ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 16ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1995

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΜΑΝΟΥΣΟΥ ΜΑΝΟΥΣΑΚΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΚΑΘΑΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

('Απονομὴ τοῦ βραβείου Nobel 1994)

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΡΤΕΜΙΑΔΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,
Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι.

Ἡ ἀπονομὴ τοῦ Βραβείου NOBEL—Οἰκονομικῶν 'Επιστημῶν τὴν 11-10-1994 στὸν 'Αμερικανὸ John Nash ἀποτελεῖ γεγονὸς ἰδιαιτέρας σημασίας καθότι γιὰ πρώτη φορὰ στὴν 93 ἐτῶν ἱστορία τῶν Βραβείων NOBEL ἀπονεμήθηκε αὐτὸ σὲ ἔργο ποὺ ἐμπίπτει καθ' ὁλοκληρίαν στὴν περιοχὴ τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν.

Ὅταν ὁ Σουηδὸς χημικός, μηχανικὸς καὶ φιλάνθρωπος Alfred Bernhard Nobel, ἵδρυσε τὸ 1901 τὸν θεσμὸ ἀπονομῆς τῶν βραβείων, ὅρισε ὅπως αὐτὰ ἀπονέμονται στὴν Χημεία, Φυσική, Φυσιολογία καὶ 'Ιατρική, καὶ στὴν Λογοτεχνία, δὲν ὅρισε ὅμως κανένα βραβεῖο γιὰ τὰ Μαθηματικά. Τὴν ἐποχὴ ἐκείνη εἶχε κυκλοφορήσει ἡ φήμη ὅτι μιὰ ἰδιατέρως κακὴ ἐμπειρία ποὺ εἶχε ὁ Nobel στὰ μαθηματικὰ κατὰ τὴν διάρκεια τῶν σπουδῶν του στὴν Μέση 'Εκπαίδευση, ὑπῆρξε ἡ αἰτία ποὺ τὸν ὁδήγησε νὰ ἐξαιρέσει τὴν «βασίλισσα καὶ τὴν θεραπαινίδα τῶν ἐπιστημῶν» ἀπὸ τὸν θεσμὸ τῶν βραβείων, χωρὶς βέβαια νὰ ἀποκλείεται καὶ τὸ ἐνδεχόμενο νὰ εἶχε ὁ Nobel τὴν ἄποψη ὅτι ὁ ρόλος τῶν Μαθηματικῶν δὲν ἦταν καὶ τόσο σημαντικὸς γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τοῦ ἀνθρώπου ὥστε νὰ δικαιολογεῖ τὴν θεσμοθέτηση σχετικοῦ βραβείου.

Ὅμως, ὅποιος κι ἂν ἦταν ὁ λόγος γιὰ τὴν μὴ θεσμοθέτηση βραβείου NOBEL στὰ Μαθηματικά, οἱ μαθηματικοὶ καθιέρωσαν τὸ δικό τους εἰδικὸ βραβεῖο, τὸ καλούμενο Fieds Medal, ἂν καὶ τὸ βραβεῖο αὐτὸ διαφέρει σημαντικὰ ἀπὸ τὸ Βραβεῖο NOBEL διότι ἀπονέμεται μόνο σὲ μαθηματικοὺς ἡλικίας μικροτέρας τῶν 40 ἐτῶν.

Ἡ ἐπιτυχὴς ἐφαρμογὴ τοῦ ἐρευνητικοῦ ἔργου τοῦ Nash σὲ οἰκονομικὲς θεωρίες συνετέλεσε στὴν ἀπὸ κοινοῦ ἀπονομὴ τοῦ ἰδίου βραβείου καὶ στοὺς συνεργάτες του τὸν Ἀμερικανὸ John Harsanyi καὶ τὸν Γερμανὸ Reinhard Selten.

Ἡ συμβολὴ τοῦ Nash στὸ κοινὸ ἔργο στὸ ὁποῖο ἀπονεμήθηκε τὸ βραβεῖο ἦταν στὸν κλάδο ἐκεῖνο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν ποὺ ὀνομάζεται «Θεωρία Παιγνίων» (Game Theory).

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἤθελα νὰ παραθέσω, γιὰ τοὺς ἀκροατὲς ποὺ δὲν εἶναι ἐξοικειωμένοι μὲ τὸ θέμα, σύντομα καὶ ἁπλά, μερικὲς εἰσαγωγικὲς καὶ ἱστορικῆς φύσεως πληροφορίες, ἀναφορικὰ μὲ τὴν «Θεωρία Παιγνίων» (τοῦ λοιποῦ γιὰ συντομία ΘΠ).

Ἡ ΘΠ ἀποτελεῖται ἀπὸ μαθηματικὰ πρότυπα (models) τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται στὴν μελέτη λήψεως ἀποφάσεων ὅταν πρόκειται γιὰ καταστάσεις ὅπου παρατηροῦνται φαινόμενα «ἀντιθέσεως» ἢ φαινόμενα «συνεργασίας». Ἀντίθεση λ.χ. μπορεῖ νὰ παρουσιασθεῖ κατὰ τὴν διάρκεια ἑνὸς παιχνιδιοῦ ὅταν κάθε παίκτης ἔχει τὴν δυνατότητα νὰ ἐπιλέγει ἀπὸ κάποιο πίνακα ἐναλλακτικῶν περιπτώσεων μία ἀπ' αὐτὲς ἡ ὁποία ἐνδεχομένως, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν τυχαία ἐμφάνιση πιθανῶν γεγονότων μπορεῖ νὰ ὁδηγήσει σὲ διάφορα ἀποτελέσματα ἐπὶ τῶν ὁποίων οἱ προτιμήσεις τῶν παικτῶν νὰ διαφέρουν, πράγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ συμπεριφορὰ ἑνὸς παίκτη ὁ ὁποῖος στοχεύει στὸ εὐνοϊκότερο γι' αὐτὸν ἀποτέλεσμα ἐνδέχεται νὰ προκαλέσει μὴ εὐνοϊκὰ ἀποτελέσματα γιὰ τοὺς ὑπολοίπους παῖκτες.

Ἡ ΘΠ ἀντιμετωπίζει τὶς περιπτώσεις τῶν «ἀντιθέσεων» θέτοντας τὸ παμπάλαιο καὶ γνωστὸ ἐρώτημα: «Μὲ ποιὸ τρόπο ὁ ἄνθρωπος καταλήγει στὸ νὰ κάμνει τὶς "τελικές" του ἐπιλογὲς ὅταν οἱ ἐπιλογὲς αὐτὲς ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ τί θὰ πράξουν οἱ ἄλλοι;» Ἔτσι τὸ πρῶτο πράγμα ποὺ συνειδητοποίησαν οἱ πρωτοπόροι στὴν ἔρευνα τῶν θεμάτων αὐτῶν, ἤτοι οἱ δύο καθηγητὲς τοῦ Princeton University τοὺς ὁποίους θὰ ὀνομάσω παρακάτω, ἦταν ὅτι οἱ ἀκολουθούμενες ὑπὸ τῶν παικτῶν στρατηγικὲς εἶναι ἀλληλοεξαρτημένες: οἱ παῖκτες δὲν μποροῦν νὰ λάβουν τελικὲς ἀποφάσεις μονομερῶς, διότι ὅπως ἀνέφερα προηγουμένως, ἡ καλύτερη, ἡ πιὸ συμφέρουσα ἐπιλογὴ τοῦ ἑνὸς παίκτη ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς ἐπιλογὲς τῶν ἄλλων παικτῶν.

