ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ.— **Ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τοῦ πεδίου ροῆς πέριξ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἐντὸς ὁμοιομόρφου διηχητικῆς ροῆς**, *ὑπὸ Παναγιώτη Σπάρη* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Π. Σ. Θεοχάρη.

Τὸ κλασσικὸν πρόβλημα τοῦ κυλίνδρου κυκλικῆς διατομῆς ἐντὸς ὁμοιομόρφου ροῆς ἀτριβοῦς συμπιεστοῦ ρευστοῦ ἐπιλύεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν διὰ ἀριθμοὺς Mach 0.35 (ὑποηχητικὴ ροὴ) καὶ 0.55 (διηχητικὴ ροή).

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ὑποηχητικοῦ προβλήματος χρησιμοποιοῦνται διάφοροι μέθοδοι ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν καὶ τὰ ἀποτελέσματα συγκρίνονται μὲ τὴν ὑπάρχουσαν ἀναλυτικὴν λύσιν τοῦ Imai (1941). Ἡ ἐκλεγεῖσα βελτίστη μέθοδος ἐφαρμογῆς ὁριακῶν συνθηκῶν χρησιμοποιεῖται ἐν συνεχείᾳ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ διηχητικοῦ προβλήματος διὰ τὸ ὁποῖον λόγῳ τοῦ μὴ γραμμικοῦ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων δὲν ὑφίσταται ἀναλυτικὴ λύσις. Διὰ τὴν πιστοτέραν ἀπόδοσιν τοῦ πεδίου ροῆς χρησιμοποιεῖται μία νέα βελτιωμένη μορφὴ Τεχνικοῦ Ἰξώδους.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν ἀποδεικνύουν τὴν σημασίαν τῆς ἀκριβοῦς ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν καθὼς καὶ τὴν ἀνάγκην περιορισμοῦ τῆς ἐπιδράσεως τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους εἰς τὰς περιοχὰς τῆς ροῆς πλησίον τῶν σημείων ἀνακοπῆς καὶ τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη ἡ εἰσαγωγὴ τῶν ὑπολογιστῶν εἰς τοὺς διαφόρους τομεῖς τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἔχει προκαλέσει ἀληθῆ ἐπανάστασιν εἰς τὰς μεθόδους ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων καὶ εἰς τὸν τρόπον σκέψεως τῶν ἐρευνητῶν.

Ἡ ὕπαρξις τῶν ὑπολογιστῶν ἐπέτρεψε τὴν χρησιμοποίησιν μεγάλου ἀριθμοῦ νέων προσεγγιστικῶν μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως διὰ τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιτευχθῆ ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων τὰ ὁποῖα μέχρι πρό τινος ἐθεωροῦντο πρακτικῶς ἄλυτα.

Τὸ ἐν προκειμένῳ πρόβλημα τοῦ πεδίου ροῆς ἀτριβοῦς συμπιεστοῦ ρευστοῦ πέριξ κυλίνδρου κυκλικῆς διατομῆς, εἶναι ἐνδεικτικὸν τῆς ἀδυναμίας τῶν ὑπαρ-

---

* P. SPARIS, **Numerical calculation of the flow field around a circular cylinder in a uniform transonic flow.**

χουσῶν ἀναλυτικῶν μεθόδων διὰ τὴν ἐπίλυσιν μὴ γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἐν ἀντιθέσει μὲ τὴν σχετικὴν παντοδυναμίαν τῶν προσεγγιστικῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων.

Πράγματι, ἐνῷ τὸ πρόβλημα τῆς ἀσυμπιέστου ἀτριβοῦς ροῆς πέριξ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἔχει πρὸ πολλοῦ ἐπιλυθῆ, ἐσχάτως μόνον ἐπετεύχθη ἀναλυτικῶς ἡ ἐπίλυσις διὰ συμπιεστὸν ἀτριβὲς ρευστὸν ὑπὸ τοῦ Imai. Ἡ λύσις αὕτη ἰσχύει διὰ μικροὺς ἀριθμοὺς Mach κατωτέρους τοῦ κρισίμου, πέραν τοῦ ὁποίου ἡ ἐμφάνισις κυμάτων πιέσεως καταργεῖ τὴν γραμμικότητα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τῆς παρούσης ἐργασίας παρέχονται αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῆς ροῆς καὶ αἱ προσεγγίζουσαι αὐτὰς ἐξισώσεις τῶν πεπερασμένων διαφορῶν. Εἰς τὸ τρίτον κεφάλαιον ἀναπτύσσονται ἐν λεπτομερείᾳ αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι καθὼς καὶ αἱ διάφοροι μέθοδοι ἐφαρμογῆς αὐτῶν ἀναλόγως τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας τοῦ ὑπολογισμοῦ. Εἰς τὸ τέταρτον κεφάλαιον εἰσάγεται μία βελτιωμένη μορφὴ Τεχνικοῦ Ἰξώδους, εἰς δὲ τὸ πέμπτον κεφάλαιον ἐκτίθενται τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἐξάγονται συμπεράσματα διὰ τὴν περαιτέρω χρησιμοποίησιν τῆς ἀναπτυχθείσης μεθόδου εἰς πολυπλοκώτερα προβλήματα διδιαστάτου ἢ τρισδιαστάτου ροῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις αἱ διέπουσαι τὴν ἀσταθῆ διδιάστατον ροὴν τοῦ συμπιεστοῦ ἀτριβοῦς ρευστοῦ δύνανται νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν κάτωθι μορφὴν εἰς πολικὰς συντεταγμένας

$$\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta t} + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta r}(\varrho u_r r) + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta \vartheta}(\varrho u_\vartheta) = 0\,, \tag{1.1}$$

ἤτοι ἡ ἐξίσωσις διατηρήσεως τῆς μάζης

$$\frac{\vartheta(\varrho u_\vartheta)}{\vartheta t} + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta r}(\varrho u_\vartheta u_r r) + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta \vartheta}(\varrho u_\vartheta^2 + p) = 0\,, \tag{1.2}$$

ἤτοι ἡ ἐξίσωσις διατηρήσεως τῆς ϑ συνιστώσης τῆς ὁρμῆς

$$\frac{\vartheta(\varrho u_r)}{\vartheta t} + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta r}(r\varrho u_r^2 + p) + \frac{1}{r}\frac{\vartheta}{\vartheta \vartheta}(\varrho u_r u_\vartheta) = \frac{u_\vartheta^2 \varrho + p}{r} \tag{1.3}$$

ἤτοι ἡ ἐξίσωσις διατηρήσεως τῆς r συνιστώσης τῆς ὁρμῆς.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ γραφοῦν ὑπὸ διανυσματικὴν μορφὴν ὡς ἀκολούθως :

$$U_t + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} G_\vartheta = K \qquad (1.4)$$

ὅπου

$$U = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u_\vartheta \\ \varrho u_r \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \varrho u_r r \\ \varrho u_\vartheta u_r r \\ r\varrho u_r^2 + p \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \varrho u_\vartheta \\ \varrho u_\vartheta^2 + p \\ \varrho u_r u_\vartheta \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{u_\vartheta^2 \varrho + p}{r} \end{bmatrix}$$

καὶ ϱ ἡ πυκνότης, p ἡ πίεσις καὶ u_r , u_ϑ αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος τοῦ ρευστοῦ κατὰ r, ϑ διευθύνσεις ἀντιστοίχως.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θὰ περιορισθῶμεν εἰς ἀριθμοὺς Mach πέριξ τῆς μονάδος, ὅπου εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ροὴ παραμένει ἰσεντροπική. Πράγματι, ἡ παραγωγὴ ἐντροπίας ὑπὸ ἀσθενῶν κυμάτων πιέσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀμελητέα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ πίεσις p δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1.4) βάσει τῆς σχέσεως :

$$p \sim \varrho^\gamma, \quad \text{ὅπου} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \qquad (1.5)$$

Ἐν ἀρχῇ ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὸ πεδίον ροῆς πέριξ τοῦ κυλίνδρου ὑφίσταται μία αὐθαίρετος διανομὴ ταχύτητος καὶ πυκνότητος. Ἡ αὐθαίρετος αὕτη διανομὴ καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἐρευνητοῦ καὶ συνήθως λαμβάνεται πρὸς τοῦτο ἡ ὁμοιόμορφος ροή.

Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ προσβάλλουσα τὸν κύλινδρον ροὴ δὲν μεταβάλλεται χρονικῶς καὶ τὸ ρευστὸν εἶναι ἀτριβές, μετὰ ἀπὸ πάροδον ἀρκετοῦ χρόνον T τὸ πεδίον ροῆς θὰ λάβῃ τὴν τελικὴν σταθερὰν μορφήν του ἀνεξαρτήτως τῆς αὐθαιρέτου ἀρχικῆς ροῆς, ἡ ὁποία τρόπον τινὰ θὰ «ἀποπλυθῇ».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῆς ροῆς, αἱ ἐκτεθεῖσαι εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, δύνανται νὰ λυθοῦν προσεγγιστικῶς, ἐὰν αἱ ὑπάρχουσαι παράγωγοι ἐκφρασθοῦν τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν. Ἐν προκειμένῳ τὸ χρησιμοποιηθὲν σχῆμα εἶναι γνωστὸν ὡς σχῆμα τοῦ Mc Cormack (Mc Cormack and Paullay, 1972) καὶ ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$U'^{n+1}_{j,l} = U^n_{j,l} - \frac{\Delta t}{r\Delta r}\left(F^n_{j+1,l} - F^n_{j,l}\right) - \frac{\Delta t}{r\Delta\vartheta}\left(G^n_{j,l+1} - G^n_{j,l}\right) \tag{2.1}$$

$$U^{n+1}_{j,l} = 0.5\left[U'^{n+1}_{j,l} + U^n_{j,l} - \frac{\Delta t}{r\Delta r}\left(F'^{n+1}_{j,l} - F'^{n+1}_{j-1,l}\right) - \frac{\Delta t}{r\Delta\vartheta}\left(G'^{n+1}_{j,l} - G'^{n+1}_{j,l-1}\right)\right] + K'^{n+1}_{j,l}\,\Delta t \tag{2.2}$$

ὅπου Δt, Δr, $\Delta\vartheta$ τὰ πεπερασμένα βήματα εἰς τὸν χρόνον καὶ χῶρον καὶ $U^n_{j,l}$ ἡ τιμὴ τοῦ διανύσματος U κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = n\Delta t$ εἰς τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $j\Delta r, l\Delta\vartheta$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2.1), (2.2) παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ πεδίον ροῆς εἶναι γνωστὸν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = n\Delta t$, τότε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἐξισώσεων (2.1), (2.2) προσδιορίζεται τὸ πεδίον διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = (n+1)\Delta t$. Οὕτω, προσδιορίζοντες αὐθαιρέτως τὸ πεδίον κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$ καὶ ἐφαρμόζοντες ἀλληλοδιαδόχως τὰς σχέσεις (2.1), (2.2) καὶ τὰς ὁριακὰς συνθήκας, δυνάμεθα μετὰ χρόνον $T = N\Delta t$ νὰ φθάσωμεν ἀσυμπτωτικῶς εἰς μίαν μορφὴν τοῦ πεδίου ροῆς, ἡ ὁποία πρακτικῶς νὰ μὴ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου, ἤτοι εἰς τὴν ζητουμένην λύσιν.

Τὸ χρονικὸν βῆμα Δt κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ροὴ «προωθεῖται» διὰ τῆς ἐπιλύσεως μιᾶς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2.1), (2.2), δὲν δύναται νὰ εἶναι αὐθαίρετον. Πράγματι, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνθήκη

$$\Delta t \leqslant \left[\left(\frac{|u_r| + \alpha}{\Delta r}\right)^2 + \left(\frac{|u_\vartheta| + \alpha}{r\Delta\vartheta}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

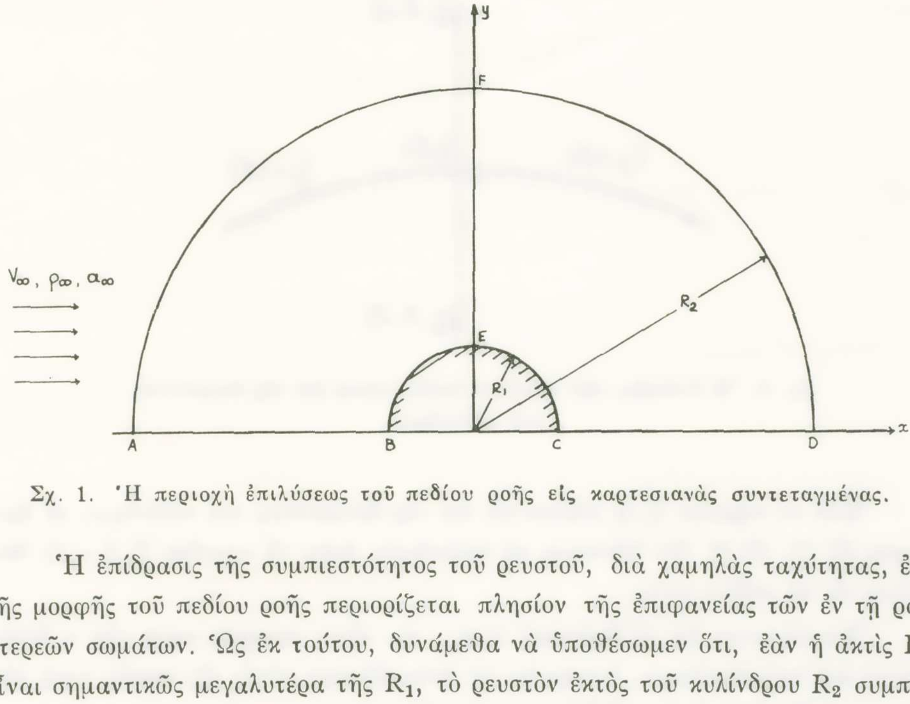
ὅπου α ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ u_r, u_ϑ αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος τῆς ροῆς εἰς τυχὸν σημεῖον τοῦ πεδίου εἶναι ἱκανὴ διὰ νὰ ἀποτρέψῃ τοπικῶς τὴν ἀριθμητικὴν ἀστάθειαν τοῦ ὑπολογισμοῦ. Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη εἶναι γνωστὴ ὡς συνθήκη τοῦ von Neumann (von Neumann and Richtmeyer, 1951). Πρακτικῶς εἰς τὸ ὑπ' ὄψιν πρόβλημα αἱ ἀναμενόμεναι μέγισται ταχύτητες θὰ παρουσιασθοῦν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὅπου καὶ ἡ ποσότης $r\Delta\vartheta$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν της. Συνεπῶς, ἐφ' ὅσον ἡ συνθήκη (2.3) πληροῦται ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἕπεται ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι εὐσταθὴς εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ πεδίου. Τὸ σφάλμα προσεγγίσεως τοῦ σχήματος Mc Cormack εἶναι τῆς τάξεως

$$\max\left\{\Delta t^3,\ \Delta t\,\Delta r^2,\ \Delta t\,(r\Delta\vartheta)^2\right\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΟΡΙΑΚΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ

Τὸ πρὸς ἐπίλυσιν πεδίον ροῆς ὁρίζεται μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος R_1, καὶ ἑνὸς ὁμοκέντρου κυλίνδρου ἀκτῖνος R_2 κατὰ πολὺ μεγαλυτέρας τῆς R_1 (σχ. 1). Λόγῳ τῆς ὑπαρχούσης συμμετρίας τοῦ πεδίου ὡς πρὸς τὴν διάμετρον BC τοῦ κυλίνδρου τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ταχύτητα V_∞ τῆς ὁμοιομόρφου ροῆς, δυνάμεθα νὰ περιορίσωμεν τὸν ὑπολογισμὸν εἰς τὸν χωρίον ABECDFA.



Σχ. 1. Ἡ περιοχὴ ἐπιλύσεως τοῦ πεδίου ροῆς εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας.

Ἡ ἐπίδρασις τῆς συμπιεστότητος τοῦ ρευστοῦ, διὰ χαμηλὰς ταχύτητας, ἐπὶ τῆς μορφῆς τοῦ πεδίου ροῆς περιορίζεται πλησίον τῆς ἐπιφανείας τῶν ἐν τῇ ροῇ στερεῶν σωμάτων. Ὡς ἐκ τούτου, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀκτὶς R_2 εἶναι σημαντικῶς μεγαλυτέρα τῆς R_1, τὸ ρευστὸν ἐκτὸς τοῦ κυλίνδρου R_2 συμπεριφέρεται ὡς ἀσυμπίεστον. Κατόπιν δοκιμῶν ἐλήφθη $R_2 = 4R_1$ μὲ ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας AFD ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\varrho = \varrho_\infty , \tag{3α}$$

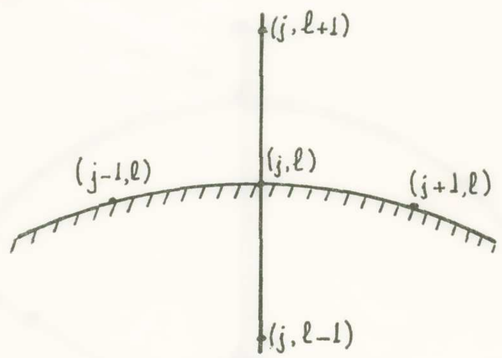
$$u_r = -V_\infty \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \cos\vartheta, \tag{3β}$$

$$u_\vartheta = -V_\infty \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \sin\vartheta. \tag{3γ}$$

Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας BEC τοῦ κυλίνδρου ἡ πρὸς ἐφαρμογὴν συνθήκη εἶναι προφανῶς

$$u_r|_{r=R_1} = 0.$$

Ἐκ τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων τῶν πεπερασμένων διαφορῶν (2. 1), (2. 2) προκύπτει ὅτι διὰ τὴν ἐπίλυσίν των εἰς τυχὸν σημεῖον (j, l) ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν ἰδιοτήτων τῆς ροῆς, ἤτοι τοῦ διανύσματος $\overline{U}$, εἰς τὰ γειτονικὰ σημεῖα (j − 1, l) (j + 1, l), (j, l − 1), (j, l + 1).



Σχ. 2. Ἡ διάταξις τῶν σημείων ὑπολογισμοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἐὰν τὸ σημεῖον (j, l) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, αἱ ἐξισώσεις (2. 1), (2. 2) δὲν δύνανται νὰ ἐπιλυθοῦν, διότι τὸ σημεῖον (j, l − 1) δὲν ἀνήκει εἰς τὸ πεδίον ροῆς.

Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ ἰδιότητες ϱ, u_r, u_ϑ εἶναι συνεχεῖς κατὰ τὴν r διεύθυνσιν καὶ παραγωγίσιμοι, δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν αὐτὰς εἰς σειρὰς κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, ὁπότε εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις:

$$(\varrho)_{j,l-1} = (\varrho)_{j,l+1} - 2\Delta r\left(\frac{\vartheta\varrho}{\vartheta r}\right)_{j,l} + 0(\Delta r^3), \qquad (3.1.\alpha)$$

$$(u_\vartheta)_{j,l-1} = (u_\vartheta)_{j,l+1} - 2\Delta r\left(\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta r}\right)_{j,l} + 0(\Delta r^3), \qquad (3.1.\beta)$$

$$(u_r)_{j,l-1} = -(u_r)_{j,l+1} + \Delta r^2\left(\frac{\vartheta^2 u_r}{\vartheta r^2}\right)_{j,l} + 0(\Delta r^4). \qquad (3.1.\gamma)$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχέσεων (3. 1. α) — (3. 1. γ) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν τιμὴν διὰ τὸ διάνυσμα $\overline{U}$ εἰς τὸ σημεῖον (j, l — 1).

Πράγματι, εἶναι

$$\begin{aligned}(\varrho)_{j,l-1} &= (\varrho)_{j,l+1} + 0(\Delta r),\\ (u_\vartheta)_{j,l-1} &= (u_\vartheta)_{j,l+1} + 0(\Delta r),\\ (u_r)_{j,l-1} &= -(u_r)_{j,l+1} + 0(\Delta r^2).\end{aligned} \tag{3. 2}$$

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀποτελοῦν τὴν λεγομένην Ἀρχὴν τῆς Ἀνακλάσεως, ἡ ὁποία προφανῶς παρουσιάζει ἀκρίβειαν τάξεως 0 καθ' ὅσον τὸ σφάλμα εἶναι τάξεως Δr.

Ἐὰν αἱ παράγωγοι $\left(\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta r}\right)_{j,l}$, $\left(\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta r}\right)_{j,l}$ εἶναι γνωσταί, δυνάμεθα νὰ βελτιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν θέτοντες

$$\begin{aligned}(\varrho)_{j,l-1} &= (\varrho)_{j,l+1} - 2\Delta r\left(\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta r}\right)_{j,l} + 0(\Delta r^3),\\ (u_\vartheta)_{j,l-1} &= (u_\vartheta)_{j,l+1} - 2\Delta r\left(\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta r}\right)_{j,l} + 0(\Delta r^3),\\ (u_r)_{j,f-1} &= -(u_r)_{j,l+1} + 0(\Delta r^2).\end{aligned} \tag{3. 3}$$

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἔχουν, προφανῶς, ἀκρίβειαν τάξεως 1 καθ' ὅσον παρουσιάζουν σφάλμα τάξεως Δr^2.

Ἡ χρησιμοποίησις τῶν σχέσεων (3. 1), (3. 3) ἀπαιτεῖ ὑπολογισμὸν τῶν τιμῶν τῶν παραγώγων $\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta r}$, $\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta r}$, $\frac{\vartheta^2 u_r}{\vartheta r^2}$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν αἱ μόναι πηγαὶ πληροφοριῶν, τὰς ὁποίας διαθέτομεν, εἶναι προφανῶς αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις (1. 1), (1. 2), (1. 3) καὶ ἡ ὁριακὴ συνθήκη $u_r|_{r=R_1} = 0$.

Ἐὰν θέσωμεν $u_r = 0$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1. 3), λαμβάνομεν

$$\left.\frac{\vartheta p}{\vartheta r}\right|_{r=R_1} = \left.\frac{u_\vartheta^2 \varrho}{r}\right|_{r=R_1}.$$

Διὰ ἰσεντροπικὴν ροὴν ἔχομεν

$$\frac{\vartheta p}{\vartheta r} = \alpha^2 \frac{\vartheta \varrho}{\vartheta r}.$$

Οὕτω, λαμβάνομεν τελικῶς τὴν σχέσιν

$$\left.\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta r}\right|_{r=R_1} = \left.\frac{u^2_\vartheta \varrho}{\alpha^2 r}\right|_{r=R_1}. \tag{3.4}$$

Διὰ ῥοὴν ἄνευ συστροφῆς ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\vartheta u_r}{\vartheta \vartheta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\vartheta (u_\vartheta r)}{\vartheta r},$$

καὶ συνεπῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὅπου $u_r = 0$, εἶναι

$$\left.\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta r}\right|_{r=R_1} = -\left.\frac{u_\vartheta}{r}\right|_{r=R_1}. \tag{3.5}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3.4), (3.5) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παράγωγοι τῶν ἰδιοτήτων ϱ, u_ϑ τῆς ῥοῆς δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, συνεπῶς βάσει τῶν σχέσεων (3.3) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ὁριακὰς συνθήκας μὲ ἀκρίβειαν τάξεως 1.

Διὰ τὴν παράγωγον $\dfrac{\vartheta^2 u_r}{\vartheta r^2}$ δὲν κατέστη δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀνάλογος σχέσις. Ἀντιθέτως, εὑρέθη σχέσις συνδέουσα τὰς παραγώγους $\dfrac{\vartheta^2 u_r}{\vartheta r^2}$, $\dfrac{\vartheta u_r}{\vartheta r}$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Πράγματι ἐὰν λάβωμεν τὴν παράγωγον τῆς ἐξισώσεως (1.1) ὡς πρὸς r καὶ τὴν παράγωγον τῆς (3.4) ὡς πρὸς t ἔχομεν :

$$r\frac{\vartheta^2 \varrho}{\vartheta r \vartheta t} + \frac{\vartheta \varrho}{\vartheta t} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta r^2}(\varrho u_r r) + \frac{\vartheta^2}{\vartheta r \vartheta \vartheta}(\varrho u_\vartheta) = 0, \tag{3.6}$$

καὶ

$$\frac{\vartheta^2 \varrho}{\vartheta r \vartheta t} = \frac{2\varrho u_\vartheta}{\alpha^2 r} \cdot \frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta t} + \frac{u^2_\vartheta}{r}\left[\frac{1}{\alpha^2} + \varrho \frac{\vartheta}{\vartheta \varrho}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta t}. \tag{3.7}$$

Διὰ ἰσεντροπικὰς ῥοὰς ἔχομεν :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta \varrho}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta \varrho}\left(\frac{\varrho^{1-\gamma}}{\gamma}\right) = \frac{1-\gamma}{\alpha^2 \varrho}. \tag{3.8}$$

Ἀπαλείφοντες τὴν μεικτὴν παράγωγον ὡς πρὸς r, ϑ τῆς πυκνότητος ϱ μεταξὺ τῶν σχέσεων (3.7), (3.8) λαμβάνομεν

$$\frac{\vartheta^2(\varrho u_r r)}{\vartheta r^2} = -\frac{\vartheta^2(\varrho u_\vartheta)}{\vartheta r \vartheta \vartheta} - 2\frac{\varrho u_\vartheta}{\alpha^2} \cdot \frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta t} - \left[1 + M^2(2-\gamma)\right]\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta t}, \tag{3.9}$$

ὅπου $M = \dfrac{u_\vartheta}{\alpha}$.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω σχέσεων ἡ ἐξίσωσις (3. 9) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\vartheta^2 u_r}{\vartheta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\vartheta u_r}{\vartheta r}(\gamma M^2 + 1) = \frac{2}{r^2}\frac{\vartheta u_\vartheta}{\vartheta \vartheta}\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right) + \frac{4u_\vartheta}{r^2 \varrho}\cdot\frac{\vartheta \varrho}{\vartheta \vartheta}, \qquad (3.10)$$

διὰ $r = R_1$.

Ἡ σχέσις (3. 10) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ταχύτητος u_r εἰς τὸ σημεῖον $(j, l-1)$ μὲ σφάλμα τάξεως Δr^3.

Συνοψίζοντες, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ὁριακὴ συνθήκη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων (3. 2) ἢ (3. 3) ἢ (3. 1α), (3. 1. β), (3. 10) μὲ σφάλματα τάξεως Δr, Δr^2, Δr^3 ἀντιστοίχως.

Τὸ σφάλμα τῶν ἐξισώσεων Mc Cormack εἶναι τῆς τάξεως

$$\max\left\{\Delta t^3, \Delta r^2 \Delta t, (r\Delta\vartheta)^2 \Delta t\right\}$$

καὶ ἐπειδὴ βάσει τῆς συνθήκης εὐσταθείας (2. 3), $\Delta t = 0(\Delta r, r\Delta\vartheta) = 0(\Delta r)$, τὸ σφάλμα τοῦτο εἶναι τῆς τάξεως Δr^3.

Διὰ νὰ καταστῇ σαφεστέρα ἡ σημασία τῆς τάξεως ἀκριβείας τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν διὰ τὸν ἀκριβῆ ὑπολογισμὸν ἑνὸς πεδίου ροῆς, ἐχρησιμοποιήθησαν ἐν προκειμένῳ, ὅλαι αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν εἰς τρεῖς ἀνεξαρτήτους ὑπολογισμοὺς πρὸς σύγκρισιν τῶν ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΕΧΝΙΚΟΝ ΙΞΩΔΕΣ

Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τοῦ φαινομένου τῆς ἀριθμητικῆς ἀσταθείας ἠκολουθήθη ἡ μέθοδος τοῦ Lax (Lax and Wendroff, 1964), ἤτοι ἡ προσθήκη ὡρισμένων ἐπὶ πλέον ὅρων εἰς τὸ σχῆμα τῶν πεπερασμένων διαφορῶν (2. 1), (2. 2). Οἱ ὅροι αὐτοὶ καλοῦνται Τεχνικὸν Ἰξῶδες καὶ ἔχουν τάξιν μεγέθους ἴσην μὲ τὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ σφάλματος τοῦ σχήματος Mc Cormack, ἤτοι $0(\Delta r^3)$, μὴ εἰσάγοντες οὕτω σημαντικὸν σφάλμα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ πεδίου.

