Après ces grands travaux d'assainissement et de progrès agraire des espèces d'anophèles non dangereuses sont venu peupler les gites existants encore et c'est à cause de ce changement que le paludisme continue à ne pas réapparaitre, mais les espèces dangereuses n'ont pas totalement disparues de certaines régions. On dit que ce sont des espèces ayant acquis une résistance aux insecticides ou qui ont changé de moeurs. Le problème de la réapparition possible du paludisme ne sera résolu que par l'étude des fonctions biologiques des anophèles existant à l'heure actuelle suivant le plan établi par nous et en comparaison avec les espères qu'on avait avant les nouveaux insecticides; ces recherches sont indispensables jusq'au jour heureux ou sera achevé tout le programme des travaux d'assainissement définitif du Pays.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Ἡ μηχανικὴ τῶν ν σωμάτων ἐν τῇ Γενικῇ θεωρίᾳ τῆς Σχετικότητος, *ὑπὸ* ***Θεοδ. Χρ. Σιώκου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1) Εἰς προηγουμένην μελέτην μου[1] ἀναφέρεται ὅτι τὸ πεδίον βαρύτητος ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς Γεωμετρίας (1) διὰ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος

$$g^{A}_{11}\, dx^{1\,2}_{A} + g_{22}\, dx^{2\,2}_{A} + g_{33}\, dx^{3\,2}_{A} + g_{44}\, dx^{4\,2}_{A} = -\, c^2 d\tau^2 \qquad (1)$$

ἔνθα

$$x_A{}^1 = r_A\,,\ x_A{}^2 = \Theta = \frac{\pi}{2}\,,\ x_A{}^3 = \Phi_A\,,\ x_A{}^4 = ict_A$$

$$g^A{}_{44} = g_A{}^{11} = 1 - \frac{2GM\alpha}{c^2 r}\,,\ g_{22} = r^2\,,\ g_{33} = r^2 \eta\mu^2\Theta \qquad (1\alpha)$$

r = ἡ ἀπόστασις τοῦ Β ἐκ τοῦ κέντρου μάζης τῆς Μα,
Β (Μβ) ὑφισταμένου τὴν ἐπήρειαν τοῦ πεδίου τῆς Μα καὶ τοῦ παρατηρητοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ κέντρον μάζης τῆς Μα.

2) Πράγματι ἡ (1) ἀκολουθεῖ τὰς ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς: Ἀρχὴν Δράσεως-Ἀντιδράσεως τῆς δρώσης ἀντισυναλλοιωτικῆς δυνάμεως ἢ τὸ αὐτὸ τὴν ἀρχὴν τῆς Διατηρήσεως τῶν ποσοτήτων κινήσεως (ἀντισυναλλοιωτικῶν) τῆς Κλασσικῆς Μηχα-

---

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Ἡ «Μηχανικὴ τῆς ΓΘΣ καὶ τὸ Παράδοξον Ὡρολόγιον». (Μελέτη κατατεθεῖσα ἐν χειρογράφῳ εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν τῇ 14 Ἰαν. 1960· βλ. ἀν., σ. 104).

νικῆς καὶ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῶν ἀδρανῶν ποσοτήτων κινήσεως - ἐνεργείας (συναλλοιωτικῶν μεγεθῶν).

α) Οὕτω ἔχομεν διὰ τὰς ἀντισυναλλοιωτικὰς δυνάμεις (2) τὴν κατωτέρω

$$\frac{dD^1{}_B}{d\tau} = -\Gamma^1{}_{11} D^2{}_B U^1{}_{OB} - \Gamma^1{}_{33} D^3{}_B U^3{}_{OB} - \Gamma^1{}_{44} D^4{}_B U^4{}_{OB} = -\frac{1}{2}\dot{g}^A{}_{44} M_B c^2 + $$
$$+ \left(M_B r - \frac{3GM_AM_B}{c^2}\right) W^2{}_B \tag{2}$$

$$\frac{dD^1{}_A}{d\tau} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{44}{}^B M_A c^2 + \left(M_A r - \frac{3GM_AM_B}{c^2}\right) W^2{}_A,\ D^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = MU_0{}^\mu,\ W = \frac{d\Phi}{d\tau}$$

σχέσιν ἰσότητός * των (3), ἀφοῦ ὅταν γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν (2) εἰς

$$\left(-\frac{3GM_AM_B}{c^2} + M_A r\right) W^2{}_A = \left(-\frac{3GM_AM_B}{c^2} + M_B r\right) W^2{}_B \tag{3}$$

τὸ κέντρον βάρους τῶν Μα, Μβ (4) ὑφίσταται ἡ ἰσότης (3)

$$M_A r_A = M_B r_B,\quad r = r_A + r_B,\quad W^2{}_B = \frac{M_A}{M_A + M_B} W^2 = \frac{M_A}{M} W^2 = \frac{M_A}{M_B} W^2{}_A \tag{4}$$

ἔνθα rα, rβ αἱ ἀποστάσεις τῶν Μα, Μβ ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους.