Μολονότι στὰ δυνάμενα νὰ προκύψουν ἀποτελέσματα παρατηροῦνται συνήθως ἀντιθέσεις μεταξὺ τῶν παικτῶν, ὑπάρχουν καὶ περιπτώσεις δυνατῆς συνεργασίας μεταξὺ μερικῶν ἐξ αὐτῶν. Ἡ ΘΠ προσπαθεῖ νὰ ἀπομονώσει τὰ στοιχεῖα ἐκεῖνα ποὺ εἶναι κοινὰ καὶ οὐσιώδη στὶς προαναφερθεῖσες αὐτὲς καταστάσεις, νὰ τὰ μελετήσει χρησιμοποιώντας μαθηματικὲς μεθόδους καὶ ἐνδεχομένως νὰ παρέξει ὁδηγίες οἱ ὁποῖες θὰ κατευθύνουν τὸν κάθε παίκτη στὸ νὰ ἐπιδείξει τὴν λογικώτερη καὶ πλέον συμφέρουσα σ' αὐτὸν συμπεριφορὰ κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ παιχνιδιοῦ.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἐκτεθέντα προκύπτει ὅτι ἡ ΘΠ προχωρεῖ πέραν τῆς «Θεωρίας Πιθανοτήτων» καὶ τῆς «Θεωρίας Ἀποφάσεων» (Decision Making) καθόσον οἱ δύο αὐτὲς κλασικὲς θεωρίες ἐπαρκοῦν μόνο γιὰ τὴν ἐπίλυση προβλημάτων ποὺ ἀφοροῦν τυχερὰ παιχνίδια μὲ ἕνα μόνο παίκτη.

Ἡ σύγχρονη ΘΠ ἄρχισε νὰ ἐφαρμόζεται μὲ τὴν δημοσίευση τοῦ μνημειώδους συγγράμματος μὲ τίτλο «Theory of games and economic behavior» Princeton University Press 1944, second edition 1947, third edition 1953. Συγγραφεῖς τοῦ ὡς ἄνω συγγράμματος ἦσαν ὁ μαθηματικὸς John von Neumann καὶ ὁ οἰκονομολόγος Oskar Morgenstein, ἀμφότεροι καθηγητὲς στὸ Princeton University, U.S.A.

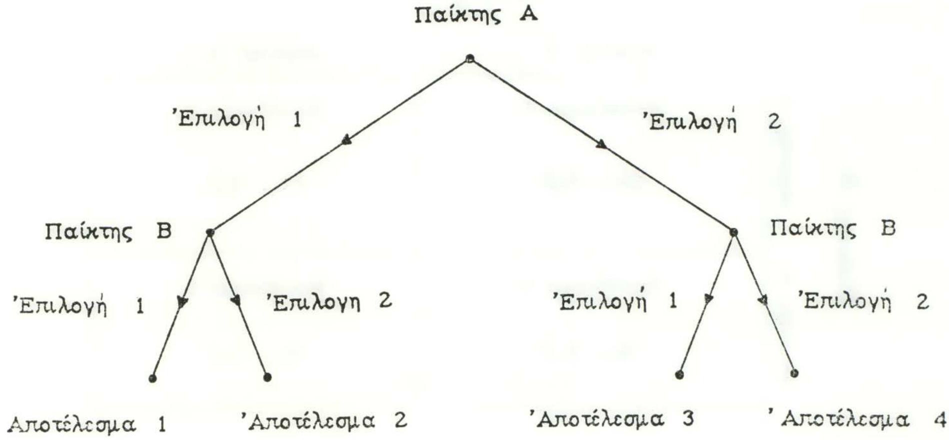
Κατὰ τὶς δεκαετίες ποὺ ἀκολούθησαν τὴν ἔκδοση τοῦ συγγράμματος αὐτοῦ οἱ διάφοροι ἐρευνητὲς ἐφάρμοσαν τὴν ΘΠ σὲ «στρατηγικῆς» σημασίας καταστάσεις οἱ ὁποῖες ἐκάλυπταν ἕνα τεράστιο φάσμα ἐκτεινόμενο ἀπὸ καταστάσεις ποὺ ἀφοροῦσαν τὴν ἐξέλιξη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἐμβίων ὄντων μέχρι καὶ τὴν διατύπωση «λογικῆς» σχετιζομένης μὲ τὴν πίστη τοῦ ἀνθρώπου στὸν Θεό.

Πιὸ συγκεκριμένα ἡ ΘΠ ἔχει ἐφαρμογὲς στὶς Οἰκονομικὲς Ἐπιστῆμες, στὶς Πολιτικὲς Ἐπιστῆμες, στὴν Ἐπιχειρησιακὴ Ἔρευνα, στὴν Πληροφορική, στὴν Ἐπιστήμη Διαχειρίσεως, καθὼς καὶ στὴν Θεωρία Ἐλέγχου (Control Theory).

Τὰ περισσότερα παιχνίδια μποροῦν νὰ περιγραφοῦν κατὰ τὸν ἕνα ἢ τὸν ἄλλο ἐκ δύο διαφορετικῶν τρόπων. Μία κατηγορία ἡ ὁποία φέρει τὴν ὀνομασία «παίγνια ἐκτεταμένης μορφῆς» (games in extensive form) παριστάνεται ἀπὸ ἕνα δενδροειδὲς σχῆμα, ὅπου τὸ παιχνίδι ἀρχίζει στὴν πρώτη διακλάδωση. Ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παῖκτες ἐπιλέγει κάποιον κλάδο μεταφέροντας τὸ παιχνίδι σὲ ἄλλη διακλάδωση. Στὴν συνέχεια ἄλλος παίκτης ἐπιλέγει κάποιον ἀπὸ τοὺς κλάδους τῆς νέας διακλάδωσης καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις ὅτου λήξει τὸ παιχνίδι.

Παράδειγμα 1 (παιχνίδι ἐκτεταμένης μορφῆς).

Ἐδῶ ὑπάρχουν δύο παῖκτες, ὁ Α καὶ ὁ Β, ὅπου ὁ κάθε ἕνας μπορεῖ νὰ κάνει μία ἀπὸ δύο δυνατὲς ἐπιλογές. Τὸ παιχνίδι ἀρχίζει μὲ τὸν παίκτη Α ὁ ὁποῖος κάμνει κάποια ἐπιλογή. Στὴν συνέχεια ὁ παίκτης Β κάνει τὴν δική του ἐπιλογὴ ἡ ὁποία ὁδηγεῖ σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσερα δυνατὰ ἀποτελέσματα:



Ἡ κατηγορία παιχνιδιῶν ἐκτεταμένης μορφῆς ἀποτελεῖ σπουδαῖο ἐργαλεῖο γιὰ τὴν ἀνάλυση τῶν συνεπειῶν ποὺ συνεπάγεται ἡ ὕπαρξη μιᾶς πληροφορίας καὶ ἐν συνεχεία γιὰ τὴν χρησιμοποίηση τῶν συνεπειῶν αὐτῶν γιὰ τὴν ἐπίλυση διαφόρων προβλημάτων τῆς Θεωρίας Ἀποφάσεων (Dcision Making) στὰ ὁποῖα, προβλήματα, ἐνυπάρχει τὸ στοιχεῖο τῆς «ἀβεβαιότητας» (uncertainty).

Μιὰ ἄλλη κατηγορία ποὺ φέρει τὴν ὀνομασία «Παίγνια κανονικῆς μορφῆς» (games in normal form) παριστάνεται μὲ μία «μήτρα» (matrix), ὅπου οἱ παῖκτες ἐπιλέγουν τὶς «στρατηγικές» τους συγχρόνως ἢ τουλάχιστον ἀνεξαρτήτως ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλον. (Μιὰ "στρατηγική" παρέχει ἕνα πλῆρες σχέδιο δυνατῶν ἐνδεχομένων ἐπιλογῶν: «ἂν ἐσὺ κάνεις αὐτὸ ποὺ ἐγὼ θὰ κάνω ἐκεῖνο, κ.ο.κ»). Ἔτσι ἂν ἕνα παιχνίδι ἔχει δύο μόνο παῖκτες, ὅπου ὁ κάθε παίκτης μπορεῖ νὰ ἐπιλέξει μεταξὺ δύο δυνατῶν «στρατηγικῶν», τότε τὸ παιχνίδι μπορεῖ νὰ παρασταθεῖ μὲ μιὰ 2×2-μήτρα.

Παράδειγμα 2 (παιχνίδι κανονικῆς μορφῆς)

Ὑπάρχουν δύο παῖκτες ὁ Α καὶ ὁ Β. Οἱ "στρατηγικὲς" τοῦ παίκτη Α παριστάνονται ἀπὸ τὶς δύο σειρὲς τῆς μήτρας ἐνῶ οἱ "στρτηγικὲς" τοῦ παίκτη Β ἀπὸ τὶς δύο στῆλες τῆς μήτρας. Οἱ παῖκτες ἐπιλέγουν, ἀνεξαρτήτως ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο, στρατηγικὲς οἱ ὁποῖες ὁδηγοῦν σὲ κάποιο ἀποτέλεσμα. Σὲ κάθε ἀποτέλεσμα ἀναγράφονται τὰ κέρδη τῶν παικτῶν τὰ ὁποῖα δίνονται σὲ $x_i - y_j$, συνδυασμοὺς ὅπου x_i εἶναι τὸ κέρδος τοῦ παίκτη Α καὶ y_j τὸ κέρδος τοῦ παίκτη Β, καὶ ὅπου τὰ i καὶ j καθορίζονται ἀπὸ τὶς στρατηγικὲς τῶν παικτῶν, εἶναι δηλαδὴ 1 ἢ 2.

