τουμένου ὀξυγόνου (Vacatsauerstoff) εὑρέθη ὅτι σὺν τῇ συγχρόνῳ διασπάσει τῆς Καζεΐνης αὐξάνει καὶ τὸ ποσὸν τοῦ πρὸς ὀξείδωσιν αὐτῆς ἀναγκαίου ὀξυγόνου. Ἐκ τούτου συμπεραίνεται ὅτι ἡ ἀκεταλδεΰδη σχηματίζεται ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ μορίου τοῦ Λευκώματος καὶ δὲν ὀφείλεται μερικῶς εἰς τὸ κρυσταλλικὸν ὕδωρ τῶν πρωτεϊνῶν. Περαιτέρω βεβαιοῦται ὅτι ὁ σχηματισμὸς τῆς Ἀκεταλδεΰδης εἶναι προϊὸν τῆς διασπάσεως τῶν Λευκωμάτων καὶ δὲν ὀφείλεται εἰς ἰδιαιτέραν σύνδεσιν τῶν ἀμινοοξέων ἐντὸς τοῦ μορίου τοῦ Λευκώματος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—**Sur l'équation de Smoluchowsky***, *par* ***W. Doeblin.***

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κωνστ. Μαλτέζου.

Dans une Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris[1] et dans deux résumés paraissant l'un dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk (1937), l'autre au Rendiconti de l'Academia dei Lincei (7 Février 1937), nous avons envisagé quelques cas particuliers du problème suivant:

W étant un ensemble abstrait quelconque, on observe la position d'un «point» mobile se mouvant aléatoirement sur W dans une suite dénombrée d'instants dits épreuves, et l'on suppose qu'il existe pour chaque point $E \varepsilon W$ et pour tout $\mathcal{E}$ d'une certaine famille additive F de sous-ensembles de W «probabilisables» une probabilité de passage bien définie de E dans $\mathcal{E}$ à la n^e épreuve.

Nous allons supposer ici que W est un ensemble mesurable d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions, de mesure positive, F la famille des sous-ensembles de W mesurables (L) ou (B), mais qu'on observe la position du point mobile pour tout instant à partir d'une certaine origine du temps et qu'on ait une probabilité bien definie $P(E, \mathcal{E}, t)$ pour que le point mobile passe de la position E à l'instant τ (τ quelconque) dans $\mathcal{E} < F$ à l'instant $\tau + t$ $(t > 0)$. Nous faisons sur $P(E, \mathcal{E}, t)$ comme fonction de E et $\mathcal{E}$ les mêmes hypothèses de mesurabilité que dans notre note aux Rend. d. Lincei. $P(E, \mathcal{E}, t)$ satisfait à l'équation de Smoluchowsky:

$$P(E, \mathcal{E}, t_1 + t_2) = \int_W P(F, \mathcal{E}, t_1)\, P(E, dA_F, t_2), \qquad P(E, W, t) = 1$$

Nous supposons que $P(E, \mathcal{E}, t)$ satisfait suivant la mesure de W à une des deux conditions:

---

* W. DOEBLIN.—Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ Smoluchowsky.

[1] *C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, **203**, p. 24-26 et 592, 1936.

1. Si mes$W<\infty$, il existe un $T>0$, deux nombres positifs ε et η tels que $P(E, \mathcal{E}, t)$ soit continue pour $t>T$ (en t) et

$$P(E, \mathcal{E}, t)<1-\varepsilon \quad \text{si mes } (\mathcal{E})<\eta \quad \text{quel que soit E}$$

2. Si mes$W=\infty$, il existe un $T>0$, deux nombres positifs ε et η et une sphère S de rayon fini R, telle que $P(E, \mathcal{E}, t)$ soit continue pour $t>T$ en t et

$$P(E, \mathcal{E}, t)<1-\varepsilon \quad \text{si mes } (\mathcal{E}\cdot S)<\eta \quad \text{quel que soit E}$$

Alors on démontre encore l'existence d'un nombre fini d'ensembles disjoints $G_1, \ldots G_e$, dits ensembles finaux, de mesure positive $>\eta$ et jouissant maintenant des propriétés: La probabilité pour que le point mobile se trouve encore à l'instant t à l'extérieur de ΣG_α tend vers zéro si t augmente indifiniment (uniformément par rapport à E, comme $k e^{-\lambda t}$). Le point mobile ne peut quitter l'ensemble final dans lequel il est amené que dans des cas de probabilité nulle. Il passe avec probabilité 1 une infinité de fois par chaque sous-ensemble de mesure positive de cet ensemble final. Si $E \varepsilon G_\alpha$ et $\mathcal{E}<G_\alpha$: $P(E, \mathcal{E}, t) \to P_\alpha(\mathcal{E})$, $P_\alpha(\mathcal{E})$ étant complétement additive, positive pour chaque sous-ensemble de mesure non nulle de G_α, satisfaisant à $P_\alpha(G_\alpha)=1$ et étant nulle en dehors de G_α[1].

