolique.

Dans ce cas la nappe focale unique S de D est en même temps sa surface moyenne et les courbes tracées sur la surface S, auxquelles les droites de la congruence sont tangentes, constituent l'un des systèmes des lignes asymptotiques de S [**1**, p. 273]. En outre les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de D — comme nous l'avons signalé dans le paragraphe 3 — ne sont pas tous les deux $\not\equiv 0$ et, comme S n'est pas isotrope, on aura ou bien $p_1 \not\equiv 0$, $p_2 = 0$ ou bien $p_1 = 0$, $p_2 \not\equiv 0$.

Or, si

$$p_1 \not\equiv 0, \qquad p_2 = 0 \tag{7, 1}$$

et que la congruence, référée à ses surfaces distributrices principales v = Cte, u = Cte et ayant comme directrice sa surface moyenne S soit définie par l'équation (2, 1), les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface S, en vertu des (7, 1), deviennent

$$\bar{r}_u = a p_1 \bar{g} + l_1 \boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = l_2 \boldsymbol{l}, \tag{7, 2}$$

où

$$l_2 \not\equiv 0, \tag{7, 3}$$

puisque S ne dégénère pas en courbe.

Il en résulte que la congruence D est engendrée par les tangentes aux courbes u = Cte tracées sur la surface S. Ces courbes constituent nécessairement l'un des systèmes des lignes asymptotiques de S, puisque D est, par hypothèse, une congruence parabolique et elles sont en outre les courbes que les surfaces distributrices principales u = Cte de D déterminent sur la surface S.

Si en plus S est une surface minima, pour que les courbes v = Cte tracées sur S, qui sont les courbes que les surfaces distributrices principales v = Cte de la congruence D déterminent sur S, constituent l'autre système de lignes asymptotiques de cette surface, il faut que le réseau (u, v) sur S soit orthogonal ; donc il faut que l'on ait $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0$ ou finalement, en vertu des (7, 2) et (7, 3) :

$$l_1 = 0, \qquad l_2 \not\equiv 0. \tag{7, 4}$$

En outre, dans ce cas, en vertu des (7, 1) et (7, 4), des deux conditions (5, 8) qui, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 5, sont nécessairement remplies, puisque les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S sont ses lignes asymptotiques, la seconde est identiquement vérifiée, tandis que de la première résulte que l'on doit avoir $\frac{\partial a}{\partial v} = 0$ et de là, d'après la première équation (3, 6) et la première relation (7, 4), que l'on aura également $\frac{\partial p_1}{\partial v} = 0$. Donc a et p sont nécessairement des fonctions de la seule variable u :

$$a = a(u), \qquad p_1 = p_1(u). \tag{7, 5}$$

Cela étant, en différentiant par rapport à u la première équation (7, 2), qui, grâce aux (7, 4) et (7, 5), affecte la forme

$$\bar{r}_u = a(u)\,p_1(u)\,\bar{g} \tag{7, 6}$$

et, en ayant égard aux (2, 6) et (7, 5), on parvient à l'équation

$$\bar{r}_{u^2} = \frac{d(ap_1)}{du}\,\bar{g}. \tag{7, 7}$$

On aura donc, grâce aux (7, 6) et (7, 7),

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_{u^2} = 0\,;$$

ce qui montre que les lignes asymptotiques v = Cte de la surface S sont des droites. Donc S est, dans le cas envisagé, une surface minima reglée; par suite, elle est nécessairement un hélicoïde minima reglé et la congruence D est engendrée par les tangentes aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de cet hélicoïde.

D'autre part, si la congruence parabolique D référée à ses surfaces distributrices principales v = Cte, u = Cte est engendrée par les tangentes aux courbes u = Cte tracées sur la surface S définie par l'équation (2, 2) et que la surface S soit un hélicoïde minima reglé, les courbes u = Cte tracées sur S seront nécessairement les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes de S, puisque ces courbes et les génératrices rectilignes de l'hélicoïde constituent les deux systèmes de ses lignes asymptotiques.