β) Ἡ ἀρχὴ ἐξ ἄλλου τῆς διατηρήσεως τῶν ἀδρανῶν ποσοτήτων κινήσεως - ἐνεργείας ἐπιβεβαιοῦται ὑπὸ τῆς (5).

$$\frac{dD_1}{d\tau} = \Gamma^1{}_{11} D_1 U_0{}^1 + \Gamma_{13}{}^3 D_3 U_0{}^3 + \Gamma^4{}_{14} D_4 U_0{}^4 \neq 0 \tag{5α}$$

$$\frac{dD_3}{d\tau} = \Gamma_{31}{}^3 D_3 U_0{}^1 + \Gamma_{33}{}^1 D^1 U_0{}^3 = 0 \tag{5β}$$

$$\frac{dD_4}{d\tau} = \Gamma_{41}{}^4 D_4 U_0{}^1 + \Gamma_{44}{}^1 D_1 U_0{}^4 = 0 \tag{5γ}$$

Ἡ σταθερότης τῆς D_1 ἐπιτυγχάνεται λόγῳ τῆς Δυνάμεως τοῦ D'Alembert [1] (σκοπιμώτερον εἶναι νὰ καλοῦμεν τὴν D_1 δρῶσαν συναλλοιωτικὴν ποσότητα κινήσεως).

2) Σημειωτέον ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουσι καὶ διὰ τὴν πλήρη ἐξωτερικὴν λύσιν τοῦ Schwarzschild (1β), ἥτις τίθεται, ἵνα τὸ σύμπαν ἔχῃ περιωρισμένην ἐνέργειαν [2].

$$g_{44}{}^A = g^{11}{}_A = 1 - \frac{2GM_A}{c^2 r} - \frac{GM_A}{c^2 \alpha^3} r^2 \tag{1β}$$

α = ἡ ἀκτὶς ἔνθα τὸ πεδίον τῆς Γεωμετρίας τοῦ Niemann μηδενίζεται καὶ ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι μεγίστη.

3) Σημειοῦται ἐνταῦθα ὅτι εἰς τὴν Νευτώνιον Μηχανικὴν ἡ σταθερὰ ταχύτης κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους τῶν μαζῶν Μα, Μβ δὲν ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς Δυνάμεως τοῦ πεδίου βαρύτητος.

---

* Παραλειπομένης τῆς μεταθέσεως τοῦ περιηλίου. Βλ. Προσθήκην, σ. 117.

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Ἔνθ' ἀν.

[2] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Οἱ συμμετρικοὶ τανυσταὶ τῶν Einstein καὶ Maxwell. (Μελέτη κατατεθεῖσα ἐν χειρογράφῳ εἰς τὸ Ἀρχεῖον τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν τῇ 14 - 1 - 1960· βλ. ἀνωτ., σ. 104).

Εἰς τὴν ΓΘΣ* τοὐναντίον ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου βάρους ἐπιδρᾷ ἐπὶ τῆς πραγματικῆς Δυνάμεως τοῦ πεδίου βαρύτητος: τῆς συναλλοιωτικῆς Δυνάμεως. Πράγματι, ἐνῷ αἱ ἀντισυναλλοιωτικαὶ δυνάμεις (2) διὰ χῶρον X^1, X^4 δίδουσι

$$\frac{dD^1{}_A}{d\tau} - \frac{dD^1{}_B}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left(\dot{g}^B{}_{44}\, M_A c^2 - \dot{g}^A{}_{44}\, M_B c^2\right) = 0 \qquad (2\alpha)$$

ἤτοι $\quad D^1{}_A - D^1{}_B \quad = \quad \sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\rho\grave{o}\nu = k$

