ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Le théorème d'André Bloch et les fonctions multiformes, *par Th. Varopoulos**. Presentée par M. C. Maltézos.

1. André Bloch a demontré[1], pour les fonctions holomorphes, et méromorphes, dans le cercle unité, le théorème fondamental suivant:

«Si les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$, holomorphes pour

$$|z|<1,$$

ne s'annullent pas, et si

$$f_1(z)+f_2(z)$$

ne prend pas la valeur *un*, alors la famille complexe[2] f_1, f_2 est normale dans le domaine, et bornée, si on se donne

$$f_1(0)=a_0, \quad f_2(0)=b_0$$

et si $a_0 \neq 1$, $b_0 \neq 1$».

Il est visible que cela revient au même à considerer trois fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ qui ne s'annullent pas et verifient

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)=1,$$

car $\quad f_1(z)+f_2(z)-1=-f_3(z) \quad$ ne s'annule pas $[f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z)$ holomorphes].

La demonstration correcte a été donné par Henri Cartan dans sa thèse aux Annales de l'École Normale Supérieure de Paris 1928.

2. Ce théorème comporte des applications aux fonctions multiformes. Si a, b, c sont exceptionnelles pour u multiforme, definie par l'équation

$$u^2+g_1\, u+g_2=0,$$

les g_1, g_2 fonctions entières, on a:

$$a^2+g_1\, a+g_2=(a-b)\,(a-c)\, f_1(z)$$
$$b^2+g_1\, b+g_2=(b-a)\,(b-c)\, f_2(z)$$
$$c^2+g_1\, c+g_2=(c-a)\,(c-b)\, f_3(z);$$

$f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ ne s'annulant pas, on en déduit:

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)=1$$

---

* Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ, Τὸ θεώρημα τοῦ André Bloch καὶ αἱ πλειονότιμοι συναρτήσεις.

[1] *Les fonctions holomorphes ou méromorphes dans le cercle unité*, ANDRÉ BLOCH, Memorial des Sciences Mathématiques, Paris Gauthier Villars, 1926.

[2] P. MONTEL, Leçons sur les familles Normales et leurs applications (fonctions Analytiques), Paris, Gauthier Villars 1927.

car

$$\sum \frac{1}{(a-b)(a-c)} = 0, \qquad \sum \frac{a}{(a-b)(a-c)} = 0,$$

$$\sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} = 1$$

on retrouve ainsi qu'*il ne peut y avoir plus de* $\nu + 1$ *valeur exceptionnelles, l'infini compris, sauf dans certains cas.*

On en deduit le théorème suivant:

Si u(z) *est une multiforme non entière ayant 4 valeur exceptionnelles* (ou 4 combinaisons exceptionnelles de Montel), *la famille est normale avec quelques conditions unitiales.*

3. De même:

I. *Si* u(z) *est multiforme dont l'ordre est* n, *et si elle possède* n+1 *valeurs exceptiounelles, la famille est normale.*

II. Si u(z) rdmet ν valeurs ou combinaisons exceptionnelles dont $\nu-1$ du premier type, la derivée u'(z) de la multiforme admet 0 comme valeur exceptionelle.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$ les valeurs exceptionnelles du 1er type, et u_o la valeur du 2e type.

On peut écrire si $f(z, u) = 0$ definie la multiforme,

$$f(z, u) = f(u) + \lambda(z)\, g(u)$$

avec

$$f(u) = u^\nu + \ldots$$

$$g(u) = (u - u_1)(u - u_2) \ldots (u = u_{\nu-1})$$

$\lambda(z)$ fonction entière.

On a

$$u' [f' + \lambda g'] + \lambda' g = 0$$

donc pour

$$u' = 0, \quad \lambda' g = 0, \quad \text{c.à.d.} \quad \lambda' = 0$$

car g(u) n'est nul pour aucune valeur de u

or

$$f(u_o) + \lambda g(u_o) = p_o e^{\Omega_o}$$

$$\lambda' g(u_o) = [p'_o + p_o \Omega'_o]\, e^{\Omega_o}$$

donc le zéro est une valeur exceptionnelle pour λ' est par suit, pour u'

On a encore le théorème qui s'ennonce ainsi:

III. *Si l'algebroïde* u(z) *admet* ν *valeur exceptionnelles, la derivée* u'(z) *admet la valeur exceptionnelle zéro.*

4. Rémarque: Si l'équation

$$f(z, u) = u^{\nu} + a_1(z)u^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu}(z) = 0$$

admet $k \leqslant \nu - 1$ valeurs exceptionnelles du 1er type: $u_1, u_2, \ldots, u_k$, on peut mettre la relation $f(z, u) = 0$ sous la forme

$$g(z, u) + \frac{a_1}{u - u_1} + \frac{a_2}{u - u_2} + \cdots + \frac{a_\kappa}{u - u_\kappa} = 0$$

les a_i étant de constantes, et $g(z, u)$ polynôme en u de degré $\nu - k$; on en deduit aussitôt

a) *il ne peut y avoir plus de* $\nu - k$ *valeurs exceptionnelles du* 2^e *type*

b) *on peut en deduire aussi des resultats pour les valeurs exceptionnelles*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Γενικεύεται τὸ θεώρημα τοῦ Bloch τῶν ὁλομόρφων ἢ μερομόρφων συναρτήσεων ἑνὸς κλάδου, ὅπερ ἀπέδειξεν ἀληθὲς ὁ Cartan *εἰς τὰς πλειονοτίμους συναρτήσεις*, καὶ *δεικνύεται ἡ συμβολή του τόσον διὰ τὰς ἐξαιρετικὰς τιμάς*, ὅσον καὶ *διὰ τὸ κριτήριον τῶν κανονικῶν οἰκογενειῶν* ἃς αὗται σχηματίζουν. Ἐπίσης *δίδεται συνθήκη ἐπιτρέπουσα τὴν εὕρεσιν ἐξαιρετικῶν τιμῶν διὰ τὰς παραγώγους τῶν ἀλγεβροειδῶν*, ὧν ἡ μελέτη ἤρξατο ὑπὸ τοῦ ἀειμνήστου Ρεμούνδου εἰς τὴν διατριβήν του (Thèse) τῶν Παρισίων (1906).