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν ὅρων τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους εἶναι ἀνάλογος τῆς μορφῆς τοῦ φυσικοῦ ἰξώδους, ἤτοι :

$$Tl = C_r \frac{\vartheta^2 U}{\vartheta r^2} + C_\vartheta \frac{1}{r^2}\frac{\vartheta^2 U}{\vartheta \vartheta^2}, \quad \text{ὅπου} \quad U = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho u_\vartheta \\ \varrho u_r \end{bmatrix}.$$

Οἱ συντελεσταὶ C_r, C_ϑ οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουν μὲ τὸ κινηματικὸν ἰξῶδες ν τῆς ροῆς ἀλλὰ εἶναι ἀριθμοὶ τάξεως μεγέθους Δr^3. Εἰς τὸν ἐν προκειμένῳ ὑπολογισμὸν ἐχρησιμοποιήθη Τεχνικὸν Ἰξῶδες τῆς μορφῆς:

$$\left.\begin{aligned} V_{j,1}^{n+1} = K_r\Bigg[&\left|(u_r')_{j+1,1}^{n+1} - (u_r')_{j,1}^{n+1}\right|\cdot\left(U_{j+1,1}'^{n+1} - \frac{U_{j,1}^{n+1}+U_{j,1}^{n}}{2}\right) + \\ &+\left|(u_r')_{j,1}^{n+1} - (u_r')_{j-1,1}^{n+1}\right|\cdot\left(U_{j-1,1}'^{n+1} - \frac{U_{j,1}^{n+1}+U_{j,1}^{n}}{2}\right)\Bigg] + \\ + K_\vartheta\Bigg[&\left|(u_\vartheta')_{j,1+1}^{n+1} - (u_\vartheta')_{j,1}^{n+1}\right|\left(U_{j,1+1}'^{n+1} - \frac{U_{j,1}^{n+1}+U_{j,1}^{n}}{2}\right) + \\ &+\left|(u_\vartheta')_{j,1}^{n+1} - (u_\vartheta')_{j,1-1}^{n+1}\right|\left(U_{j,1-1}'^{n+1} - \frac{U_{j,1}^{n+1}+U_{j,1}^{n}}{2}\right)\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

ὅπου K_r, K_ϑ ἀριθμοὶ τάξεως μεγέθους 1 εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἀναφερθῶμεν ἐκτενέστερον κατωτέρω. Ἡ ποσότης $V_{j,1}^{n+1}$ προστίθεται εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (2.2).

Ἐκ τῆς μορφῆς τῆς σχέσεως (4.1) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ποσότης V καθίσταται σημαντικὴ μόνον εἰς τὰς περιοχὰς τοῦ πεδίου ὅπου ἡ ροὴ μεταβάλλεται ἀποτόμως, ἤτοι ὅπου αἱ παράγωγοι $\frac{\vartheta^2 U}{\vartheta r^2}$, $\frac{\vartheta^2 U}{\vartheta \vartheta^2}$ λαμβάνουν ὑψηλὰς τιμάς.

Διὰ τὸν περιορισμὸν τῆς δράσεως τῶν ὅρων τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους μόνον εἰς τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς καὶ ἐπὶ τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς, οἱ παράγοντες K_r, K_ϑ πρέπει νὰ πληροῦν τὰς ἀκολούθους συνθήκας:

$$K_r,\ K_\vartheta = 0(0) \quad \text{διὰ} \quad M \neq 0,\ M \neq 1$$

$$\text{καὶ} \quad K_r,\ K_\vartheta = 0(1) \quad \text{διὰ} \quad M = 0,\ M = 1.$$

Μία συνάρτησις πληροῦσα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας εἶναι ἡ

$$K_r \sim K_\vartheta \sim \left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{M}{\Delta M_0}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\dfrac{M-1}{\Delta M_1}\right)^2}\right], \quad (4.2)$$

ὅπου M ὁ τοπικὸς ἀριθμὸς Mach καὶ ΔM_0, ΔM_1 σταθεραὶ τάξεως μεγέθους M_∞.

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους ἐπὶ τῆς μορφῆς τοῦ πεδίου ροῆς θὰ ἐξετασθῇ λεπτομερέστερον εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

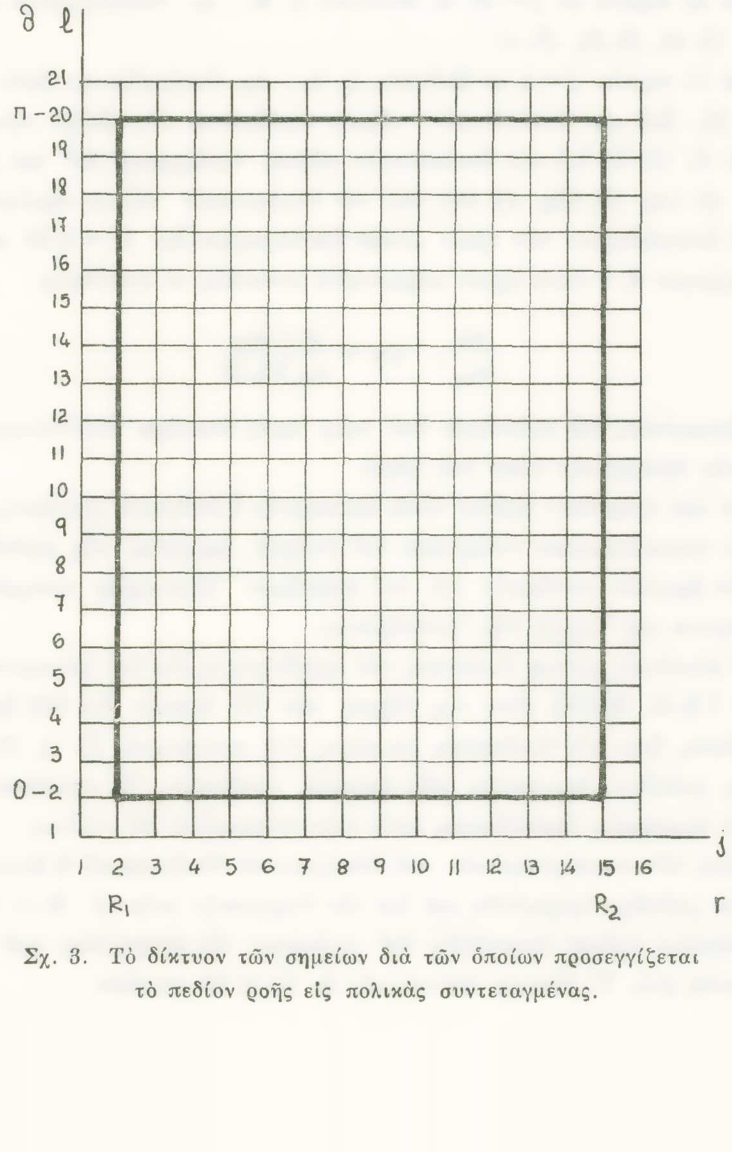
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Ἡ περιοχὴ ἐπιλύσεως τοῦ πεδίου ροῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν

$$R_1 \leqslant r \leqslant 4R_1$$
$$\text{καὶ} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi .$$

Τὸ δίκτυον σημείων διὰ τῶν ὁποίων προσεγγίζεται τὸ πεδίον ροῆς ἀποτελεῖται ἐκ 16 σημείων κατὰ τὴν r διεύθυνσιν καὶ 21 σημείων κατὰ τὴν ϑ διεύθυνσιν (σχ. 3). Προφανῶς, ἐὰν ἀπαιτεῖται μεγαλυτέρα ἀκρίβεια, ὁ ἀριθμὸς τῶν



Σχ. 3. Τὸ δίκτυον τῶν σημείων διὰ τῶν ὁποίων προσεγγίζεται τὸ πεδίον ροῆς εἰς πολικὰς συντεταγμένας.

σημείων δύναται νὰ αὐξηθῇ, μὲ ἀνάλογον ὅμως αὔξησιν τοῦ χρόνου ὑπολογισμοῦ.

Ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθέντων εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ ὁριακῶν συνθηκῶν προκύπτει ὅτι αἱ ἐξισώσεις (2. 1), (2. 2) ἐπιλύονται μόνον διὰ τὰ σημεῖα j, l μὲ $2 \leqslant j \leqslant 15$, $2 \leqslant l \leqslant 20$.

Τὰ σημεῖα μὲ $l = 1$, $l = 21$ ὑπολογίζονται βάσει τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν.

Οὕτως ἔχομεν :

$$\begin{aligned} &\varrho\ (l = 1) = \varrho\ (l = 3), && \varrho\ (l = 21) = \varrho\ (l = 19),\\ &u_\vartheta (l = 1) = u_\vartheta (l = 3), \quad \text{καὶ} && u_\vartheta (l = 21) = u_\vartheta (l = 19),\\ &u_r\ (l = 1) = -u_r\ (l = 3), && u_r\ (l = 21) = -u_r\ (l = 19). \end{aligned}$$

Διὰ τὰ σημεῖα μὲ $j = 16$ αἱ ἰδιότητες ϱ, u_r, u_ϑ ὑπολογίζονται βάσει τῶν σχέσεων (3. α), (3. β), (3. γ).