ἡ συναλλοιωτικὴ δύναμις (ἡ καὶ πραγματικὴ δύναμις)[1] (5α) δίδει δύναμιν συνάρτησιν τῆς ταχύτητος $U^1{}_0$, ἀφοῦ ἡ D_4 εἶναι σταθερὰ (καὶ συνάρτησις τῆς k).

$$2\frac{dD_1{}^B}{d\tau} = \dot{g}^A{}_{11} D^1{}_B U^1{}_{OB} + \dot{g}^A{}_{44} D^4{}_B U^4{}_{OB} = \dot{g}^A{}_{11} D^1{}_B U^1{}_{OB} + g_{11}{}^{A^2}\, \dot{g}_{44}{}^A D_{4B} U_{04} =$$

$$= -\dot{g}_{44}{}^A\, g_{11}{}^{A^2} \frac{D_B'^{\,2}}{M_B} + g_{11}{}^{A^2}\, \dot{g}^A{}_{44} \frac{D_4{}^{B^2}}{M_B} \mp 2\,\frac{dD_1{}^A}{d\tau} \qquad (5\alpha\alpha)$$

Δηλαδὴ τὸ μέγεθος τῆς συναλλοιωτικῆς δυνάμεως μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς σταθερᾶς εἰς τὴν (2α), ἥτις δεικνύει τὴν σταθερὰν ἀντισυναλλοιωτικὴν ποσότητα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους.

II. ΑΝΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ.

Λόγῳ τῆς ἰδιότητος τοῦ κέντρου βάρους νὰ ἔχῃ σταθερὰν ταχύτητα κατὰ τὴν κίνησιν τῶν Α, Β, δέον νὰ ἐξετασθῇ μήπως ἡ ἀναγωγὴ τῶν συντεταγμένων τῆς (1) εἰς τὸ κέντρον βάρους (4) (3) δίδει πάλιν Γεωμετρίαν τοῦ Riemann, ἀκολουθοῦσαν τὰς Ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς καὶ ἐν ταὐτῷ νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ μέγεθος δυνάμεως (Συναλλοιωτικῆς καὶ μή).

1) Τοῦτο συμβαίνει πράγματι, διότι ἡ (1) λόγῳ τῶν μετασχηματισμῶν (3), (4) γίνεται

$$g_{11}\, dr^2{}_B + \frac{M^2}{M^2{}_A}\, r^2{}_B A_B d\varphi^2{}_0 + g_{44}\, dx_B{}^{4^2} = -c^2 d\iota^2 \qquad (6)$$

ἔνθα

$$g^{11}{}_A \frac{M^2}{M^2{}_A} = g_{44}{}^A = 1 - \frac{2GM^2{}_A}{c^2 M r_B}, \quad g_{44} g_{11} = \frac{M^2}{M^2{}_A} = \frac{(M_A + M_B)^2}{M^2{}_B} \qquad (7)$$

$$dx^4 = icdt, \quad \frac{d\varphi_B}{d\tau} = W_B, \quad \frac{d\varphi_o}{d\tau} = W \qquad (7\alpha)$$

$$A_B = \frac{W^2{}_B}{W^2} = \frac{W^2{}_B}{W^2{}_B} \cdot \frac{M_A}{M} = \frac{M_A}{M} \qquad (8)$$

$$M_A r_A = M_B r_B, \qquad r = r_A + r_B$$

r_B = ἡ ἀπόστασις τοῦ σώματος ἐκ τοῦ κέντρου βάρους τῶν Μα, Μβ

W = ἡ κοινὴ γωνιακὴ ταχύτης τῶν Μα Μβ πέριξ τοῦ κέντρου βάρους τῶν Μα, Μβ.

---

* ΓΘΣ = Γενικὴ θεωρία τῆς σχετικότητος.

[1] Βλ. ἀνωτ., σ. 111 σημ. 2.

Οὕτω ἡ (6) γράφεται ὡς ἡ (6α) καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην θὰ γίνωσιν

$$g_{11}\, dr^2_B + \frac{M}{M_A} r^2_B d\varphi^2{}_o + g_{44}\, dx_B{}^{4^2} = - c^2 d\tau^2 \qquad (6\alpha)$$

αἱ περαιτέρω ἐφαρμογαί.

2) Ἀλλὰ ἡ (6α) δίδει τὰς κάτωθι δυνάμεις.