Παίκτης Β

		στρατηγ. 1	στρατηγ. 2
Παίκτης Α	στρατηγ. 1	ἀποτέλεσμα 1 $(x_1,\ y_1)$	ἀποτέλεσμα 3 $(x_1,\ y_2)$
	στρατηγ. 2	ἀποτέλεσμα 2 $(x_2,\ y_1)$	ἀποτέλεσμα 4 $(x_2,\ y_2)$

Στὴν κατηγορία παιχνιδιῶν κανονικῆς μορφῆς, στὰ ὁποῖα, ὅπως ἐτόνισα προηγουμένως, δὲν ὑπάρχει συνεργασία μεταξὺ τῶν παικτῶν, τὰ λεγόμενα «σημεῖα ἰσορροπίας τοῦ Nash», γιὰ τὰ ὁποῖα θὰ μιλήσουμε ἀμέσως παρακάτω, ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν μελέτη φαινομένων τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν ἀγορὲς ὀλιγοπωλειακὲς (δηλαδὴ ἀγορὲς ὅπου ὀλίγοι μόνο παραγωγοὶ ἐλέγχουν τὴν ζήτηση ἡ ὁποία γίνεται ἀπὸ ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ ἀγοραστῶν), δημοπρασίες, προεκλογικοὺς ἀγῶνες, ἔλεγχο ἐξοπλισμῶν, κ.ἄ.

Ἀποτελέσματα μελετῶν παιχνιδιῶν στὰ ὁποῖα ὑπάρχει συνεργασία μεταξὺ τῶν παικτῶν ἔχουν ἐφαρμοσθεῖ σὲ οἰκονομικὲς θεωρίες καθὼς καὶ σὲ ἄλλες παρόμοιας φύσεως.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἤθελα ἁπλῶς νὰ σᾶς πληροφορήσω ὅτι ἐπίκειται (ἀρχὲς 1995) ἡ ἔκδοση ἑνὸς βιβλίου μὲ τίτλο «Theory of Moves» τοῦ καθηγητοῦ τοῦ New York University, Steven J. Brams. Κατὰ τὴν ἄποψη τοῦ Brams ἡ θεωρία αὐτὴ προσθέτει μιὰ δυναμικὴ διάσταση στὴν κλασσικὴ ΘΠ κατὰ τὸ ὅτι συνδυάζει τὶς κατηγορίες παιχνιδιῶν ἐκτεταμένης καὶ κανονικῆς μορφῆς καὶ μελετᾶ τὴν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ προκύπτουσα νέα κατηγορία παιχνιδιῶν.

Ἡ ΘΠ συγγενεύει ἐπίσης στενότατα μὲ διάφορες περιοχὲς τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν. Ἀναφέρομε μόνο μερικὲς ἀπὸ αὐτές: Ἡ μελέτη παιχνιδιῶν ὁρισμένου τύπου ἔχει συντελέσει στὸ νὰ γίνει καλύτερα ἀντιληπτὸ τὸ περίφημο «Ἀξίωμα Ἐπιλογῆς» (Axiom of Choice) τῆς Θεωρίας Συνόλων καθὼς καὶ ἄλλων θεμάτων ποὺ ἀφοροῦν τὴν Θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν. Ὑπενθυμίζομε τὸ «Ἀξίωμα Ἐπιλογῆς» τὸ ὁποῖο ἂν καὶ ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται νὰ εἶναι μιὰ πολὺ ἁπλὴ καὶ τετριμμένη πρόταση, στὴν πραγματικότητα ὅμως εἶναι ἄκρως πολύπλοκη:

«Ἔστω S ἕνα οἱοδήποτε σύνολο τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι μὴ κενὰ σύνολα. Τότε ὑπάρχει συνάρτηση (καλούμενη «συνάρτηση ἐπιλογῆς») $f : S \longrightarrow \bigcup_{A \in S} A$ τέτοια ὥστε $f(A) \in A$ γιὰ ὅλα τὰ $A \in S$.

Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ «Ἀξίωμα Ἐπιλογῆς» εἶναι ἀνεξάρτητο καὶ συμβιβαστὸ μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἀξιώματα τῆς Θεωρίας Συνόλων.

Ἐπίσης τὸ σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash, τὸ ὁποῖο ἀνέφερα προηγουμένως, εὑρίσκεται σὲ ἄμεση σχέση μὲ τὰ λεγόμενα θεωρήματα σταθεροῦ σημείου τὰ ὁποῖα ἐμπίπτουν στὸν κλάδο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν ποὺ ὀνομάζεται «Τοπολογία».

Τέλος μιὰ ἄλλη κατηγορία παιχνιδιῶν εἶναι στενὰ συνδεδεμένη μὲ τὴν «Συναρτησιακὴ Ἀνάλυση» ἕνα πολὺ βασικὸ καὶ ἀπέραντο κλάδο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν.

Ἡ ἰδέα-κλειδὶ ποὺ εἶχε ὁ Nash, γνωστὴ σήμερα μὲ τὴν ὀνομασία «σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash» (Nash equilibrium), ἀναπτύχθηκε ἀπὸ τὸν Nash, γιὰ πρώτη φορά, στὴν διδακτορική του διατριβὴ στὸ Princeton University τὸ 1950, ὅταν αὐτὸς ἦταν μόλις 22 ἐτῶν. Ἐπακολούθησε περίληψη τῆς διατριβῆς, ὑπὸ μορφὴν ἀνακοινώσεως, στὰ Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.) τὸ 1950 μὲ τίτλο «Equilibrium points-in-n person games» ὅπου σὲ μία μόνο σελίδα ἐδίδετο ἡ ἀπόδειξη τῆς παρουσιαζόμενης προτάσεως.

Τόσο στὴν διατριβή του ὅσο καὶ στὴν ἀνακοίνωση ποὺ ἀνέφερα παραπάνω, ὁ Nash χρησιμοποιοῦσε μεθόδους τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν καὶ συγκεκριμένα τὸ «Θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Brouwer» καθὼς καὶ τὸ γενικώτερο αὐτοῦ «Θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Kakutani», τὰ ὁποῖα ἔχουν, ἀντιστοίχως, ὡς ἑξῆς:

(α) Μιὰ ἁπλουστευμένη μορφὴ τοῦ Θεωρήματος σταθεροῦ σημείου τοῦ Brouwer εἶναι ἡ ἀκόλουθη: Ἔστω $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ὁ κλειστὸς μοναδιαῖος δίσκος στὸ ἐπίπεδο. Τότε κάθε συνεχὴς ἀπεικόνιση $f : D \longrightarrow D$ ἔχει τουλάχιστον ἕνα σταθερὸ σημεῖο, ἤτοι γιὰ κάποιο $(x_0, y_0) \in D$ εἶναι $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

(β) Ἔστω X τοπολογικὸς διανυσματικὸς χῶρος καὶ ἔστω T μιὰ ἀπεικόνιση ἡ ὁποία σὲ κάθε $x \in X$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα κλειστὸ καὶ κυρτὸ σύνολο $T(x)$ τοῦ X. Ἕνα σημεῖο x τοῦ X καλεῖται «σταθερὸ σημεῖο» τῆς ἀπεικονίσεως T ὅταν $x \in T(x)$. Ἡ ἀπεικόνιση T καλεῖται ἡμισυνεχὴς (semicontinuous) ἂν ἡ συνθήκη $x_n \Longrightarrow \alpha$, $y_n \longrightarrow b$, $(y_n \in T(x_n))$, συνεπάγεται τὴν σχέση $b \in T(\alpha)$. Εἰδικώτερα, ἂν K εἶναι ἕνα φραγμένο, κλειστὸ καὶ κυρτὸ ὑποσύνολο ἑνὸς εὐκλειδείου χώρου X πεπερασμένης διαστάσεως, καὶ ἂν T εἶναι μιὰ ἡμισυνεχὴς ἀπεικόνιση ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα τοῦ K σὲ κυρτὰ ὑποσύνολα τοῦ K, τότε ἡ T ἔχει σταθερὰ σημεῖα. Ἡ τελευταία αὐτὴ πρόταση ἀποτελεῖ τὸ «Θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Kakutani».