Διὰ τὰ σημεῖα $j = 1$ αἱ ἰδιότητες ϱ, u_r, u_ϑ ὑπολογίζονται βάσει τῶν σχέσεων (3. 2), διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τάξεως σφάλματος Δr, βάσει τῶν σχέσεων (3. 3), (3. 4), (3. 5) διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τάξεως σφάλματος Δr^2 καὶ βάσει τῶν σχέσεων (3. 1α), (3. 1β), (3. 10) διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τάξεως σφάλματος Δr^3.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν τριῶν αὐτῶν ὑπολογισμῶν διὰ $M = 0.35$ παρέχονται εἰς τὰ σχήματα 4, 5 ὅπου ἔχουν παρασταθῇ γραφικῶς αἱ ποσότητες

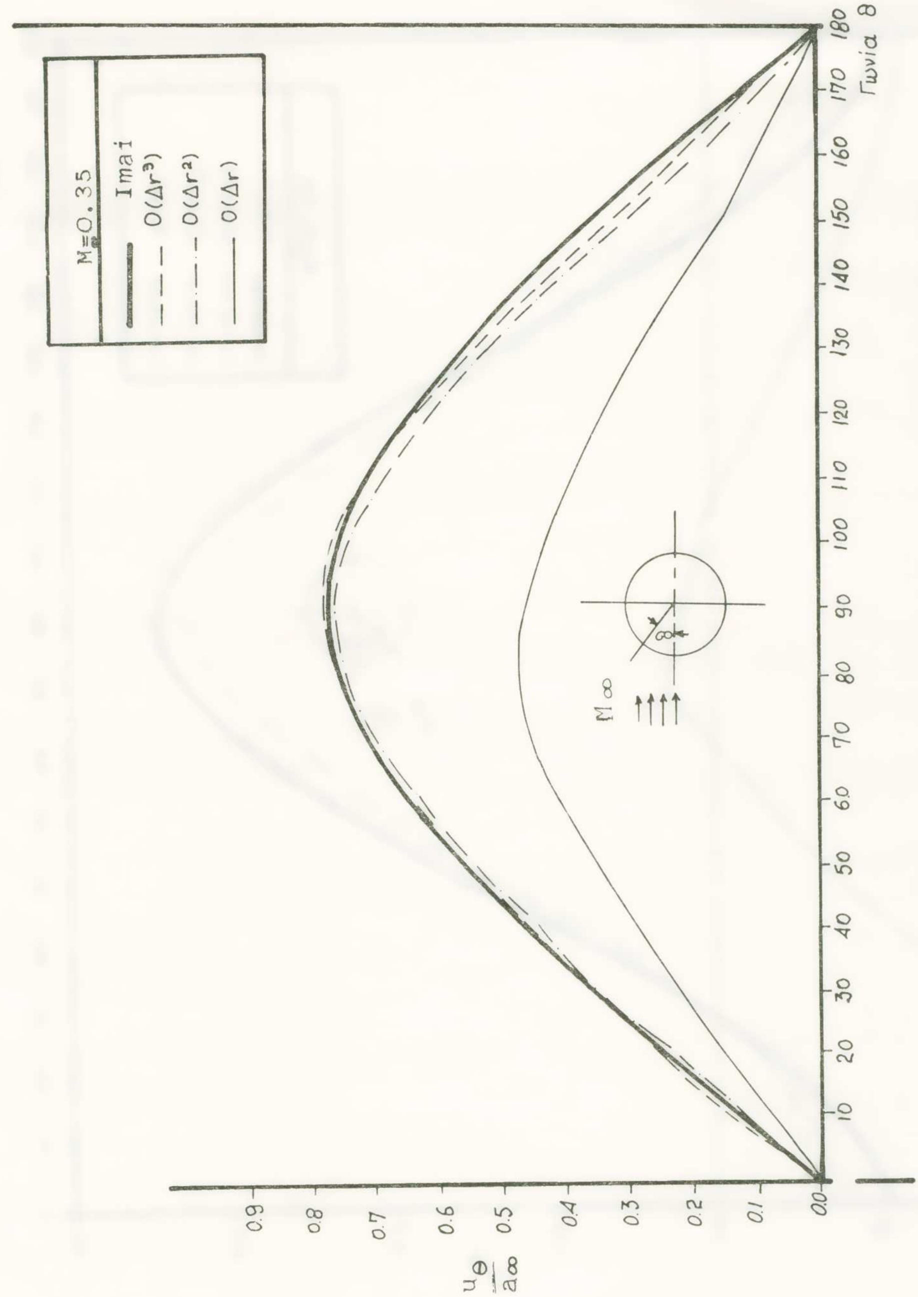
$$\frac{u_\vartheta}{\alpha_\infty}, \quad Cp = \frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty V_\infty^2/2}$$

ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ τοὺς τρεῖς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὺς καθὼς καὶ διὰ τὴν θεωρητικὴν λύσιν τοῦ Imai.

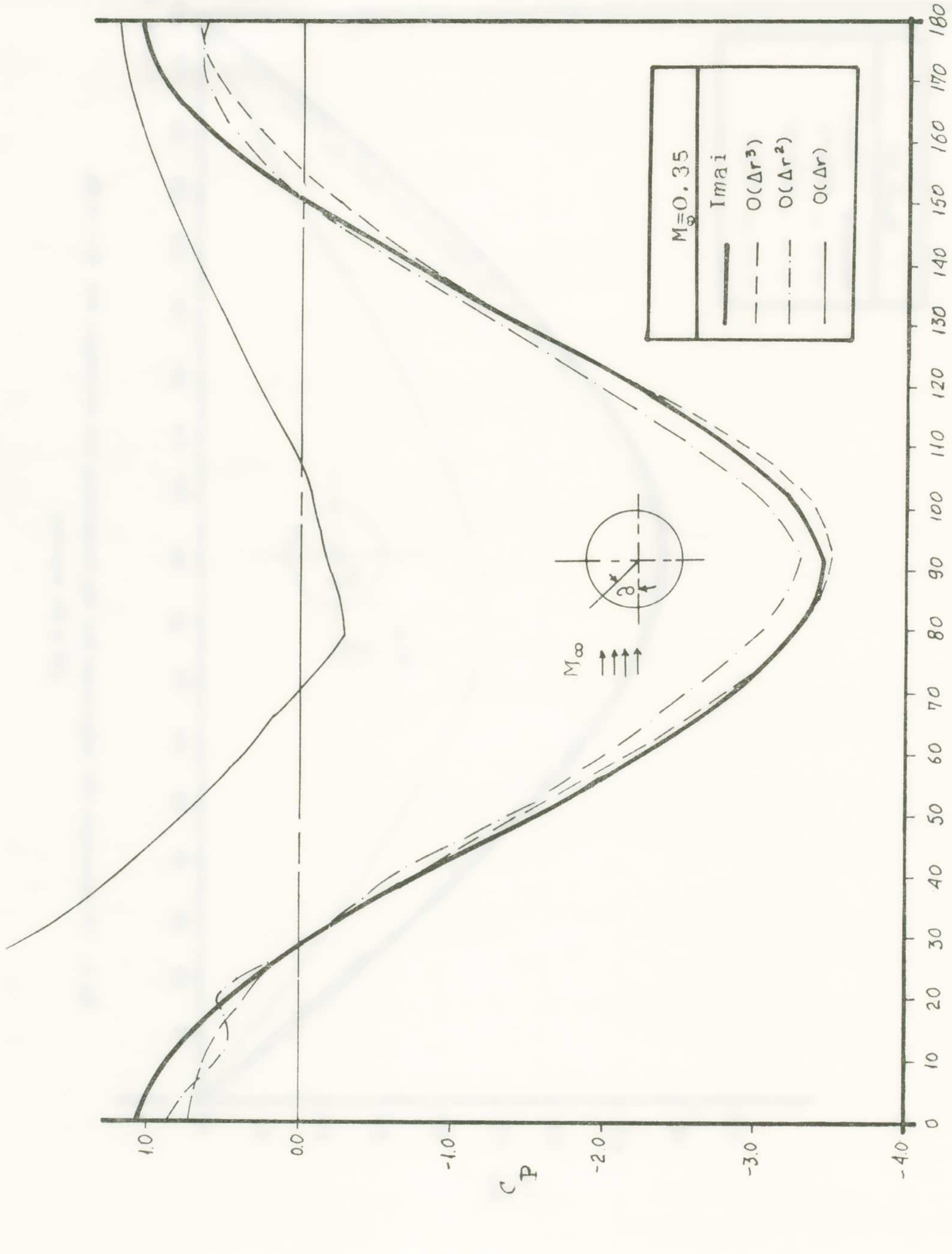
Ἐκ τῶν σχημάτων τούτων εἶναι καταφανὴς ἡ βαθμιαία βελτίωσις τῆς ἀκριβείας τῶν ἀποτελεσμάτων συναρτήσει τοῦ βαθμοῦ ἀκριβείας τῆς μεθόδου ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου. Ἰδιαιτέρως πενιχρὰ εἶναι τὰ ἀποτελέσματα τῆς Ἀρχῆς τῆς Ἀνακλάσεως.

Ὁ συνολικὸς χρόνος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ I.B.M. 360/65 εἶναι τῆς τάξεως τῶν 20 λεπτῶν διὰ 500 ὑπολογιστικοὺς κύκλους, ἤτοι 500 διαδοχικὰς ἐπιλύσεις τοῦ συστήματος (2. 1), (2. 2), ἀνεξαρτήτως μεθόδου ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν. Ἡ προκύπτουσα λύσις παρέμεινε πρακτικῶς ἀμετάβλητος κατὰ τοὺς τελευταίους 50 κύκλους.