α) Ἡ δρῶσα συναλλοιωτικὴ δύναμις εἶναι τοῦ μεγέθους (9)

$$\frac{dD_1{}^B}{d\tau} = \Gamma^1{}_{11} D_1{}^B + \Gamma^3{}_B D_3{}^B U^3{}_{OB} + \Gamma_{14}{}^4 D_4{}^B U^4{}_{OB} - \frac{GM^2{}_A}{Mr^2{}_B} M_{\sigma B} + \frac{M}{M_A} r^2{}_B W^2 M_{\sigma B} =$$

$$= - \frac{GM_A M_B}{(r_A + r_B)^2} + M_B r_B W^2 = - \frac{GM_A M_B}{r^2} + M_B r W^2{}_B, \quad U_O \ll c \qquad (9)$$

ὅταν ἡ ἰσοδύναμος μᾶζα Μσ εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν τῆς κλασσικῆς Μηχανικῆς

$$M_{\sigma_B} = \frac{M_A M_B}{M} = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \equiv \text{ἰσοδύναμος συναλλοιωτικὴ μᾶζα} \qquad (10)$$

Δηλαδὴ δίδει τὸ αὐτὸ μέγεθος συναλλοιωτικῆς δυνάμεως πρὸς τὸ τῆς Γεωμετρίας (1).

β) Αἱ δρῶσαι ἀντισυναλλοιωτικαὶ δυνάμεις ἐξ ἄλλου δίδουσι τὰ αὐτὰ μεγέθη

$$\frac{dD'_B}{d\tau} = - \frac{1}{2} \frac{M^2{}_A}{M^2} \dot{g}^A{}_{44} M_{\alpha B} C^2 + \frac{M_A}{M} r_B W^2 M_{\alpha B} - \frac{3GM^2{}_A}{c^2 r_B M} r_B W^2 M_{\alpha B} =$$

$$= - \frac{GM_A M_B}{r^2} + \left(1 - \frac{3GM_A}{c^2 r}\right) M_B r W^2{}_B \qquad (12)$$

ἐὰν ἡ ἰσοδύναμος μᾶζα Μα ληφθῇ ὡς ἡ (12)

$$M_{\alpha B} = \frac{M M_B}{M_A} \equiv \text{ἰσοδύναμος ἀντισυναλλοιωτικὴ μᾶζα (12).}$$

Δηλαδὴ ἔχομεν πάλιν τὴν θεωρίαν περὶ κέντρου βάρους (*) ἀλλὰ μὲ ἰσοδύναμον μᾶζαν τὴν (12). Τοῦτο δὲ δεικνύει, καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, ὅτι ἡ πραγματικὴ δύναμις (3) εἶναι ἡ συναλλοιωτική, ἐνῷ ἡ ἀντισυναλλοιωτικὴ δύναμις δίδει τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῶν ποσοτήτων κινήσεως τῆς κλασσικῆς Μηχανικῆς, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἔχομεν σημειώσει [1].

3) Αἱ προηγούμεναι σχέσεις τῶν μετρικῶν τανυστῶν καὶ ἰσοδυνάμων μαζῶν δύνανται νὰ γραφῶσι γενικοποιούμεναι ὡς αἱ (13).

$$M_A = (M - M_B) = \overline{M} \qquad M = M_A + M_B$$

$$M_{\alpha B} = \frac{M M_B}{M_A} = \frac{M M_B}{\overline{M}} \qquad M_{\sigma B} = \frac{M_B M_A}{M} = \frac{M_B \overline{M}}{M} \qquad (13)$$

4) Οὕτω ἡ ἀνάλυσις αὕτη δίδει, ὅτι ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς Γεωμετρίας (1) πληροῖ τὰς ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς τῆς ΓΘΣ. Συνεπῶς τὸ πρόβλημα

---

* Ὅταν παραληφθῇ ἡ μετάθεσις τοῦ περιηλίου, ἔχομεν καὶ ἰσότητα δυνάμεων.

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Γεωμετρικοποίησις τῆς Φυσικῆς καὶ Φυσικοποίησις τῆς Γεωμετρίας, Τεχν. Χρον. Ἑλλ., τεῦχος ἀρ. 419 - 420.