En outre, d'après les suppositions faites, les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface S auront nécessairement la forme (7, 2) et, si L, M, N sont les coefficients de la seconde forme différentielle fondamentale de S référée aux paramètres considérés u, v, on aura N = 0, puisque les courbes u = Cte tracées sur S constituent l'un des systèmes de ses lignes asymptotiques, tandis que l'équation différentielle des génératrices rectilignes de S, qui constituent l'autre système de ses lignes asymptotiques, sera

$$\frac{dv}{du} = -\frac{L}{2M} = -\frac{1}{2}\,\frac{\bar{r}_{u^2} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)}{\bar{r}_{uv} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)}\,. \tag{7, 8}$$

Mais la différentiation des deux équations (7, 2) par rapport à u conduit, à l'aide des (2, 3) et (2, 6), aux équations

$$(7,9)\qquad \bar{r}_{u^2} = a\left[p_1\frac{a_v}{b} + l_1\right]\bar{t} + (ap_1)_u\,\bar{g} + l_{1u}\,\boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_{uv} = al_2\,\bar{t} + l_{2u}\,\boldsymbol{l}$$

et, grâce aux (7, 2) et (7, 9), l'équation différentielle (7, 8) des génératrices rectilignes de l'hélicoïde S affecte la forme

$$(7,10)\qquad \frac{dv}{du} = -\frac{1}{2l_2}\left[p_1\frac{a_v}{b} + l_1\right].$$

Il en résulte que la génératrice rectiligne de S issue de son point courant est parallèle au vecteur

$$\frac{d\bar{r}}{du} = \bar{r}_u + \bar{r}_v\frac{dv}{du} = \bar{r}_u - \frac{1}{2l_2}\left[p_1\frac{a_v}{b} + l_1\right]\bar{r}_v$$

qui, grâce aux (7, 2), acquiert la forme

$$(7,11)\qquad \frac{d\bar{r}}{du} = ap_1\bar{g} - \frac{1}{2}\left[p_1\frac{a_v}{b} - l_1\right]\boldsymbol{l}$$

et, comme le réseau des lignes asymptotiques de S est orthogonal et les directions asymptotiques de S en son point courant sont les directions définies en ce point par les vecteurs $\bar{r}_v$, $\frac{d\bar{r}}{du}$, il faut que l'on ait $\bar{r}_v \times \frac{d\bar{r}}{du} = 0$ et finalement, en vertu des (7, 11), il faut que l'on ait :

$$(7,12)\qquad p_1\frac{a_v}{b} - l_1 = 0.$$

Ainsi, grâce à (7, 12), l'équation différentielle (7, 10) des trajectoires orthogonales sur la surface S des courbes u = Cte tracées sur elle prend la forme

$$(7,13)\qquad \frac{dv}{du} = -\frac{l_1}{l_2},$$

tandis que le vecteur (7, 11) qui au point courant de S est parallèle à la tangente à la courbe de ce système issue de ce point, devient

$$(7,14)\qquad \frac{d\bar{r}}{du} = ap_1\bar{g}$$

et, comme les courbes de ce système sont les génératrices rectilignes de S, il faut que l'on ait

$$(7, 15) \qquad \frac{d\bar{r}}{du} \wedge \frac{d^2\bar{r}}{du^2} = \{ap_1\bar{g}\} \wedge \left[(ap_1\bar{g})_u + (ap_1\bar{g})_v \frac{dv}{du}\right] = 0.$$

Mais, grâce aux (7, 14), (7, 13) et (2, 6), on a

$$(7, 16) \quad \frac{d^2\bar{r}}{du^2} = \left[ap_1 \frac{a_v}{b} + \frac{l_1}{l_2}\frac{b_u}{a}\right]\bar{t} + \left[(ap_1)_u - \frac{l_1}{l_2}(ap_1)_v\right]\bar{g} + ab\frac{l_1}{l_2}\,\boldsymbol{l}$$

et, pour que la condition (7, 15) soit remplie, il faut que l'on ait:

$$ap_1 \frac{a_v}{b} + \frac{l_1}{l_2}\frac{b_u}{a} = 0, \qquad ab\frac{l_1}{l_2} = 0.$$

Il faut que l'on ait donc $l_1 = 0$; ce qui montre, eu égard à l'équation (7, 13), que les génératrices rectilignes de l'élicoïde S sont nécessairement les courbes que les surfaces distributrices principales v = Cte de la congruence D déterminent sur cette surface.