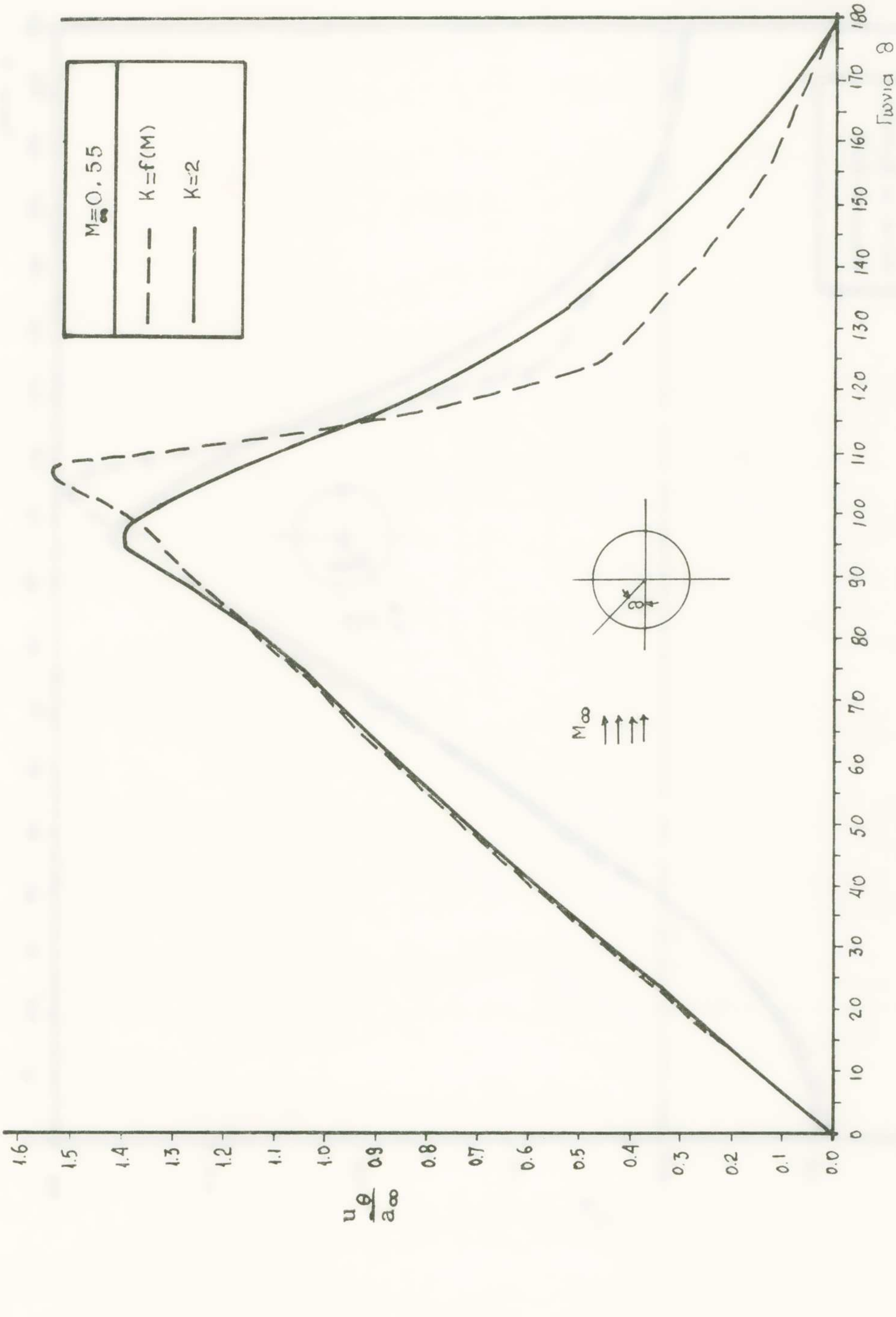
Βάσει τῶν συμπερασμάτων τοῦ ὑποηχητικοῦ ὑπολογισμοῦ ἡ ἀνωτέρω ἀναπτυχθεῖσα μέθοδος ἐφηρμόσθη καὶ διὰ τὴν διηχητικὴν ροὴν μὲ $M = 0.55$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνεπτύχθη ἐπὶ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ὑπερηχητικὴ ροή. Τὸ δίκτυον ἀπετελέσθη ἐκ 29×39 σημείων.



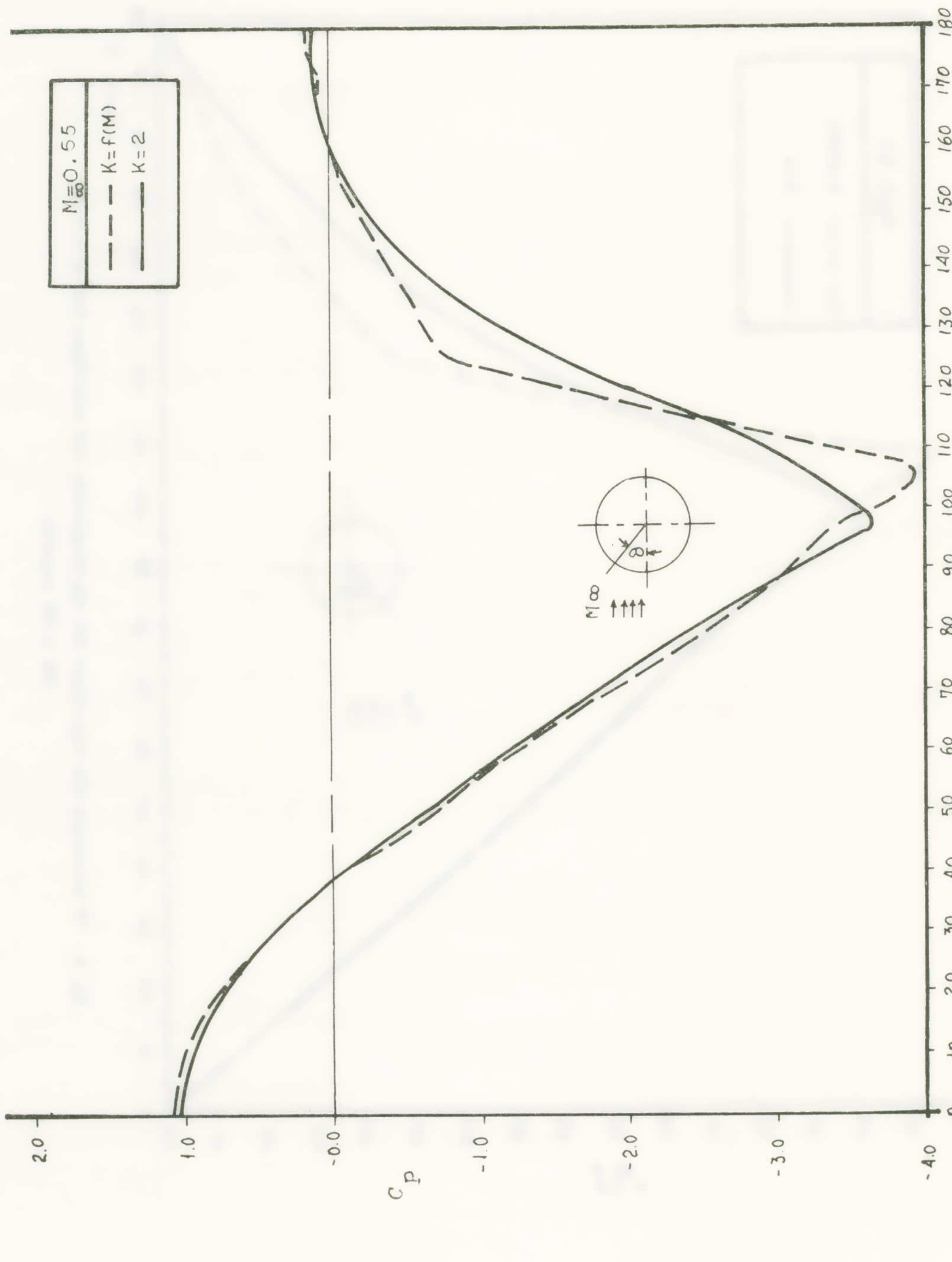
Σχ 4. Ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ M = 0.35, (16 × 21 σημεῖα).