τῆς κινήσεως τῶν μαζῶν Μα, Μβ πρὸς ἀλλήλας δύναται νὰ λυθῇ μέσῳ τῆς Γεωμετρίας (6) ἀφορώσης ἑκάστην μᾶζαν ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους, μέσῳ δὲ τοῦ ἀπολύτου χρόνου τ ἐπιτυγχάνεται ὁ συσχετισμὸς τῶν κινήσεων τῶν δύο τούτων μαζῶν ὡς καὶ εἰς προηγουμένην μελέτην εἴχομεν σημειώσει [1].

III. Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ V ΣΩΜΑΤΩΝ

1) Ἐφ' ὅσον ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὸ κέντρον βάρους τῶν μαζῶν Μα Μβ δημιουργεῖ Γεωμετρίαν πληροῦσαν τὰς Ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς, ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα τῶν ν σωμάτων ἐν τῇ Γενικῇ Θεωρίᾳ τῆς Σχετικότητος (ΓΘΣ) δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν τοῦ κάτωθι θεωρήματος:

Ἐὰν ἔχωμεν τὰς μάζας, M_A M_B.... M_ν, ἡ κίνησις τῆς μάζης M_B ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς Γεωμετρίας (6α) εἰς ἣν ὡς μᾶζα $\overline{M}$ θὰ ληφθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων μαζῶν συγκεντρωμένων εἰς τὸ κέντρον βάρους των.

Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὰς σχέσεις (14), τότε τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδεικνύεται ὡς ὀρθόν.

$$M = M_A + M_B + M_\Gamma + \dots + M_\nu$$

$$\overline{M} = M - M_B$$

$$M_{\sigma B} = \text{ἰσοδύναμος συναλλοιωτικὴ μᾶζα} = \frac{M_B \overline{M}}{M} \tag{14}$$

$$M_{\alpha B} = \quad \text{»} \quad \text{ἀντι} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = \frac{M\, M_B}{\overline{M}}$$

$$M_A \overline{r}_A + M_B \overline{r}_B + M_\Gamma \overline{r}_\Gamma + \dots M_\nu \overline{r}_\nu = 0 = M r$$

$$\overline{M}\, \overline{r} = M r - M_B \overline{r}_B = M_A \overline{r}_A + M_\Gamma \overline{r}_\Gamma + \dots M_\nu \overline{r}_\nu$$

Ἔνθα r_A, r_B αἱ ἀποστάσεις τῶν μαζῶν Μα Μβ ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τῶν Μν.

α) Ἰσχύει ἡ ἀρχὴ διατηρήσεως τῶν ποσοτήτων κινήσεων - ἐνεργείας. Εἰδικώτερον ἡ συναλλοιωτικὴ δύναμις εἶναι ἡ (15).

$$\frac{dD_1{}^B}{d\tau} \cong \frac{\dot{\overline{g}}_{44}}{2} D^4{}_B U^4{}_{0B} + \frac{M}{\overline{M}} r_B W^2{}_B M_{\sigma B} \cong - \frac{G \overline{M}\, M_B \overline{M}^2}{r^2{}_B M^2} + \frac{\overline{M}\, M\, M_B}{M\, \overline{M}} r_B W^2 \tag{15}$$

$$D_\mu = \text{σταθερόν}, \quad \mu = 2, 3, 4, \quad U^4{}_0 \cong ic$$

β) Αἱ ἀντισυναλλοιωτικαὶ δυνάμεις ἐξισοῦνται (παραλειπομένης τῆς μεταθέσεως τοῦ περιηλίου)

$$\frac{dD^1{}_B}{d\tau} = - \frac{\overline{M}^2}{M^2} G \frac{\overline{M}^2}{M} \frac{M\, M_B}{\overline{M}\, r^2{}_B} + \frac{\overline{M}}{M} \frac{M\, M_B}{\overline{M}} r_B W^2 = - \frac{\overline{M}^2}{M} G \frac{\overline{M}\, M_B}{r^2{}_B} + M_B r_B W^2$$

$$W^2\alpha = W^2\beta = W^2 \tag{16}$$

[1] Βλ. ἀνωτ., σ. 110 σημ. 1.

$$\frac{dD^1_A}{d\tau} \cong -\frac{M_B^2}{M^2} G \frac{M_B^2}{M} \frac{M \bar{M}}{M_B \bar{r}^2} + \frac{M_B}{M} \frac{M \bar{M}}{M_B} r_B W^2 = -\frac{M_B}{M} G \frac{\bar{M} M_B}{\bar{r}^2} + \bar{M} \bar{r} W^2$$

ἤτοι ἔχομεν τὰς σχέσεις κέντρου βάρους (17), ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τὸ σημεῖον

$$\bar{M} \bar{r} = M_B r_B \qquad M_B^2 r_B^2 = \bar{M}^2 \bar{r}^2, \quad W_B^2 = \frac{\bar{M}}{M} W_\beta^2, \; \bar{W}^2 = \frac{M_B}{M} W_\alpha^2 \tag{17}$$

τῆς ἀποστάσεως τῆς $\bar{r}$, $\bar{r}_B$ καὶ ὅτι ἡ σταθερὰ ταχύτης τοῦ κέντρου βάρους εἶναι μηδενική.