Les constatations précédentes permettent, eu égard au théorème I, de formuler le:

Théorème III. Afin que le réseau de courbes, que les surfaces reglées à paramètre distributeur: p constant engendrées par les droites d'une congruence parabolique ayant comme nappe focale unique une surface minima, déterminent sur cette surface, soit conjugué, quelle que soit la valeur constante $\neq 0$ de p, il faut et il suffit que la congruence soit engendrée par les tangentes aux trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'un hélicoïde minima reglé.

8. Supposons en second lieu que la congruence considérée D soit une congruence R_m.

Dans ce cas, la congruence D n'est ni isotrope ni parabolique et, ayant, comme surface moyenne une surface minima S, elle n'est pas engendrée par les normales à cette surface. En outre, d'après le théorème I, les courbes que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur la surface S sont les lignes asymptotiques de cette sufrace.

Or, si D référée à ses surfaces distributrices principales v = Cte, u = Cte et ayant comme directrice sa surface moyenne S est définie par l'équation (2, 1), les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S sont ses lignes asymptotiques et, comme S est une surface minima, le réseau (u, v) sur elle est nécessairement orthogonal.

Mais, si l'on exprime que le réseau (u, v) sur la surface S est orthogonal et que l'on tienne compte que, d'après les suppositions faites, les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de S peuvent s'écrive sous la forme (3, 5), on aura

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = l_1 \,.\, l_2 = 0.$$

On aura donc ou bien $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ ou bien $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, car la congruence S n'est pas engendrée par les normales à la surface S et, par suite, au moins une des fonctions l_1, l_2 des u, v doit être $\neq 0$.

Or, si

$$(8, 1) \qquad l_1 = 0, \qquad l_1 \neq 0,$$

les équations (5, 8), qui sont nécessairement vérifiées, puisque les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S sont ses lignes asymptotiques, deviennent $\dfrac{\partial a}{\partial v} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{l_2}{bp_2}\right) = 0$; en outre de la première équation (3, 6), eu égard aux (8, 1) et au fait que l'on a $\dfrac{\partial a}{\partial v} = 0$, résulte que l'on aura également $\dfrac{\partial p_1}{\partial v} = 0$. Donc, dans le cas envisagé, a, p_1 et $\dfrac{l_2}{bp_1}$ sont nécessairement des fonctions de la seule variable u:

$$(8, 2) \qquad a = a(u), \qquad p_1 = p_1(u), \qquad \frac{l_2}{bp_2} = \sigma(u) \neq 0.$$

Ainsi les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface moyenne S de D, grâce aux (8, 1) et (8, 2), acquièrent la forme

$$(8, 3) \qquad \bar{r}_u = a(u)\, p_1(u)\, \bar{g}, \qquad \bar{r}_v = bp_2\{-\bar{t} + \sigma(u)\, \bar{l}\}.$$

Il s'ensuit, compte tenu que, grâce aux (8, 3), on a pour les coefficients E, F, G de la première forme différentielle fondamentale de S référée à ses lignes asymptotiques v = Cte, u = Cte les expressions

$$(8, 4) \qquad E = a^2 p_1^2 = E(u), \qquad F = 0, \qquad G = b^2 p_2^2\{1 + \sigma^2(u)\},$$

que les lignes asymptotiques v = Cte de S sont nécessairement des droites, puisqu'elles sont en même temps des géodésiques de cette surface et que, par conséquent S est une surface minima reglée. Donc la surface moyenne S de la congruence D, à moins qu'elle ne soit plane, est nécessairement un hélisoïde minima reglé. Mais, cela étant, S est-comme on sait [**1**, p. 197] — une surface applicable sur une surface de révolution dont les méridiens sont les images, dans la représentation isométrique des deux surfaces, l'une sur l'autre, des génératrices rectilignes $v = Cte$ de S ; par conséquent, le troisième des coefficients (8, 5) de la première forme différentielle fondamentale de S, référée aux paramètres considérés u, v, doit être une fonction des u, v de la forme : $\varphi_1(u) . \varphi_2(v)$.