Désignons par $\Pr[E, G_\alpha]$ la probabilité de passer de E dans G_α; alors si E et $\mathcal{E}$ sont quelconques

$$P(E, \mathcal{E}, t) \to \Pr[E, \mathcal{E}] = \Sigma \Pr[E, G_\alpha] P_\alpha(\mathcal{E}) = \Sigma \Pr[E, G_\alpha] P_\alpha(\mathcal{E}, G_\alpha).$$

Si nous supposons que $P(E, \mathcal{E}, t)$ soit continue en t pour $t>0$, ou seulement intégrable, alors l'intégrale suivante existe:

$$\int_0^\infty [P(E, \mathcal{E}, t) - \Pr(E, \mathcal{E})]\, dt$$

et sera désignée par $s(E, \mathcal{E})$. Nous faisons dans ce qui suit l'hypothèse:

3. Si S_E^ϱ désigne une sphère de rayon ϱ entourant le point E, quelque petit que soit $\varrho>0$ $\quad P(E, S_E^\varrho, t) \to 1$

uniformément par rapport à E.

[1] La plupart des résultats qui précèdent ont été obtenus avant nous par M. Bogoliouboff, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **64**, p. 49-56, 1936, mais dans des hypothèses beaucoup plus restrictives. Au moment où nous les avons déduit de nos résultats antérieurs, nous avions d'ailleurs été informé que M. Bogoliouboff avait mis en évidence (mais par des méthodes et sous des hypothèses que nous ignorions) des ensembles ergodiques desquels on ne peut pas sortir, et à l'intérieur desquels le principe ergodique s'applique.

Ceci posé envisageons une fonction de point $x(F)$ bornée et uniformément continue. Soit $X(E,t)$ la variable aléatoire égale à $x(F)$ si le point mobile parti de E se trouve après le temps t dans F. Alors:

α′. $X(E,t)$ satisfait avec probabilité 1 à une condition locale de Hölder généralisée: en termes précis, il existe une fonction $\varepsilon(|\tau|) \to 0$ avec τ telle que la probabilité, pour qu'on ait pour un $|\tau| < \tau_1$

$$|X(E, t+\tau) - X(E,t)| > \varepsilon(|\tau|)$$

t étant un instant donné, tend vers zéro avec τ_1

β′. $X(E,t)$ est pour chaque E, Riemann-intégrable par rapport à t avec probabilité 1

γ′. $$\frac{1}{t} M\left[\int_0^t X(E,t)\,dt\right] = \frac{1}{t}\int_0^t M\left[X(E,t)\right] dt \to \sum_\alpha \Pr\left[E, G_\alpha\right] \int_{G\alpha} x(F)\, P_\alpha(dA_F)$$

δ′. A l'intérieur d'un ensemble final G_α

$$\frac{1}{t} M\left[\int_0^t X(E,t)\,dt\right] \to \int_{G\alpha} x(F)\, P_\alpha(dA_F) = M_\alpha$$

$$\frac{1}{t} M\left[\int_0^t \left(X(E,t) - M_a\right) dt\right]^2 \to 2\int_{G\alpha} \left[x(F) - M_a\right] \left\{\int_{G\alpha} x(\sigma)\, s(F, dA_\sigma)\right\} P(dA_F) = \sigma_\alpha^2$$

ε′. A l'intérieur d'un ensemble final G_α si $\sigma_\alpha^2 \neq 0$, la variable

$$\frac{\int_0^t \left(X(E,t) - M_\alpha\right) dt}{\sqrt{t} \cdot \sigma\alpha}$$

suit une loi qui tend vers la loi de Gauss reduite, tous les moments de cette grandeur tendent vers les moments correspondants de la loi de Gauss et le théorème du logarithme itéré est verifié sous la forme de M. Paul Lévy, c'est-à-dire: la probabilité pour que

$$\left|\int_0^t X(E,t)\,dt - M_\alpha t\right| > \sqrt{2\sigma_\alpha^2\, t\,(\lg_2 t + c \lg_3 t)}$$

pour un t au moins $> T$, tend vers zéro si $c > \frac{3}{2}$ avec $\frac{1}{T}$, est 1 si $c < \frac{1}{2}$.

ϛ′. A l'intérieur d'un ensemble final G_α, si $\sigma_\alpha^2 = 0$, alors

$$\int_0^t X(E,t)\,dt - t M_\alpha$$

reste bornée en dehors de cas de probabilité nulle et dans le sens bernouillien et dans le sens de la loi uniforme des grands nombres. A l'intérieur d'un ensemble final, dans tous les cas, l'intégrale

$$\frac{1}{t}\int_{o}^{t} X(E, t)\, dt$$

tend en dehors de cas de probabilité nulle vers M_α.

ζ'. Dans le cas général, si la position initiale E se trouve à l'extérieur des ensemble finaux, alors la loi que suit

$$\frac{1}{t}\int_{o}^{t} X(E, t)\, dt$$

tend vers une loi totalement discontinue suivant laquelle les valeurs M_α sont prises avec les probabilités $Pr[E, G_\alpha]$. Dans le cas exceptionnel où toutes les M_α avec $Pr[E, G_\alpha] > 0$ sont égales à M (ce qui arrivera en particulier s'il n'y a qu'un seul G_α), alors

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{o}^{t}\left[X(E, t) - M\right] dt$$

suit une loi qui tend vers la loi de répartition définie par la formule

$$\Sigma^{(1)} Pr[E, G_\alpha]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\alpha}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_\alpha^2}} dt + \Sigma^{(2)} Pr[E, G_\alpha]\frac{|X| + X}{2X}$$

la première somme étant étendue à ceux des ensembles finaux G_α avec $\sigma_\alpha \neq 0$, la seconde aux autres.