Ἔνθα W ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς μάζης Mβ καὶ τῆς ὑπολοίπου μάζης (M − Mβ) ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρος τοῦ συστήματος Mν.

2) Οὕτω τὸ πρόβλημα τῶν ν σωμάτων ἐν τῇ ΓΘΣ λαμβάνει πλέον ἁπλῆν μορφὴν τοῦ ὁμοίου προβλήματος ἐν τῇ Νευτωνίῳ Μηχανικῇ, καθ' ὅσον ἑκάστη Γεωμετρίᾳ (6α) διὰ τὴν μᾶζαν Mβ περιέχει ὅλας τὰς ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς καὶ ὅλα τὰ ἀπαιτούμενα στοιχεῖα πρὸς εὕρεσιν τῆς κινήσεώς της πρὸς τὸ κέντρον βάρους.

Δηλαδὴ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις (18) ἐκ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν Γεωμετριῶν (6) καὶ ἐκ τῶν ἀπολύτων διαφορίσεων (15) (16)

$$\bar{x}^2 = x^2 = \frac{\pi}{2}, \quad f(x^\mu) = \tau. \qquad \mu = 1, 2, 3,$$

$$\frac{d\bar{x}^3}{d\tau} = \frac{dx^3}{d\tau} = w, \quad f(\bar{x}^\mu) = \tau. \qquad \mu = 1, 2, 3 \ldots . \nu \tag{18}$$

Αἱ ἐξισώσεις (18) μετὰ τῶν ἐξισώσεων τοῦ κέντρου βάρους (14) καὶ τῶν συνθηκῶν (σταθερῶν) τοῦ προβλήματος παρέχουσι ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως τῶν μαζῶν Mν πρὸς τὸ κέντρον βάρους ἢ πρὸς ἀλλήλας.

Σημειωτέον ὅτι ἐνῷ ἑκάστη μᾶζα Mν μετὰ τῆς ὑπολοίπου μάζης (M − Mν) κινεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους τῶν M, αἱ ὑπόλοιπαι μᾶζαι ἐν σχέσει πρὸς τὸ κέντρον βάρους των δύνανται νὰ κινῶνται ἐπὶ διαφόρων ἐπιπέδων.

3) Ἐνταῦθα δέον νὰ σημειώσωμεν τὴν κατωτέρω βασικὴν παρατήρησιν. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς παραδοχῆς περὶ κέντρου βάρους εἶναι δυνατὴ ὅπου *φυσικῶς* αὕτη εἶναι δυνατή, λόγῳ τῆς ἑλκτικῆς δράσεως τῶν μαζῶν, ἥτις προκαλεῖ ἐπιφανείας μηδενισμοῦ τῶν πεδίων δυνάμεων.

Παραθέτομεν τὰ κάτωθι παραδείγματα πρὸς ἐπεξήγησιν τοῦ ἀνωτέρω.

α) *Περίπτωσις τριῶν Σωμάτων Ἡλίου - Γῆς - Σελήνης.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντικαθίστανται αἱ μᾶζαι τῆς Γῆς - Σελήνης ὑπὸ τοῦ κέντρου βάρους των καὶ οὕτω προσδιορίζεται ἡ κίνησις τοῦ Ἡλίου καὶ τοῦ κέντρου βάρους Γῆς - Σελήνης ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ Συστήματος. Ἡ κίνησις τῆς Σελήνης πρὸς τὴν Γῆν ἐκφράζεται ἀνεξαρτήτως τῆς ἐπιδράσεως τοῦ Ἡλίου, ἥτις ἐπίδρασις ἐκδηλοῦται εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῶν κατὰ τὰ προηγούμενα.