On aura donc :

$$G = \varphi_1(u) . \varphi_2(v) = b^2 p_2^2 \{1 + \sigma^2(u)\}, \tag{8, 5}$$

tandis que, d'après la première des (8, 2) on a $a = a(u)$.

Il en résulte que, dans le cas envisagé, on peut référer la congruence D à deux paramètres u, v tels que les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, tandis que l'on a

$$a = 1, \qquad G = G(u). \tag{8, 6}$$

Cela étant, le produit bp_2 est nécessairement une fonction de la seule variable u, puisque le coefficient G en vertu des (8, 2) et (8, 3), doit avoir la forme (8, 4) ; en outre, grâce à la troisième des (8, 2) et au fait que $bp_2 = \varphi(u)$, il en est de même de l_2.

On aura donc :

$$bp_2 = \varphi(u), \qquad l_2 = l_2(u), \tag{8, 7}$$

et de la première de ces relations, en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en ayant égard à la seconde équation (3, 6) et aux relations (8, 2) et (8, 7), on parvient à l'équation

$$\frac{\partial b}{\partial u} = \left[\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{du} - \sigma\right]\frac{\varphi}{p_1} \equiv F(u) ; \tag{8, 8}$$

ce qui montre que b doit être une fonction des u, v de la forme $F_1(u) + F_2(v)$.

Mais la fonction $F_2(v)$ doit être une constante, car b doit satisfaire à l'équation $\dfrac{\partial^2 b}{\partial u^2} + b = 0$, à laquelle se ramène, grâce à la première relation (8, 6), l'équation (2, 7). Donc b est nécessairement une fonction de la seule variable u, qui doit être de la forme : $c_1 . \cos(u + c)$, où c_1, c sont des constantes dont au moins la première est $\neq 0$, car elle doit satisfaire à l'équation différentielle ordinaire $\frac{d^2b}{du^2} + b = 0$, à laquelle, en vertu de la première relation (8, 6) et au fait que $b = b(u)$, se ramène l'équation (2, 7).

De cette constatation jointe aux précédentes résulte que, dans le cas envisagé, on peut référer la congruence D à deux paramètres u, v tels que les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, tandis que l'on a

$$(8, 9) \qquad a = 1, \quad b = \cos u, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = l_2(u).$$

En outre, en vertu des (8, 2), (8, 9) et de la première relation (8, 7), les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de D sont également des fonctions de la seule variable u:

$$(8, 10) \qquad p_1 = p_1(u), \quad p_2 = p_2(u)$$

et, par suite, ils sont liés par une relation (indépendante des variables u, v).

Si, au lieu d'avoir $l_1 = 0$, $l_2 \not\equiv 0$, on a $l_1 \not\equiv 0$, $l_2 = 0$, on peut démontrer par des raisonnements pareils aux précédents que la congruence R_m considérée peut être référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, tandis que dans les équations (3, 5) on a

$$a = \cos v, \quad b = 1, \quad l_1 = l_1(v) \not\equiv 0, \quad l_2 = 0, \quad p_1 = p_1(v), \quad p_2 = p_2(v);$$

de là il devient évident que dans l'étude des congruences R_m on peut se borner au cas où l'on a $l_1 = 0$, $l_2 \not\equiv 0$.

Dans ce cas, d'après les constatations précédentes, le carré de l'élément linéaire $d\sigma^2$ de l'image sphérique Σ de la congruence considérée R_m référée à ses surfaces distributrices principales $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ devient, par un choix convenable des paramètres u, v, entiérement determiné:

$$(8, 11) \qquad d\sigma^2 = du^2 + dv^2 \,.\, \cos^2 u,$$

tandis que les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre de l'équation (2, 2) de la surface moyenne S de la congruence, grâce aux (8, 1), (8, 9) et (8, 10), acquièrent la forme

$$(8, 12) \qquad \bar{r}_u = p_1(u)\,\bar{g}, \quad \bar{r}_v = -p_2(u) \,.\, \cos u\, \bar{t} + l_2(u)\, \bar{l}.$$