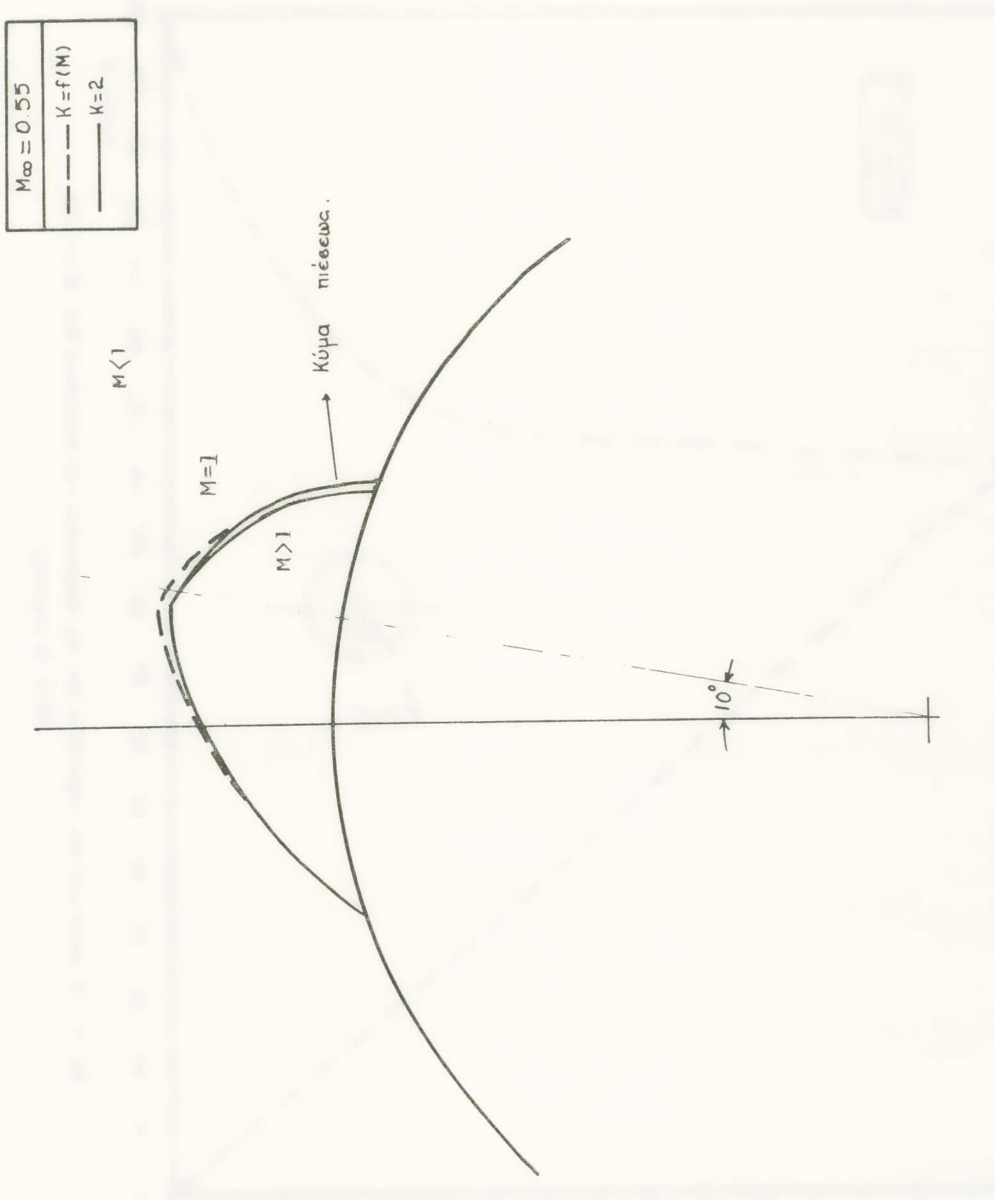
Σχ. 5. Ἡ κατανομὴ τῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ $M = 0.35$, (16×21 σημεῖα).



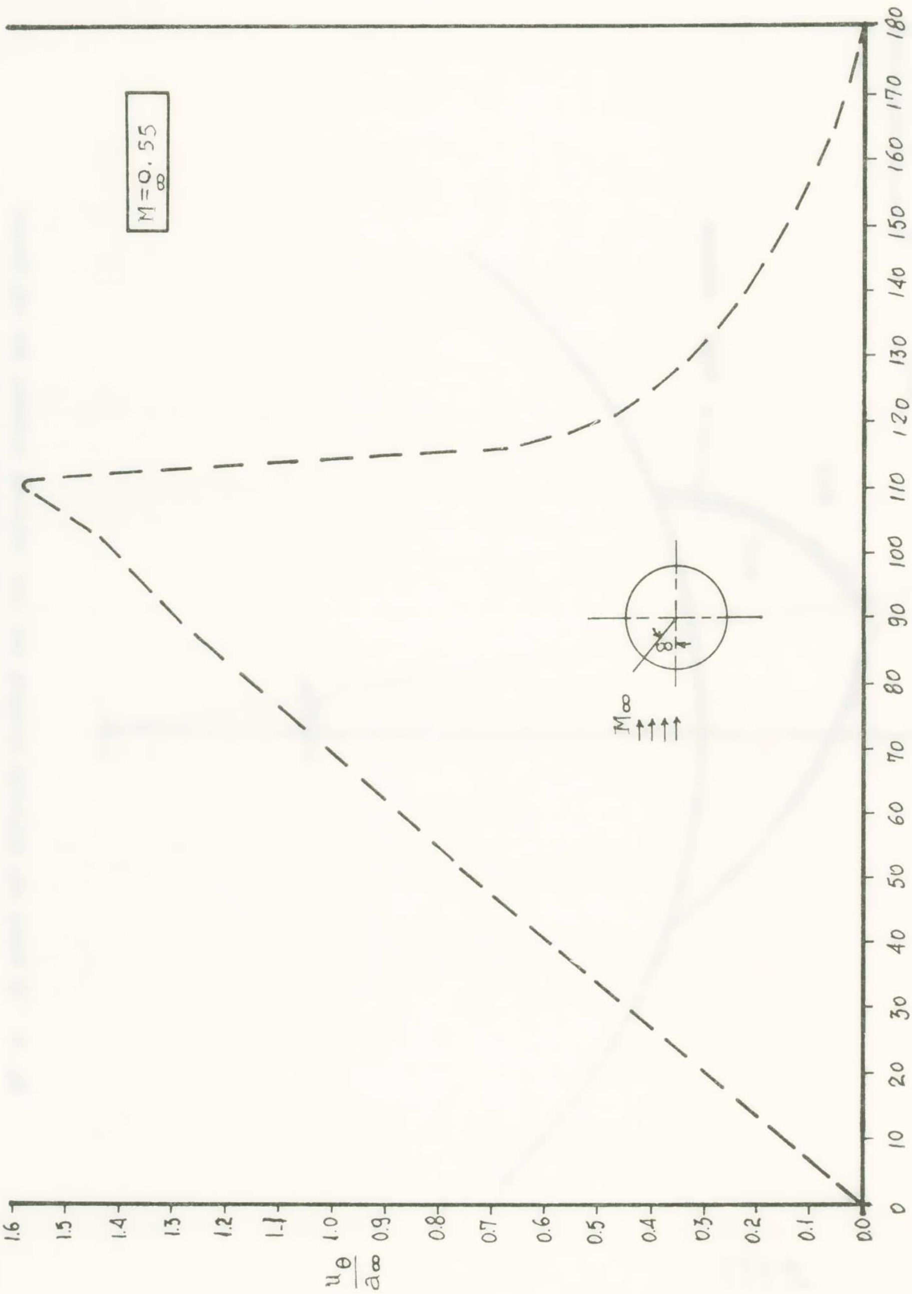
Σχ. 6. Ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ $M = 0.55$, (29×39 σημεῖα).



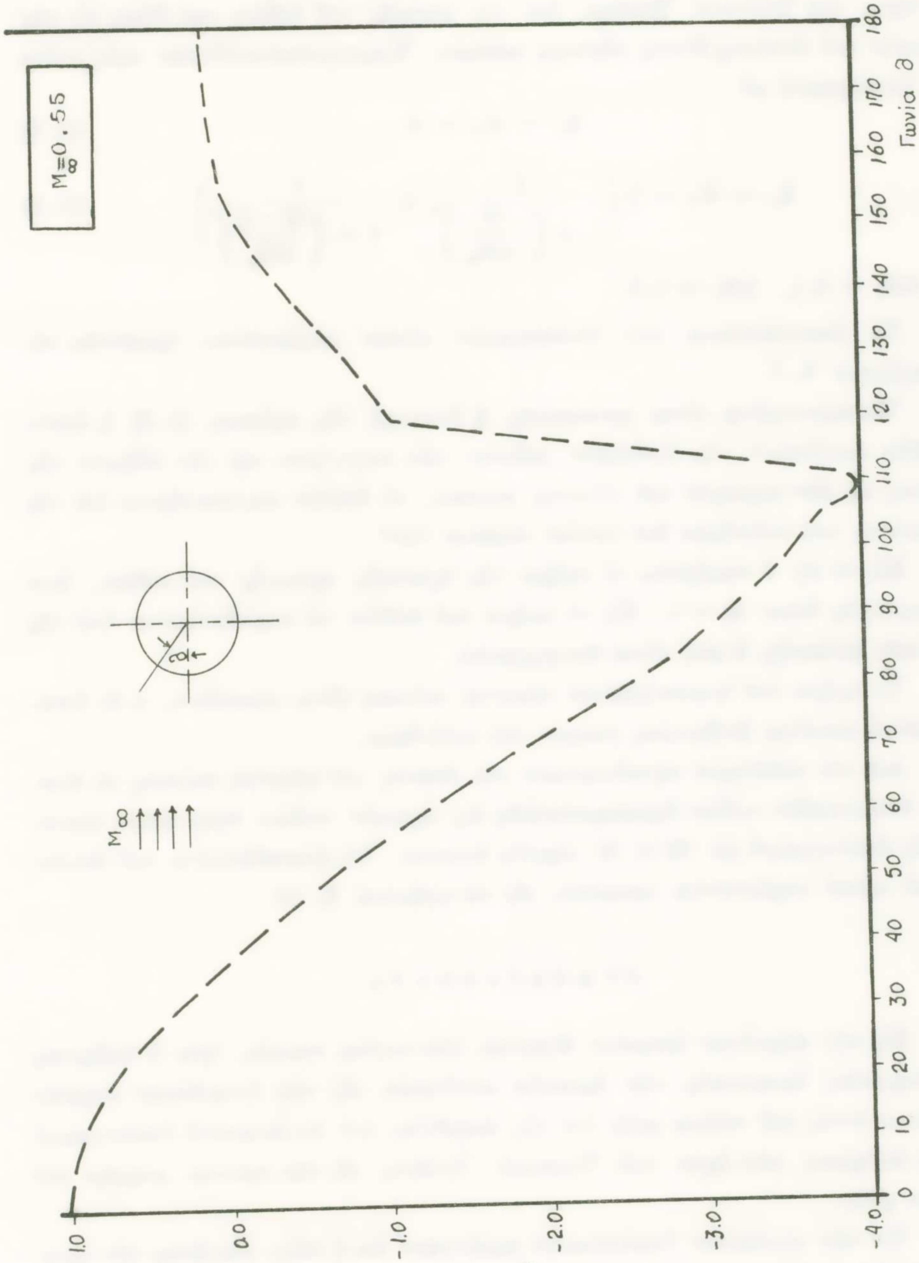
Σχ. 7. Ἡ κατανομὴ τῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ M = 0.55, (29 × 39 σημεῖα).