Τὸ ἀκόλουθο παράδειγμα, ἀπαλλαγμένο ἀπὸ κάθε μαθηματικὴ ὁρολογία καὶ συμβολισμό, πιστεύω ὅτι μπορεῖ νὰ δώσει μιὰ διαισθητικὴ εἰκόνα τῆς ἔννοιας τοῦ «σταθεροῦ σημείου».

Ἃς φαντασθοῦμε μιὰ γυάλινη σφαίρα γεμάτη μὲ πολὺ λεπτὴ ἄμμο καὶ ἂς ταυτίσουμε τὰ σημεῖα τῆς σφαίρας μὲ τοὺς κόκκους τῆς ἄμμου. Ἐν συνεχεία ἂς δώσουμε στὴν σφαίρα μιὰ κίνηση «συνεχή». Τότε σημεῖα τῆς σφαίρας, κόκκοι δηλαδὴ τῆς ἄμμου, μετακινοῦνται, ἡ δὲ σφαίρα ὑφίσταται ἕνα «συνεχὴ μετασχηματισμό». Τὸ θεώρημα σταθεροῦ σημείου τοῦ Brouwer, οὐσιαστικά, μᾶς λέγει ὅτι κατὰ τὸν συνεχὴ αὐτὸ μετασχηματισμὸ τῆς σφαίρας, τουλάχιστον ἕνα σημεῖο αὐτῆς, τουλάχιστον ἕνας κόκκος τῆς ἄμμου παρεμένει ἀκίνητος, σταθερός. Αὐτὴ εἶναι ἡ κεντρικὴ ἰδέα στὰ θεωρήματα σταθεροῦ σημείου. Παρατηροῦμε ὅτι ἐκ πρώτης ὄψεως δὲν φαίνεται νὰ ὑπάρχει καμμιὰ σχέση μεταξὺ τῶν θεωρημάτων αὐτῶν καὶ κάποιας ... οἰκονομικῆς θεωρίας. Ὅμως ἡ σχέση αὐτὴ ὑπάρχει καὶ γίνεται ἀντιληπτὴ μόνον ὅταν τὰ διάφορα προβλήματα τῶν θεωριῶν αὐτῶν διατυπωθοῦν ὑπὸ μορφὴν κατάλληλη ὥστε ἡ ἐπεξεργασία τους νὰ μπορεῖ νὰ γίνει μὲ μαθηματικὲς μεθόδους.

Ἡ ΘΠ, ἡ ἀφηρημένη αὐτὴ μελέτη τῶν διαφόρων παιχνιδιῶν ὅπως εἶναι τὸ σκάκι, ἡ ντάμα, τὸ πόκερ κλπ., ἀποδεικνύεται ἀκόμα πιὸ χρήσιμη ὅταν ἐφαρμόζεται σὲ πολὺ πιὸ σοβαρὲς ἐκφάνσεις τῆς ζωῆς τοῦ ἀνθρώπου, ὅπως εἶναι ἡ εὐμάρεια αὐτοῦ, οἱ πολιτικὲς ἀντιθέσεις ἢ οἱ οἰκονομικοὶ ἀνταγωνισμοί.

Ὁ θεωρητικὸς μαθηματικός, ὁ ἀσχολούμενος μὲ τὴν ΘΠ, ἐξετάζει στὶς περιπτώσεις αὐτὲς τὶς διάφορες «στρατηγικὲς» τὶς ὁποῖες μποροῦν στὰ παιχνίδια αὐτὰ νὰ υἱοθετήσουν οἱ παῖκτες. Θὰ διακρίνομε ἐπίσης τὸν ὅρο «καθαρὰ στρατηγική». Ὁ ὅρος αὐτός, ἀναφερόμενος σὲ κάποιο παιχνίδι εἶναι, ὅπως ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, ἕνα πλῆρες σχέδιο μὲ τὸ ὁποῖο ἀντιμετωπίζει ὁ παίκτης κάθε δυνατὴ κατάσταση ποὺ ἐνδέχεται νὰ παρουσιασθεῖ κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ παιχνιδιοῦ. Ὅταν οἱ «καθαρὲς στρατηγικὲς» ὅλων τῶν παικτῶν ὑποβληθοῦν σὲ κάποια κρίση, σὲ κάποια βαθύτερη μελέτη, τότε ἡ ὅλη διαδικασία τοῦ παιχνιδιοῦ καθὼς καὶ τὰ κέρδη ποὺ θὰ ἀποκομίσει κάθε παίκτης εἶναι τελείως καθορισμένα. Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι τὸ παιχνίδι ἔχει ἐπιλυθεῖ.

Ὅμως εἶναι γνωστὸ ὅτι ὅλα τὰ παιχνίδια δὲν μποροῦν νὰ ἐπιλυθοῦν μόνο μὲ καθαρὲς στρατηγικές. Ὑπάρχουν περιπτώσεις παιχνιδιῶν ὅπου οἱ παῖκτες εἶναι ἀναγκασμένοι νὰ κάνουν χρήση ἑνὸς μικτοῦ πλήθους καθαρῶν στρατηγικῶν ἐπιλέγοντας κάθε φορὰ τὶς πιθανότητες ἐπιτυχίας ποὺ ἔχει κάθε μιὰ καθαρὰ στρατηγικὴ ἂν αὐτὴ ἀκολουθηθεῖ στὸ παιχνίδι.

Γιὰ νὰ γίνομε σαφέστεροι ἂς θεωρήσομε τὸ ἀκόλουθο ἁπλὸ παράδειγμα παιχνιδιοῦ ὅπου ὑπάρχουν δύο μόνο παῖκτες ἐφοδιασμένοι ὁ κάθε ἕνας μὲ τὸ ἴδιο νόμισμα (λ.χ. ἕνα δεκάδραχμο) ρίχνουν δὲ συγχρόνως καὶ οἱ δύο τὸ νόμισμά τους ἐπάνω σὲ μιὰ ὁριζόντια ἐπιφάνεια. Ὁ κανόνας τοῦ παιχνιδιοῦ εἶναι ὅτι ὁ ἕνας παίκτης κερδίζει ἂν τὰ δύο νομίσματα πέσουν μὲ τὴν ἴδια ἔνδειξη (καὶ τὰ δύο «κορώνα» ἢ καὶ τὰ δύο «γράμματα») ὁ δὲ ἄλλος κερδίζει ὅταν τὰ δύο νομίσματα πέσουν μὲ διαφορετικὴ ἔνδειξη. Ἐδῶ οἱ καθαρὲς στρατηγικὲς εἶναι «κορώνα» καὶ «γράμματα», ἐνῶ μικτὲς στρατηγικὲς ἀποτελοῦν οἱ τυχαῖες συχνότητες βάσει τῶν ὁποίων ἕνας παίκτης ἐπιλέγει νὰ ἀκολουθήσει τὶς καθαρὲς αὐτὲς στρατηγικές.

Στὴν διατριβή του ὁ Nash ἀπέδειξε ὅτι σὲ ὁποιοδήποτε παιχνίδι ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σύνολο μικτῶν στρατηγικῶν, τὸ ὁποῖο ἐπιλέγει ὁ παίκτης, ἕνα γιὰ κάθε παίκτη, τὸ καλούμενο «σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash» (Nash equilibrium point) καὶ εἶναι αὐτὸ τέτοιο ὥστε κανένας ἀπὸ τοὺς παῖκτες δὲν εἶναι πλέον δυνατὸν νὰ βελτιώσει τὴν θέση του ἀλλάζοντας στρατηγική. Ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐν λόγω μικτῶν στρατηγικῶν καταλήγει σὲ μιὰ κατάσταση σταθερή, σὲ μιὰ κατάσταση ἰσορροπίας.