En outre, si L, M, N sont les coefficients de la seconde forme différentielle fondamentale de la surface S référée aux paramètres considérés u, v, qui — comme nous l'avons déjà démontré — à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minima reglé, on aura $L = N = 0$, puisque les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur elle sont ses lignes asymptotiques. Or, pour que la surface S soit plane, il suffit que l'on ait en plus $M = 0$, ou, ce qui revient au même, il suffit que la fonction $\bar{r}(u, v)$ du second membre de l'équation (2, 2) de S vérifie l'équation

$$\bar{r}_{uv} \times (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v) = 0. \tag{8, 13}$$

Mais de la première équation (8, 12) on obtient, en ayant égard aux (2, 6) et (8, 11), pour la dérivée $\bar{r}_{uv}$ de la fonction $\bar{r}(u, v)$ l'expression

$$\bar{r}_{uv} = p_1\{\bar{t}\cos u - \boldsymbol{l}\sin u\} \tag{8, 14}$$

et, grâce aux (8, 12) et (8, 14), la condition (8, 13) qui est suffisante, afin que la surface moyenne S de la congruence soit plane, devient

$$l_2 . \sin u - p_2 \cos^2 u = 0. \tag{8, 15}$$

Par ailleurs *l'enveloppée moyenne* (enveloppe des plans médiateurs des segments focaux) de la congruence R_m considérée sera définie par rapport au système de référence fixe Oxyz par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \{\bar{R}'' - \bar{r}(u, v)\} \times \boldsymbol{l} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\{(\bar{R}'' - \bar{r}) \times \boldsymbol{l}\} = 0, \qquad \dfrac{\partial}{\partial v}\{(\bar{R}'' - \bar{r}) \times \boldsymbol{l}\} = 0, \end{array}\right. \tag{8, 16}$$

où $\bar{r}(u, v)$ et $\bar{R}''$ sont les rayons — vecteurs dont les extrémités sont le point moyen de la génératrice courante $g(u, v)$ de la congruence et le point de l'enveloppée moyenne S'', qui correspond à ce point de la droite g.

Les équations (8, 16), en vertu des (2, 3) et (8, 12), prennent la forme

$$(\bar{R}'' - \bar{r}) \times \boldsymbol{l} = 0, \qquad (\bar{R}'' - \bar{r}) \times \bar{t} = 0, \qquad (\bar{R}'' - \bar{r}) \times \bar{g} = \frac{l_2}{\cos u}$$

et elles montrent, sous cette forme, que l'équation vectorielle par rapport au système Oxyz de l'enveloppée moyenne S'' de la congruence, référée aux paramètres u, v, peut s'écrire sous la forme

$$\bar{R}'' = \bar{r}(u, v) + \frac{l_2(u)}{\cos u}\bar{g}. \tag{8, 17}$$

La différentiation de l'équation (8, 17) par rapport à u et à v conduit, eu égard aux (2, 6) et (8, 12), aux équations

$$(8,18) \qquad \overline{R}''_u = \left[p_1 + \dot{\left(\frac{l_2}{\cos u}\right)}\right]\bar{g},^{*} \qquad \overline{R}''_v = -\cos u \,.\left[p_2 - l_2\frac{\sin u}{\cos^2 u}\right]\bar{t}.$$

La seconde équation (8, 18), dans le cas où la surface moyenne S de la congruence est plane, en vertu de (8, 15) devient $\overline{R}''_v = 0$. Donc, dans ce cas, l'enveloppée moyenne S'' de la congruence dégénère en courbe. En outre la différentiation par rapport à u de la première équation (8, 18) conduit, à l'aide des (2, 6) et (8, 9), à l'équation $\overline{R}''_{u^2} = \left[\dot{p}_1 + \ddot{\left(\frac{l_2}{\cos u}\right)}\right]\bar{g}$.

On aura donc, en ayant égard à la première équation (8,18), $\overline{R}''_u \wedge \overline{R}''_{u^2} = 0$; ce qui montre que la courbe à laquelle dégénère l'enveloppée moyenne de la congruence, lorsque sa surface moyenne est plane, est une droite.