Σχ. 8. Ἡ θέσις τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς καὶ τοῦ κύματος πιέσεως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ $M = 0.55$, $(29 \times 39$ σημεῖα).



Σχ. 9. Ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ $M = 0.55$, (29×75 σημεῖα).



Σχ. 10. Ἡ κατανομὴ τῶν πιέσεων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ M = 0.55, (29 × 75 σημεῖα).

Ὁ κύριος σκοπὸς τοῦ ἐν λόγῳ ὑπολογισμοῦ ἦτο ἡ ἐξέτασις τῆς ἐπιρροῆς τῶν ὅρων τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους ἐπὶ τῆς μορφῆς τοῦ πεδίου καὶ ἰδίως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ἀναπτυχθέντος κύματος πιέσεως. Ἐπραγματοποιήθησαν πρὸς τοῦτο δύο ὑπολογισμοὶ μὲ

$$K_r = K_\vartheta = 2 \tag{5.1}$$

καὶ

$$K_r = K_\vartheta = 2\left[\frac{1}{1+\left(\frac{M}{\Delta M_0}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{M-1}{\Delta M_1}\right)^2}\right] \tag{5.2}$$

μὲ $\Delta M_0 = 0.1$, $\Delta M_1 = 0.3$.

Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν αὐτῶν παρίστανται γραφικῶς εἰς τὰ σχήματα 6, 7.

Ἐν προκειμένῳ εἶναι καταφανὴς ἡ ὑπεροχὴ τῆς σχέσεως (5. 2) ἡ ὁποία ἀποδίδει πιστότερον τὴν ἀπότομον μείωσιν τῶν ταχυτήτων καὶ τὴν αὔξησιν τῆς πιέσεως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ κύματος πιέσεως, τὸ ὁποῖον παρουσιάζεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου διὰ γωνίαν περίπου 115^0.

Εἰς τὸ σχ. 8 παρέχεται τὸ σχῆμα τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου, ἤτοι τῆς γραμμῆς ὅπου $M = 1$. Εἰς τὸ τμῆμα τοῦ πεδίου τὸ περικλειόμενον ὑπὸ τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς, ἡ ροὴ εἶναι ὑπερηχητική.

Τὸ σχῆμα τοῦ ἐμφανιζομένου κύματος πιέσεως εἶναι καμπύλον, ἡ δὲ ἔντασις αὐτοῦ μειοῦται βαθμιαίως μακρὰν τοῦ κυλίνδρου.

Διὰ τὸν καλύτερον προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ κύματος πιέσεως τὸ ἀνωτέρω ὑπολογισθὲν πεδίον ἐχρησιμοποιήθη ὡς ἀρχικὸν πεδίον ἑνὸς πλέον λεπτομεροῦς ὑπολογισμοῦ μὲ 29×75 σημεῖα δικτύου. Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ παρίστανται γραφικῶς εἰς τὰ σχήματα 9, 10.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θίγονται δύο κυρίως σημεῖα, ἤτοι ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀκριβείας ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν στερεῶν σωμάτων ἐντὸς τοῦ πεδίου ροῆς ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ καὶ ἡ ἐπίδρασις τῶν ὅρων τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους εἰς τὴν τελικὴν μορφὴν τοῦ πεδίου ροῆς.

Ἐκ τῶν γενομένων ὑπολογισμῶν προέκυψεν ὅτι ἡ τάξις ἀκριβείας τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπηρεάζει ἰδιαιτέρως τὴν ἀκρίβειαν τοῦ ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἰδίᾳ διὰ σώματα μὲ ἀκτῖνας καμπυλότητος τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν μῆκός των. Ἰδιαιτέρως, ἡ ἐφαρμογὴ τῆς Ἀρχῆς τῆς Ἀνακλάσεως πρέπει νὰ περιορίζεται μόνον εἰς σώματα ἐπίπεδα ἢ ἔχοντα ἀκτῖνα καμπυλότητος πολὺ μεγαλυτέραν τοῦ χαρακτηριστικοῦ μήκους των, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (3.4), (3.5), (3.10), διὰ $r = \infty$.

Αἱ εὑρεθεῖσαι σχέσεις (3.4), (3.5), (3.10) εἶναι δυνατὸν νὰ γενικευθοῦν διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τυχόντος τρισδιαστάτου σώματος (Sparis, 1973).

Ὁμοίως ἡ γενομένη διερεύνησις ἀπέδειξεν ὅτι ἡ ἐπίδρασις τῶν ὅρων τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους ἐπὶ τῆς τελικῆς μορφῆς τοῦ πεδίου ροῆς, ἰδίᾳ εἰς περιοχὰς μὲ κύματα πιέσεως, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπερβολική, ἀλλοιώνουσα σημαντικῶς τὴν δομὴν τοῦ πεδίου. Τὸ πεδίον ροῆς βελτιώνεται σημαντικῶς, ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἰξώδους Κ ληφθῇ ἐκ τῆς σχέσεως (5.2), ὁπότε ἡ δρᾶσις τοῦ ἰξώδους περιορίζεται μόνον εἰς τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς καὶ ἐπὶ τῆς ἠχητικῆς γραμμῆς. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ συντονισμένου συντελεστοῦ ἰξώδους Κ ἀποτελεῖ σημαντικὴν βελτίωσιν τῆς ἀρχικῆς μεθόδου τοῦ Lax, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δρᾶσις τοῦ Τεχνικοῦ Ἰξώδους ἐπεκτείνετο εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς τοῦ πεδίου ροῆς, ὅπου αἱ ἰδιότητες τοῦ ρευστοῦ μετεβάλλοντο ἀποτόμως.

ABSTRACT

The equations of the two dimensional inviscid compressible flow in polar coordinates, are solved numerically using the Mc Cormack difference scheme, for the field around a circular cylinder in uniform subsonic and transonic flow. A new method is introduced for the application of the boundary conditions on the cylinder surface, and the results are compared with the results of the Reflection Principle. Also, a new form of the artificial viscosity terms is used providing significantly improved results.

REFERENCES

I. Imai, «On the Flow of a Compressible Fluid Past a Circular Cylinder», II, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan,* Vol. 13 (1941), p. 181.

R. W. Mc Cormack and A. J. Paullay, *AIAA Paper* No. 72-154 (1972).

J. Von Neumann and R. Richtmeyer, *J. Appl. Phys.,* 21, 3, p. 232 (1951).

P. D. Lax and B. Wendroff, *Comm. Pure Appl. Math.,* Vol. 17, p. 381 (1964).

C. P. Sparis, «A Computational Study of the Three Dimensional Flow in a Single Stage Transonic Compressor». Ph. D. Thesis Mass. Inst. of Techn. (1973).

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Περικλῆς Σ. Θεοχάρης,** παρουσιάζων τὴν ἀνωτέρω ἀνακοίνωσιν εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ ἀνακοινώσω εἰς τὴν Ὁλομέλειαν τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν μελέτην τοῦ κ. Παναγιώτη Σπάρη, ἐπιστημονικοῦ συνεργάτου τῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς τοῦ Δημοκριτείου Πανεπιστημίου Θράκης ὑπὸ τὸν τίτλον «Ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς τοῦ πεδίου ροῆς πέριξ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἐντὸς ὁμοιομόρφου διηχητικῆς ροῆς».

Εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφορῶν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τοῦ κυλίνδρου κυκλικῆς διατομῆς ἐντὸς ὁμοιομόρφου ροῆς ἀτριβοῦς συμπιεστοῦ ρευστοῦ. Ἐξετάζονται δύο περιπτώσεις, τῆς ὑποηχητικῆς (ἀριθμὸς Mach=0.35) καὶ τῆς διηχητικῆς (ἀριθμὸς Mach=0.55) ροῆς. Τὸ πρόβλημα τῆς ὑποηχητικῆς ροῆς ἐξετάζεται ἐν ἀρχῇ διὰ χρησιμοποιήσεως διαφόρων μεθόδων ἐφαρμογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν, ἡ βελτίωση τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖται ἐν συνεχείᾳ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ διηχητικοῦ προβλήματος. Ἐνῷ διὰ τὸ ὑποηχητικὸν πρόβλημα ὑφίσταται ἀναλυτικὴ λύσις, διὰ τὸ διηχητικὸν πρόβλημα δὲν ὑφίσταται τοιαύτη λόγῳ μὴ γραμμικότητος τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος τούτου. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος χρησιμοποιοῦνται αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις ποὺ ἐκφράζουν τοὺς φυσικοὺς νόμους ροῆς ὁμοῦ μετὰ τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν. Ἰδιαιτέρως ἐξετάζεται ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν λαμβανομένων ὅρων ἀναπτύγματος σειρᾶς διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῶν ἀποτελεσμάτων.

Ἐκ τῆς ὅλης ἐργασίας δεικνύεται ἡ σημασία τοῦ λαμβανομένου ἀριθμοῦ ὅρων διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῶν ἀποτελεσμάτων ἰδίᾳ διὰ σώματα μὲ ἀκτῖνας καμπυλότητος τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν μῆκος των. Συνάγεται ὡσαύτως ὅτι ἡ ἐπίδρασις τῶν ὅρων τοῦ ἰξώδους ἐπὶ τῆς τελικῆς μορφῆς τοῦ πεδίου ροῆς ἰδίᾳ εἰς περιοχὰς μὲ κύματα πιέσεως δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπερβολική, ἀλλοιοῦσα σημαντικῶς τὴν δομὴν τοῦ πεδίου.