Ὅπως ἀνέφερα προηγουμένως ὁ Nash, στὸ ἔργο του, χρησιμοποίησε μεθόδους τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν, ἤτοι θεωρήματα σταθεροῦ σημείου ἀπὸ τὴν Τοπολογία, γιὰ νὰ ἀποδείξει τὴν ὕπαρξη ἑνὸς σημείου ἰσορροπίας. Τὸ ἀποτέλεσμα στὸ ὁποῖο κατέληξε ὁ Nash μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθεῖ σὲ ὁποιοδήποτε παιχνίδι ὅπου ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν στρατηγικῶν εἶναι πεπερασμένος (δηλ. περιορισμένος) μὲ ὁποιοδήποτε πλῆθος παικτῶν οἱ ὁποῖοι ὅμως δὲν συνεργάζονται μεταξύ τους, ποὺ σημαίνε ὅτι δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ὑπάρχει καμμιὰ ἐπικοινωνία οὔτε καὶ «συμμαχία» μεταξύ τους. Ὅπως ἐλέχθη προηγουμένως, ἡ ΘΠ ἄρχισε νὰ ἐφαρμόζεται στὶς οἰκονομικὲς ἐπιστῆμες μὲ τὴν δημοσίευση τοῦ συγγράμματος τῶν Neumann καὶ Morgenstein, ὅμως πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι οἱ συγγραφεῖς αὐτοὶ περιορίζονται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, σὲ παιχνίδια στὰ ὁποῖα λαμβάνουν μέρος μόνον δύο παῖκτες.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ νὰ ἀπευθυνθῶ, γιὰ λίγα μόνο λεπτά, στοὺς εἰδικοὺς περὶ τὰ θέματα αὐτὰ οἱ ὁποῖοι ἐνδεχομένως εὑρίσκονται στὸ ἀκροατήριο, καὶ νὰ ἐξηγήσω τί ἀκριβῶς σημαίνει στὴν γλῶσσα τῶν Μαθηματικῶν «Σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash».

Ἕνα παιχνίδι κανονικῆς μορφῆς μὲ ἀριθμὸ παικτῶν n (n = ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμὸς) καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἔκφραση $\{N, \{X^i\}_{i\in N}, \{F^i\}_{i\in N}\}$, ὅπου $N = \{1,\ldots,n\}$ εἶναι ἕνα σύνολο παικτῶν, X^i εἶναι τὸ σύνολο τῶν «στρατηγικῶν» τοῦ παίκτη i, καὶ F^i εἶναι ἡ πραγματικὴ συνάρτηση ποὺ ὁρίζεται στὸ καρτεσιανὸ γινόμενο $\Pi_{i=1}^{n} X^i$, καὶ καλεῖται «ἡ συνάρτηση κέρδους τοῦ παίκτη i». Ἡ ἔννοια τῆς τυχαιότητας ἐνσωματώνεται στὸ σύστημα διὰ τῆς θεωρήσεως ἑνὸς ἐπιπλέον συνόλου X^0 τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι οἱ «τυχαῖες ἐπιλογές», καθὼς καὶ διὰ μιᾶς «κατανομῆς πιθανότητας» ἐπὶ τοῦ συνόλου X^0.

Ἡ περίπτωση ὅπου $n = 2$, κατὰ τὴν ὁποία γίνεται χρήση μιᾶς μήτρας, εἶναι ἡ ἁπλούστερη γιὰ τὴν ὁποία ἡ ὕπαρξη σημείου ἰσορροπίας ἔχει ἀποδειχθεῖ. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὰ «σημεῖα ἰσορροπίας» παρέχει τὸ ἀκόλουθο θεώρημα τοῦ Neumann (minimax-theorem):

Ἔστωσαν $M^1 = (1,\dots,m_1)$, $M^2 = (1,\dots,m_2)$ τὰ σύνολα τῶν καθαρῶν στρατηγικῶν τὶς ὁποῖες μποροῦν νὰ ἐπιλέξουν οἱ δύο παῖκτες ἀντιστοίχως. Ἔστω α_{ij} τὸ κέρδος τοῦ παίκτη 1 ὅταν οἱ παῖκτες 1 καὶ 2 ἐπιλέγουν τὶς στρατηγικὲς i καὶ j ἀντιστοίχως. Μιὰ «μεικτὴ στρατηγική» γιὰ τὸν παίκτη i εἶναι μιὰ κατανομὴ πιθανότητας στὸ σύνολο M_i. Ἑπομένως τὰ σύνολα μεικτῶν στρατηγικῶν γιὰ τοὺς παῖκτες 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως εἶναι

$$X^1 = \{x \in R^{m_1} \mid \Sigma_{i=1}^{m_1} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0 \forall i \in M^1\}$$

$$X^2 = \{x \in R^{m_2} \mid \Sigma_{i=1}^{m_2} x_i = 1,\ x_i \geqslant 0 \forall i \in M^2\}$$

Ἂν οἱ παῖκτες 1 καὶ 2 χρησιμοποιήσουν τὶς μεικτὲς στρατηγικὲς x^1 καὶ x^2 ἀντιστοίχως, τὸ ἀναμενόμενο κέρδος γιὰ τὸν παίκτη 1 εἶναι

$$F^1(x^1, x^2) = \Sigma_i \Sigma_j x_j^1 \alpha_{ij} x_j^2,$$

ὅπου F^1 εἶναι ἡ συνάρτηση κέρδους τοῦ παίκτη 1. Ὁ von Neumann ἀπέδειξε ὅτι

$$\max_{x^1 \in X^1} \min_{x^2 \in X^2} F^1(x^1, x^2) = \min_{x^2 \in X^2} \max_{x^1 \in X^1} F^1(x^1, x^2)$$

Ἕνας ζεῦγος $(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὸ παραπάνω «minimax-θεώρημα» καλεῖται «σημεῖο ἰσορροπίας» (equilibrium point).

Ὁ Nash ἐγενίκευσε τὴν ὡς ἄνω ἔννοια τοῦ σημείου ἰσορροπίας σὲ παιχνίδια κανονικῆς μορφῆς ὅπου ὁ ἀριθμὸς τῶν παικτῶν εἶναι n (ἤτοι ὁποιοσδήποτε):

Ἕνα διατεταγμένο σύνολο $(\hat{x}^1, \dots, x^n)$ $(\hat{x}^i \in X^i)$ καλεῖται «σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash» ὅταν γιὰ κάθε i ἰσχύει ἡ ἀνισότητα

$$F^i\ (\hat{x}^{1-i}, \hat{x}^i, \hat{x}^1, \hat{x}^{i+1}, \dots, x^n)$$

$$\geqslant F(x^i, \dots \hat{x}^{i-1}, \hat{x}^i, x_i, \hat{x}^{i+1}, \dots \hat{x}^n) \text{ γιὰ ὅλα τὰ } x^i \in X^i$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κανένας παίκτης δὲν μπορεῖ νὰ αὐξήσει τὸ κέρδος του ἀλλάζοντας τὴν στρατηγική του ἐὰν ὅλοι οἱ ἄλλοι συνεχίσουν τὶς ἴδιες στρατηγικές.

Ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἔδωσε ὁ Nash γιὰ τὴν ὕπαρξη τουλάχιστον ἑνὸς σημείου ἰσορροπίας στὴν πολὺ εὐρύτερη κλάση παιχνιδιῶν μὲ ὁποιοδήποτε πλῆθος μὴ συνεργαζομένων παικτῶν καὶ ὅπου τὸ πλῆθος τῶν καθαρῶν στρατηγικῶν εἶναι πεπερασμένο, εἶχε τεράστια ἀπήχηση στὴν σύγχρονη οἰκονομικὴ θεωρία.

Μετὰ τὴν ἀνακάλυψη αὐτὴ ποὺ ἔκανε ὁ Nash ἀκολούθησαν δεκάδες ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν ἀναφερόμενες σὲ παίγνια κανονικῆς μορφῆς, σὲ ὅλες δὲ σχεδὸν τὶς ἐργασίες αὐτὲς ὁ κύριος ἀντικειμενικὸς σκοπὸς ἦταν ἡ εὕρεση καὶ ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν σημείων ἰσορροπίας τοῦ Nash. Θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ πεῖ, χωρὶς νὰ ὑπερβάλλει, ὅτι τὸ ἐν λόγω ἐρευνητικὸ ἀποτέλεσμά του ὑπῆρξε ἡ ἀφετηρία ὁλοκλήρου θεωρίας κάτι ποὺ δὲν συμβαίνει πολὺ συχνά.