Si la surface moyenne de la congruence n'est pas plane, des deux équations (8, 18) on obtient pour les dérivées $\overline{R}''_{u^2}$, $\overline{R}''_{v^2}$ du second membre de l'équation (8, 17) de son enveloppée moyenne S'', en ayant égard aux (2, 6) et (8, 9), les expressions

$$(8,19) \qquad \overline{R}''_{u^2} = \left[\dot{p}_1 + \ddot{\left(\frac{l_2}{\cos u}\right)}\right]\bar{g}, \qquad \overline{R}''_{v^2} = \sin u\left[p_2 - l_2\frac{\sin u}{\cos^2 u}\right]\bar{g}$$

On aura donc, dans ce cas, en vertu des (8, 18) et (8, 19).

$$(8,20) \qquad \overline{R}''_{u^2} \times (\overline{R}''_u \wedge \overline{R}''_v) = 0, \qquad \overline{R}''_{v^2} \times (\overline{R}''_u \wedge \overline{R}''_v) = 0$$

et

$$(8,21) \qquad \overline{R}''_u \times \overline{R}''_v = 0.$$

Les relations (8, 20) expriment que les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface S'' sont ses lignes asymptotiques, tandis que de la relation (8, 21) résulte que le réseau formé par ces courbes est orthogonal. Donc S'' est nécessairement une surface minima. En outre les lignes asymptotiques v = Cte de S'' sont des droites, car, en vertu des deux premières équations (8, 18) et (8, 19), on a $\overline{R}''_u \wedge \overline{R}''_{u^2} = 0$. Donc, dans le cas où la surface moyenne de la congruence n'est pas plane, son enve-

---

* Les points désignent les derivées par rapport à la variable u.

loppée moyenne est une surface minima reglée et, par suite, elle est un hélicoïde minima reglé.

En outre une surface génératrice S′ de la congruence R_m considérée, qui — comme nous l'avons déjà signalé — est une congruence de Ribaucour, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 4, peut être définie à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz par les équations

$$(8,22) \qquad \bar{r}'_u = \varrho\, p_1(u)\, \bar{t}, \qquad \bar{r}'_v = \varrho\, p_2(u) . \cos u\, \bar{g}$$

qui s'obtiennent des deux équations (4, 4) en y remplaçant les scalaires a, b, p_1, p_2 qui y figurent, par leurs valeurs (8, 9) et (8, 10), le scalaire ϱ, que ces équations renferment, étant une fonction de la seule variable u, car ϱ doit satisfaire aux équations (4, 7) qui, dans les cas envisagé, grâce aux (8, 1), (8, 9) et (8, 10), deviennent.

$$\frac{\varrho_u}{\varrho} = -\frac{l_2(u)}{p_2(u)\cos u}, \qquad \varrho_v = 0.$$

Cela étant, des deux équations (8, 22), résulte que, si E′, F′, G′ sont les coefficients de la première forme différentielle fondamentale de la surface S′ référée aux paramètres u, v, E et G sont des fonctions de la seule variable u, tandis que F est $\equiv 0$ et de là que le réseau (u, v) sur la surface S′ est isotherme, les courbes v = Cte de ce réseau étant des géodésiques de cette surface. En outre les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface S′ sont ses lignes de courbure, car ces courbes sont les images sur la surface S′ des courbes, que les surfaces distributrices principales v = Cte, u = Cte de la congruence déterminent sur sa surface moyenne S dans la représentation des surfaces S, S′, l'une sur l'autre, considérée dans le paragraphe 4 [**6**, p. 134]. Donc S′ est une surface isothermique dont les lignes de courbure de l'un système sont des géodésiques et, par conséquent, elle est nécessairement une surface de révolution (**5**, p. 329).

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le :

T h é o r è m e IV. *La surface moyenne d'une congruence R_m, à moins qu'elle ne soit plane, est un hélicoïde minima reglé, son enveloppée moyenne est également un hélicoïde minima reglé qui dégénère à une seule droite, dans le cas où la surface moyenne de la congruence est plane, ses surfaces génératrices sont* *des surfaces de révolution et ses paramètres distributeurs principaux sont liés par une relation.*

9. Supposons enfin que la congruence considérée D soit une congruence R_m dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par la relation

$$p_2 = p_2(p_1), \tag{9, 1}$$

où $p_2(p_1) \not\equiv p_1$, puisque D est une congruence R_m et, par suite, une congruence non isotrope.