Ἂς ἐξετάσομε ὅμως τὰ πράγματα κάπως πιὸ ἀναλυτικά. Ἂς θεωρήσομε τὴν συμπεριφορὰ ἑνὸς ἀτόμου ἔναντι ἑνὸς θέματος οἰκονομικῆς φύσεως ὡς ἕνα «παιχνίδι» τὸ ὁποῖο ὅμως διέπεται ἀπὸ καλῶς καθορισμένους κανόνες καὶ ὅπου ὅλοι οἱ παῖκτες προσπαθοῦν νὰ μεγιστοποιήσουν τὰ κέρδη τους. Τότε, ἐν γένει, θὰ ὑπάρχει ἡ δυνατότητα γιὰ ὁποιονδήποτε ἀπὸ τοὺς παῖκτες νὰ βελτιώνει ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τὴν θέση του στὸ παιχνίδι ἀλλάζοντας κάθε φορὰ στρατηγική. Κατὰ συνέπειαν οἱ παῖκτες θὰ ἀλλάζουν διαρκῶς τὶς στρατηγικές τους μέχρις ὅτου καταλήξουν στὸ σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash στὸ ὁποῖο φθάνοντας ὁ παίκτης δὲν μπορεῖ πλέον νὰ βελτιώσει περαιτέρω τὴν θέση του. Σὲ μερικὲς περιπτώσεις ἡ παραπάνω ἀνάλυση καθιστᾶ δυνατὴ τὴν πρόβλεψη τῶν καταλλήλων στρατηγικῶν, τὶς ὁποῖες οἱ παῖκτες μακροπροθέσμως θὰ ἐπιλέξουν, δηλαδὴ ἐκείνων ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash, ὅπου, ἐπαναλαμβάνω, κανεὶς παίκτης δὲν μπορεῖ πιὰ νὰ ἀλλάξει στρατηγικὴ γιὰ νὰ βελτιώσει τὸ κέρδος του.

Μιὰ ἀρκετὰ σαφὴ εἰκόνα τῆς ἔννοιας «σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash» μᾶς δίνει τὸ κατ' ἐξοχὴν περίφημο παιχνίδι τῆς ΘΠ τὸ λεγόμενο «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου» (Prisoner's Dilemma) τὸ ὁποῖο πρῶτος διατύπωσε ὁ μαθηματικὸς Albert W. Tucker (1905-1995), καθηγητὴς τοῦ Nash στὸ Princeton University. Ὁ Tucker ἐπενόησε τὸ ὡς ἄνω "παράδοξο" τὸ 1950, τὸ ἴδιο δηλαδὴ ἔτος ποὺ ὁ Nash ἔγραφε τὴν διατριβή του. Ὁ Tucker εἶχε κατ' ἀρχὰς ἀσχοληθεῖ μὲ τὴν Τοπολογία, ἀργότερα ὅμως ἔστρεψε τὴν ἐρευνητική του δραστηριότητα πρὸς τὴν ΘΠ.

Τὸ «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου» μᾶς ζητᾶ νὰ φαντασθοῦμε τὴν ἀκόλουθη ἱστορία: Ἡ ἀστυνομία συλλαμβάνει δύο ὑπόπτους γιὰ κάποιο ἔγκλημα καὶ τοὺς τοποθετεῖ σὲ ξεχωριστὰ κελιὰ ἔτσι ὥστε ἡ ἐπικοινωνία μεταξύ τους νὰ εἶναι ἀδύνατη. Ἂν καὶ τὰ ἄτομα αὐτὰ εἶναι ἔνοχοι, ὁ εἰσαγγελέας δὲν μπορεῖ νὰ τοὺς καταδικάσει χωρὶς τὴν ὁμολογία τουλάχιστον ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ὅτι εἶναι ἔνοχος.

Ὁ εἰσαγγελέας σὲ μιὰ προσπάθεια νὰ προκαλέσει τὴν ὁμολογία τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ὑπόπτων ἐξηγεῖ στὸν κάθε ἕνα κρατούμενο τὶς ἀκόλουθες συνέπειες τῶν ἐνδεχομένων ἀπὸ κοινοῦ ἐνεργειῶν των.

(α) Ἂν ὁ ἕνας ἐκ τῶν ὑπόπτων ὁμολογήσει τὴν ἐνοχή του καὶ ὁ ἄλλος δὲν τὴν ὁμολογήσει, τότε ὁ ὁμολογήσας θὰ ἀφεθεῖ ἐλεύθερος, διότι συνεργάσθηκε μὲ τὴν πολιτεία, ἐνῶ ὁ ἄλλος θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση 10 ἐτῶν.

(β) Ἂν ἀμφότεροι οἱ ὕποπτοι ὁμολογήσουν τὴν ἐνοχή τους τότε ὁ κάθε ἕνας θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση 5 ἐτῶν.

(γ) Ἂν ἀμφότεροι παραμείνουν σιωπηλοὶ τότε ὁ κάθε ἕνας θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση 1 ἔτους γιὰ παράνομη κατοχὴ ὅπλου.

Τὸ Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου μπορεῖ νὰ παρασταθεῖ μὲ μιὰ 2×2-μήτρα, ὅπου 4 θὰ εἶναι τὸ μέγιστο κέρδος ἑνὸς ὑπόπτου, 3 τὸ ἑπόμενο, 2 τὸ ἀμέσως ἑπόμενο, καὶ 1 τὸ ἐλάχιστο κέρδος. Κάθε φυλακισμένος μπορεῖ νὰ ἐπιλέξει μεταξὺ τῶν δύο στρατηγικῶν ἤτοι τῆς «ὁμολογίας» ἢ τῆς «σιωπῆς». Ἔτσι οἱ τέσσερες δυνατὲς περιπτώσεις γιὰ κάθε φυλακισμένο εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

Νὰ ἀφεθεῖ ἐλεύθερος	(4)
Φυλάκιση ἑνὸς ἔτους	(3)
Φυλάκιση πέντε ἐτῶν	(2)
Φυλάκιση δέκα ἐτῶν	(1)

Κατὰ συνέπειαν τὰ τέσσερα δυνατὰ ἀποτελέσματα ποὺ μποροῦν νὰ προκύψουν στὴν ὅλη διαδικασία εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

		Ὕποπτος 1	
		σιωπή	ὁμολογία
Ὕποπτος 2	σιωπή	συμβιβασμὸς 3 — 3	κερδίζει ὁ ὑπ' ἀριθ. 1 1 — 4
	ὁμολογία	κερδίζει ὁ ὑπ' ἀριθ. 2 4 — 1	ἀντίθεσις 2 — 2

Σιωπή-Σιωπή: Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἀποτελεῖ «συμβιβασμὸ» μεταξὺ τῶν ὑπόπτων διότι ὁ κάθε ἕνας παραιτεῖται ἀπὸ τὸ μέγιστο κέρδος ὑπὲρ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου κέρδους (3-3).

Ὁμολογία-Ὁμολογία: Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἀποτελεῖ «ἀντίθεση» μεταξὺ τῶν ὑπόπτων διότι ἂν ὁ ἕνας ἢ ὁ ἄλλος ὕποπτος ἐπιχειρήσει μὲ τὴν ὁμολογία του νὰ μεγιστοποιήσει τὸ κέρδος του μὲ (4, 1) ἢ μὲ (1, 4), ἐνῶ ὁ ἕτερος παραμένει σιωπηλός, τότε ἀμφότεροι καταλήγουν στὸ ἀμέσως ἑπόμενο κέρδος ἤτοι τὸ (2, 2).

Τὸ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς ἐπιλογὲς τῶν παικτῶν-ὑπόπτων. Ἂν ἀμφότεροι σιωπήσουν τότε καρποῦνται τὸ ἀποτέλεσμα (3, 3). Ὅμως κάθε φυλακισμένος ἔχει τὸ κίνητρο ἐκεῖνο ποὺ τὸν ὠθεῖ νὰ ξεφύγει ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα (3, 3) καὶ νὰ ἀποκτήσει τὸ ἀποτέλεσμα (4, 1) ἢ (1, 4), ἂν ὁ ἄλλος παραμείνει σιωπηλός. Ἐπιλέγοντας ὅμως ἀμφότεροι τὴν «ὁμολογία» ὁδηγοῦνται στὸ (2, 2) ποὺ εἶναι χειρότερο ἀπὸ τὸ (3, 3).

Κατὰ τὴν ΘΠ τὸ δίλημμα στὴν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὅτι σὲ ἀμφότερους τοὺς παῖκτες ἡ δεσπόζουσα στρατηγικὴ εἶναι ἡ στρατηγικὴ «ὁμολογία», καὶ τοῦτο διότι ἡ ἐπιλογὴ αὐτὴ εἶναι ἡ πιὸ συμφέρουσα γιὰ τὸν κάθε παίκτη ἀνεξαρτήτως τοῦ τί θὰ ἐπιλέξει ὁ ἄλλος, ἂν καὶ στὴν περίπτωση αὐτὴ καταλήγουν ἀμφότεροι στὸ ἀποτέλεσμα ποὺ χαρακτηρίζεται ὡς «ἀντίθεση» καὶ παρέχει τὰ κέρδη (2, 2).

Ἡ στρατηγικὴ τῶν δύο ὑπόπτων κατὰ τὴν ὁποία καὶ οἱ δύο ὁμολογοῦν εἶναι ἀκριβῶς «τὸ σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash», διότι κανένας ἀπ' αὐτοὺς δὲν μπορεῖ ἀλλάζοντας στρατηγικὴ νὰ βελτιώσει τὴν θέση του. Κανένας δὲν ἔχει κάποιο κίνητρο νὰ ξεφύγει μονομερῶς ἀπὸ τὴν στρατηγικὴ τῆς ὁμολογίας, διότι ἂν προτιμήσει τὴν σιωπὴ τότε θὰ ἀποκτήσει τὸ κέρδος 1, δηλαδὴ τὸ ἐλάχιστο δυνατό. Αὐτὸ ποὺ φαίνεται παράδοξο στὴν ὑπόθεση αὐτὴ εἶναι ὅτι, ἂν καὶ οἱ δύο εἶχαν ἀρνηθεῖ τὴν ἐνοχή τους τότε θὰ καταδικάζονταν καὶ οἱ δύο σὲ φυλάκιση ἑνὸς ἔτους. Παρὰ ταῦτα, ἐπαναλαμβάνω, ὅτι ἡ κοινὴ λογικὴ τοὺς ἀναγκάζει νὰ ὁμολογήσουν τὴν ἐνοχή τους καὶ νὰ καταδικασθοῦν σὲ φυλάκιση πέντε ἐτῶν.

Τὸ Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου ἔχει χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν κατασκευὴ προτύπων μιᾶς μεγάλης ποικιλίας στρατηγικῶν καταστάσεων ὅπως εἶναι ὁ συναγωνισμὸς γιὰ τὴν παραγωγὴ ὅπλων, ὁ πόλεμος τῶν τιμῶν, τὸ πρόβλημα τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Γῆς κ.ἄ. Οἱ παῖκτες στὶς καταστάσεις αὐτὲς εἶναι ἀντιστοίχως τὰ κράτη, οἱ ἑταιρεῖες, τὰ ζευγάρια, καὶ θὰ προτιμοῦσαν, κανεὶς νὰ μὴν ἀγοράζει ὅπλα, οἱ τιμὲς τῶν ἀγαθῶν νὰ εἶναι χαμηλές, καὶ ὁ πληθυσμὸς νὰ μὴν αὐξάνεται. Παρὰ ταῦτα κάθε παίκτης προσπαθεῖ νὰ ἐνεργήσει κατὰ τρόπον ποὺ νὰ εἶναι συμφερότερος γι' αὐτὸν ἐπιδεικνύοντας συμπεριφορὰ ἀπὸ τὴν ὁποία λείπει ἡ συνεργασία λείπει ὁ συμβιβασμός. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμπεριφορᾶς αὐτῆς καταλήγει νὰ εἶναι χειρότερο, πιὸ ἀσύμφορο ἀπὸ ὅ,τι θὰ ἦταν ἂν οἱ παῖκτες εἶχαν συνεργασθεῖ μεταξύ τους, κάτι δηλαδὴ ἀνάλογο μὲ αὐτὸ ποὺ συνέβη μὲ τοὺς δύο ὑπόπτους στὸ «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου».

Τέλος, παράδειγμα «παιχνιδιοῦ» ποὺ ἀπαιτεῖ στρατηγικὴ ἀντιμετώπιση, τὴν φορὰ αὐτὴ στὸν χῶρο τῆς πολιτικῆς, ἀποτελεῖ ἡ κρίση ποὺ ξέσπασε τὸν Νοέμβριο τοῦ 1979 μεταξὺ τῶν ΗΠΑ καὶ τοῦ Ἰράν, ὅταν φανατικοὶ Ἰρανοὶ κατέλαβαν τὴν πρεσβεία τῶν ΗΠΑ καὶ κράτησαν ὡς ὁμήρους τὸ προσωπικὸ τῆς Πρεσβείας, ὁπότε ἄρχισε μιὰ σκληρὴ προσπάθεια γιὰ τὴν ἀπελευθέρωση τῶν ὁμήρων.

Ἀρχηγοὶ τῶν ἐμπλεκομένων κρατῶν ἦταν ὁ πρόεδρος τῶν ΗΠΑ Τ. Κάρτερ, ἐνῶ ἐπικεφαλῆς τοῦ θεοκρατικοῦ καθεστῶτος τοῦ Ἰρὰν ἦταν ὁ Χομεϊνί.

Χάρη στὴν ἀνάλυση τῶν δεδομένων τῆς ἐποχῆς ἐκείνης ἀπὸ εἰδικούς, κατέστη δυνατὸν νὰ γίνει ἡ σύνθεση τῶν «στρατηγικῶν» ποὺ ἀκολούθησαν οἱ ἰθύνοντες τῶν δύο κρατῶν. Ἡ περιγραφὴ τῆς ὅλης κατάστασεως δίδεται καὶ ἐδῶ, ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τοῦ «Διλήμματος τοῦ Φυλακισμένου» μὲ δύο 2×2-μῆτρες οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν σὲ δύο χρονικὲς περιόδους. Ἡ πρώτη περίοδος εἶναι ἐκείνη ποὺ ἀκολούθησε ἀμέσως τὴν ἐκδήλωση τῆς κρίσεως, καὶ κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ πληροφορίες τοῦ Κάρτερ ὡς πρὸς τὸ ὅλο θέμα δὲν ἦταν πλήρεις καὶ ἀπολύτως σωστές. Ἡ δεύτερη περίοδος εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποία ὁ Κάρτερ εἶχε στὴν διάθεσή του πλήρεις καὶ σωστὲς πληροφορίες.

Οἱ ἐπιλογὲς τοῦ Κάρτερ καὶ στὶς δύο περιόδους ἦταν ἡ «διαπραγμάτευση» καὶ ἡ «στρατιωτικὴ ἐπέμβαση», ἐνῶ ἐκεῖνες τοῦ Χομεϊνὶ ἦταν ἡ «διαπραγμάτευση» καὶ ἡ «κωλυσιεργία» (παρεμπόδιση). Τὰ συμπεράσματα στὰ ὁποῖα ὁδήγησε ἡ μελέτη τῶν μητρῶν αὐτῶν ἦταν ἀνάλογα μὲ ἐκεῖνα τοῦ «Διλήμματος τοῦ Φυλακισμένου» ἢ ἄλλων παρόμοιων περιπτώσεων. Ἔχομε καὶ ἐδῶ τὰ «σημεῖα ἰσορροπίας τοῦ Nash» μὲ τὴν διαφορὰ ὅτι τὸ ὅλο πρόβλημα εἶναι δυσκολότερο καὶ πιὸ πολύπλοκο.