La congruence D, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 8, peut être référée à deux paramètres u, v tels que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, tandis que dans les expressions (3, 5) des dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (2, 2) de la surface moyenne S de la congruence on a

$$a = 1, \quad b = \cos u, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = l_2(u), \quad p_1 = p_1(u), \quad p_2 = p_2(p_1) \equiv F(u). \tag{9, 2}$$

Cela étant, si l'on remplace dans les équations (2, 7), (3, 6), (4, 8) et (5, 8) a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 par leurs valeurs (9, 2), on reconnaît que les équations (2, 7), (4, 8), (5, 8) et la première équation (3, 6) sont identiquement vérifiées, tandis que des deux dernières équations (3, 6), on parvient, en tenant compte que p_1, p_2 sont liés par la relation donnée (9, 1) aux deux équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dfrac{dp_2}{dp_1} \cdot \dfrac{dp_1}{du} + \{p_1 - p_2(p_1)\} \dfrac{\sin u}{\cos u} - \dfrac{l_2}{\cos u} = 0, \\[2ex] \dfrac{dl_2}{du} + \{p_1 + p_2(p_1)\} \cos u = 0, \end{cases} \tag{9, 3}$$

auxquelles doivent satisfaire les fonctions p_1, l_2 de la variable u.

Il en résulte que, si l'on rapporte la surface de la sphère-unité à deux paramètres u, v tels que le carré de son élément linéaire soit de la forme (8, 11), au réseau (u, v) sur cette surface, qui est orthogonal, on peut faire associer de la manière exposée dans le paragraphe 3 un ensemble (E) de congruences R_m, les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de chacune desquelles sont liés par la relation donnée (9, 1). Les congruences de cet ensemble, qui sont définies à une translation près par rapport au système de référence fixe Oxyz correspondent aux couples de fonctions p_1, l_2 de la variable u vérifiant le système des deux équations différentielles ordinaires (9, 3), dans lesquelles p_1 p_2 sont liés par la relation (9, 1). Toutes les autres congruences R_m dont les paramètres distributeurs principaux sont liés par la même relation, s'obtiennent par des déplacements des congruences appartenant à l'ensemble (E), puisque le carré de l'élément linéaire de l'image sphérique de toute congruence R_m référée à ses surfaces distributrices principales est — comme nous l'avons déjà reconnu — entiérement déterminé.

Donc le problème de la détermination des congruences R_m, dont les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 sont liés par une relation donnée, se ramène, par un choix convenable des paramètres u, v, auxquels ces congruences sont référées, à la détermination des couples de fonctions p_1, l_2 de la variable u, qui vérifient le système des deux équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre (9, 3), dans lesquelles p_1, p_2 sont liés par la relation donnée.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι παραμέτρου διανομῆς: p σταθερᾶς αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν σμήνους εὐθειογενοῦς μὴ ἰσοτρόπου τοῦ συνήθους τριδιαστάτου χώρου ἀποτελοῦν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς p δύο μονοπαραμετρικὰς οἰκογενείας συμπιπτούσας εἰς μίαν διὰ δύο τὸ πολὺ τιμὰς τῆς p. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο τούτων οἰκογενειῶν, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο αὗται οἰκογένειαι δὲν συμπίπτουν, τέμνουν τὴν μέσην ἐπιφάνειαν τοῦ σμήνους κατὰ καμπύλας ἀποτελούσας δίκτυον, τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχηθῇ εἰς τὴν τιμὴν τῆς p, εἰς ἣν αἱ δύο οἰκογένειαι τῶν ἐπιφανειῶν ἀντιστοιχοῦν. Οὕτως ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας σμήνους μὴ ἰσοτρόπου εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ σύνολον δικτύων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ κατὰ τὸν προεκτεθέντα τρόπον εἰς ὡρισμένην τιμὴν τῆς p. Τῶν δικτύων δὲ τοῦ συνόλου τούτου ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας σμήνους μὴ ἰσοτρόπου τυχαίως λαμβανομένου οὐδὲν ἐν γένει εἶναι συζυγές. Ὑπάρχει ὅμως κατηγορία σμηνῶν, ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν ὁποίων ὅλα τὰ δίκτυα τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος συνόλου εἶναι συζυγῆ, εἰς τὴν ἐργασίαν δὲ ταύτην μελετῶνται τὰ ἔχοντα τὴν ἰδιότητα ταύτην σμήνη, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ μέση ἐπιφάνεια εἶναι ἐλαχίστης ἐκτάσεως.

Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύεται θεώρημα ἐκφράζον συνθήκην ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν ἵνα σμῆνος πραγματικῶν εὐθειῶν μὴ ἰσότροπον ἔχῃ τὴν προαναφερομένην ἰδιότητα. Ἀκολούθως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται εἰς τὴν περίπτω-

σιν καθ' ἣν τὸ σμῆνος εἶναι καθετικόν, αἱ δὲ εὐθεῖαι αὐτοῦ εἶναι αἱ κάθετοι ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἐκτάσεως, ἡ ὁποία, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι καὶ ἡ μέση ἐπιφάνεια αὐτοῦ, ἐνῷ, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σμῆνος εἶναι παραβολικόν, ἡ δὲ μοναδικὴ ἑστιακὴ χώνη αὐτοῦ εἶναι ἐπιφάνεια ἐλαχίστης ἐκτάσεως, ἡ εὑρεθεῖσα συνθήκη πληροῦται μόνον ὅταν αἱ εὐθεῖαι τοῦ σμήνους εἶναι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν τῶν εὐθυγράμμων γενετειρῶν ἑλικοειδοῦς εὐθειογενοῦς ἐλαχίστης ἐκτάσεως. Μετὰ τὰς διαπιστώσεις ταύτας μελετῶνται τὰ μὴ παραβολικὰ σμήνη τὰ ἔχοντα τὴν προαναφερομένην ἰδιότητα, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ μέση ἐπιφάνεια εἶναι ἐλαχίστης ἐκτάσεως, αἱ δὲ εὐθεῖαι δὲν εἶναι αἱ κάθετοι τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Τὰ σμήνη ταῦτα, τὰ ὁποῖα, συντομίας χάριν, καλοῦνται σμήνη R_m, ὡς καὶ τὰ σμήνη ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι εἶναι αἱ κάθετοι ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἐκτάσεως, εἶναι σμήνη τοῦ Ribaucour, τῶν ὁποίων αἱ κύριαι παράμετροι διανομῆς συνδέονται διὰ σχέσεως ἀνεξαρτήτου τῶν δύο μεταβλητῶν εἰς τὰ συστήματα τιμῶν, τῶν ὁποίων ἀντιστοιχοῦν αἱ εὐθεῖαι αὐτῶν. Ἡ μέση ἐπιφάνεια σμήνους R_m εἶναι κατ' ἀνάγκην ἑλικοειδὲς εὐθειογενὲς ἐλαχίστης ἐκτάσεως ἢ ἐπίπεδος, ἡ μέση περιβάλλουσα αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης ἑλικοειδὲς εὐθειογενὲς ἐλαχίστης ἐκτάσεως, τὸ ὁποῖον, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μέση ἐπιφάνεια τοῦ σμήνους εἶναι ἐπίπεδος, ἐκφυλίζεται εἰς μίαν μοναδικὴν εὐθεῖαν, αἱ δὲ γεννήτριαι ἐπιφάνειαι αὐτοῦ εἶναι ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς. Ἐν τέλει ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τῶν σμηνῶν R_m, τῶν ὁποίων αἱ κύριαι παράμετροι διανομῆς συνδέονται διὰ δοθείσης σχέσεως ἀνάγεται εἰς τὸ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ζευγῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς τῶν πληρουσῶν σύστημα δύο κοινῶν γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. (Teubner) 1910.
2. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. (Springer) 1924.
3. A. R. Forsyth, Lectures on the differential geometry of curves and surfaces. Cambridge, 1920.
4. A. Milloux et P. Vincensini, Sur une méthode vectorielle d'étude des congruences de droites et quelques-unes de ses applications. Bull. Sc. Math. S. 2, 94 (1970), p. 5 à 24.
5. O. Pylarinos, Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution. Ann. di Mat. par. ed applic. S. IV, Vol. LIX (1962), p. 319 à 350.
6. Ram Behari and Sh. Mishra, On the congruences of Ribaucour, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences (India), sect. A, 28 (1948), p 132 à 145.