Κυρίες καὶ Κύριοι. Ἐλπίζω μὲ τὰ ὅσα ἐξέθεσα παραπάνω νὰ ἔγινε ἀντιληπτὴ ἔστω καὶ σὲ γενικὲς γραμμές, ποιὰ ὑπῆρξε ἡ συμβολὴ τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν στὴν ἀνάπτυξη τῶν Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ἰδιαίτερη σημασία ποὺ ἔχει ἡ ἀπονομὴ τοῦ Βραβείου NOBEL σὲ ἔργο ποὺ ἐμπίπτει καθ' ὁλοκληρίαν στὴν περιοχὴ τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν. Στὴν συνέχεια, μὲ σκοπὸ νὰ καταλήξω στὴν διατύπωση ὁρισμένων γενικῶν ἀπόψεων ποὺ ἀφοροῦν τὴν ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν θὰ ἤθελα νὰ ὑπενθυμίσω ὅτι σὲ προγενέστερες ὁμιλίες μου εἶχα τὴν εὐκαιρία νὰ ἀναφερθῶ καὶ σὲ πολλὲς ἄλλες πρακτικὲς ἐφαρμογὲς ἀποτελεσμάτων ποὺ εἶχαν ἐπιτευχθεῖ στὸν κλάδο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν, σὲ ἄλλες ἐπιστῆμες, ὅπως εἶναι ἡ Πληροφορική, ὁ κλάδος τῆς Βιομηχανίας καὶ Ἐπιχειρήσεων, ἡ κατασκευὴ Δημοσίων Κρυπτογραφικῶν Κωδίκων, τὰ Μαθηματικὰ Πρότυπα (models) τῆς ἐπιδημίας τοῦ AIDS καὶ ἡ Βιολογία (DNA).

Ἕνα περίφημο ὅμως παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν στὴν Θεωρητικὴ Φυσική, καὶ τὸ ὁποῖο ἀξίζει νὰ ὑπενθυμίσω εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Εἶναι γνωστὸ ὅτι ἡ οὐσία τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας ἔγκειται στὸ ὅτι τὸ φαινόμενο τῆς βαρύτητας εἶναι ἁπλῶς ἕνα «σύμπτωμα» τῆς καμπυλότητας τοῦ χώρου-χρόνου. Ἡ ἀνακάλυψη αὐτὴ ὀφείλεται βέβαια στὸν A. Einstein. Ὅμως ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῆς καμπυλότητας τοῦ χώρου, καὶ ἡ ὁποία εἶναι πολὺ παλαιότερη, ὀφείλεται στὸν Bernhard Riemann (1826-1866), τοῦ ὁποίου τὰ κίνητρα πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτὴ ἔρευνας ἦσαν ἐσωμαθηματικὰ καὶ δὲν εἶχαν ἀπολύτως καμμιὰ σχέση μὲ τὴν βαρύτητα.

Κατὰ κανόνα συμβαίνει, ἀφηρημένα Μαθηματικὰ ποὺ ἀναπτύχθηκαν ἀποκλειστικὰ καὶ μόνο γιὰ τὸ κάλλος τους ἢ μὲ σκοπὸ νὰ ἐξυπηρετήσουν ἐσωμαθηματικὲς ἀνάγκες, νὰ ἔχουν ἀργὰ ἢ γρήγορα σπουδαῖες ἐφαρμογὲς καὶ νὰ χρησιμεύουν γιὰ τὴν περιγραφὴ τοῦ Σύμπαντος, τῆς ἁρμονίας ποὺ διακρίνουμε σ' αὐτό.

Κυρίες καὶ Κύριοι. Ἐπειδὴ ἐπέμεινα ἀρκετὰ στὶς ἐφαρμογὲς τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν στὶς ὑπόλοιπες ἐπιστῆμες, ἐπιτρέψτε μου νὰ προσθέσω ἐν κατακλεῖδι τὰ κάτωθι: Ἀποτελεῖ ἕνα μεγάλο καὶ μόνιμο πρόβλημα γιὰ τοὺς μαθηματικοὺς νὰ βρίσκουν τὸν κατάλληλο τρόπο νὰ ἐξηγήσουν στὸ εὐρὺ κοινὸ ὅτι ἡ ἀξία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης δὲν περιορίζεται μόνο στὴν πρακτική της χρησιμότητα, ἀλλὰ ὅτι εἶναι πολὺ μεγαλύτερη καὶ σπουδαιότερη ἀπὸ αὐτήν.

Ἡ προσπάθεια αὐτὴ τῶν μαθηματικῶν μοιάζει σὰν νὰ θέλει κανεὶς νὰ ἐξηγήσει σὲ κάποιον, ποὺ ἐνδεχομένως ποτὲ δὲν ἄκουσε καλὴ μουσική, πόσο ὡραῖο πρᾶγμα εἶναι μιὰ μελωδία.

Συμφωνῶ βέβαια ὅτι πρέπει νὰ μεταφέρομε στὸ εὐρὺ κοινὸ καὶ τὸ εἶδος ἐκεῖνο τῶν Μαθηματικῶν ποὺ μπορεῖ τὸ κοινὸ αὐτὸ νὰ χρησιμοποιήσει στὸν καθημερινὸ βίο καὶ γενικώτερα γιὰ πρακτικὲς ἐφαρμογές. Ὅμως ΔΕΝ ΠΡΕΠΕΙ κατὰ κανένα τρόπο νὰ νομίσει τὸ κοινό μας, οὔτε βέβαια καὶ ἐμεῖς οἱ ἴδιοι, ὅτι ἡ οὐσία τῶν Μαθηματικῶν ἔγκειται στὴν πρακτικὴ μόνο χρησιμότητά τους. *Τὰ Μαθηματικὰ ἀποτελοῦν αὐτοσκοπὸ καὶ συντελοῦν στὴν δημιουργία καὶ στὴν διατήρηση ὑψηλῶν καὶ εὐγενῶν συνηθειῶν στὸ ἀνθρώπινο πνεῦμα.* Ὁ φιλόσοφος Emmanuel Kant (1724-1804) παρατηρεῖ ὅτι ἡ Ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν ἀποτελεῖ τὸ πιὸ λαμπρὸ παράδειγμα τοῦ: πῶς ἡ Καθαρὴ Λογικὴ μπορεῖ ἐπιτυχῶς νὰ διευρύνει τὴν περιοχή της χωρὶς τὴν βοήθεια τῆς πείρας.

Πῶς, ὅμως, στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ μποροῦσα νὰ μὴν ἐπαναλάβω αὐτὰ ποὺ λέγει ὁ Πλάτων, ὁ ὁποῖος ὑπεστήριζε ὅτι στὴν μελέτη τῶν Μαθηματικῶν ἀληθειῶν διακρίνει κανεὶς κάτι τὸ «θεῖο». Κατὰ δὲ τὸν B. Russel, ὁ Πλάτων ὑπῆρξε ὁ μόνος ποὺ μπόρεσε νὰ ξεχωρίσει ποιὰ στοιχεῖα τῆς ἀνθρώπινης ζωῆς ἀξίζουν μιὰ θέση στὴν Αἰωνιότητα. Ὑπάρχει στὰ Μαθηματικά, λέγει ὁ Πλάτων (Νόμοι 818) κάτι τὸ «ἀπαραίτητο» κάτι ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ παραμερισθεῖ, καὶ ποὺ ἂν δὲν κάνω λάθος, συνεχίζει ὁ Πλάτων, εἶναι μιὰ «θεϊκὴ ἀναγκαιότητα» ἄσχετη μὲ τὶς πρακτικὲς ἐφαρμογὲς στὴν ἀνθρώπινη ζωή. Πρόκειται γιὰ τὰ πράγματα ἐκεῖνα ποὺ χωρὶς τὴν γνώση καὶ τὴν χρήση τῶν ὁποίων, ὁ ἄνθρωπος δὲν μπορεῖ νὰ γίνει Θεὸς μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων, οὔτε πνεῦμα, οὔτε ἥρωας, ὥστε νὰ σκέπτεται καὶ νὰ φροντίζει σοβαρὰ γιὰ τοὺς ἀνθρώπους.

Στὸν τόπο μας ὑπάρχει μιὰ πολὺ μεγάλη μαθηματικὴ πολιτιστικὴ παράδοση τὴν ὁποία πρέπει νὰ διαφυλάξομε καὶ νὰ τὴν διασώσουμε.

Κάθε γενιὰ πρέπει νὰ μαθαίνει ἐκ νέου τὴν παράδοση αὐτή.

Ἂς ἐπιδιώκουμε νὰ ΜΗΝ ἐκπαιδεύομε γενιὲς οἱ ὁποῖες δὲν θὰ μποροῦν νὰ ἀκοῦν τὶς μελωδίες ἐκεῖνες ποὺ ἀποτελοῦν τὴν πεμπτουσία τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ πολιτισμοῦ μας.