Συνεπῶς ἡ κίνησις τῆς Σελήνης ἢ τῆς Γῆς ἐν σχέσει πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ συνισταμένου ἀποτελέσματος τῆς κινήσεως κέντρου βάρους Γῆς - Σελήνης καὶ Γῆς ἢ Σελήνης πρὸς τὸ κέντρον βάρους των.

β) *Περίπτωσις τριῶν Σωμάτων. Γῆς - Βολίδος - Σελήνης.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, κατὰ μὲν μίαν περίοδον θὰ ὑφίσταται ἡ ἀντικατάστασις τῶν μαζῶν Γῆς - Βολίδος ὑπὸ τοῦ κέντρου βάρους των σχετικῶς πρὸς τὴν Σελήνην, κατὰ δὲ ἄλλην περίπτωσιν, ὅταν ἡ βολὶς ὑποστῇ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου τῆς Σελήνης, θὰ ὑφίσταται ἡ ἀντικατάστασις τῶν μαζῶν Σελήνης - Βολίδος ἐν σχέσει πρὸς τὴν Γῆν.

γ) *Περίπτωσις Ἡλίου καὶ Πλανητῶν.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἕκαστος πλανήτης δύναται νὰ ἐξετάζηται ἐν σχέσει πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ Ἡλίου καὶ τῶν ὑπολοίπων πλανητῶν τῶν ἐσωτερικῶν ὅμως τροχιῶν, ὡς ἐὰν ἀκολουθῆται ἡ θεωρία τοῦ Νευτωνείου Δυναμικοῦ [1], τῶν τροχιῶν θεωρουμένων ὅτι ἀντιπροσωπεύουσιν ἰσοδυνάμους ὑλικὰς ἐπιφανείας.

4) Ἡ παροῦσα θεωρία σκοπὸν δὲν ἔχει νὰ λύσῃ τὸ ἀστρονομικὸν πρόβλημα τῶν ν σωμάτων, ἀλλὰ νὰ δείξῃ ἕνα Γενικὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεως αὐτοῦ ἐν τῇ ΓΘΣ, ἥτις, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἔχομεν σημειώσει [2], ὑφίσταται μόνον, ἵνα ἡ ἐνέργεια τοῦ Σύμπαντος εἶναι περιωρισμένη διὰ τοῦ περιωρισμένου χώρου αὐτοῦ.

Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἡ θεωρία αὕτη ἔχει ὑπὲρ αὐτῆς ἀφ' ἑνὸς τὴν θεωρίαν περὶ κέντρου βάρους καὶ τὴν τήρησιν τῶν Ἀρχῶν τῆς Μηχανικῆς τῆς ΓΘΣ, ἀφ' ἑτέρου δὲ εὐνοεῖται αὕτη ὑπὸ τῶν Γεωμετρικοφυσικῶν ἀντιλήψεων, ἀφοῦ τὸ συνιστάμενον ἀποτέλεσμα Γεωμετριῶν τοῦ Riemman, ἀντιπροσωπευουσῶν τὸ πεδίον βαρύτητος διαφόρων μαζῶν, θὰ εἶναι πάλιν πεδίον βαρύτητος ἐκφραζόμενον ὑπὸ μιᾶς Γεωμετρίας τοῦ Riemann ἀναγομένης εἰς τὸ κέντρον βάρους, ὡς προηγουμένως παρεδέχθημεν.

Συνεπῶς δὲν ὑπολείπεται παρὰ μόνον ἡ πειραματικὴ ἐπιβεβαίωσίς της.

5) Σημειοῦται ἐνταῦθα ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ (1β) ὅτι οὗτος πάλιν ἰσχύει ἐν τῇ ἀναγωγῇ τοῦ κέντρου βάρους (ὡς εὐκόλως δείκνυται), βάσει τῆς μάζης Μβ καὶ τῶν μαζῶν $(M - M_B) = M$

$$\frac{M^2}{\overline{M}^2} g^{11}{}_B = g_{44}{}^B = 1 - \frac{2GM^2}{c^2 M r_B} - \frac{GM^2}{c^2 \overline{M} \alpha^3} r^2{}_B, \quad \Lambda = \frac{3GM^2}{c^2 M \alpha} \qquad (1\beta)$$

ἔνθα $\Lambda =$ ἡ κοσμολογικὴ σταθερά, ἀνάλογος ὅμως τῆς Μάζης $M^2 : \overline{M}$.

Δηλαδή, ἐὰν δὲν ὑφίσταται μετασχηματισμὸς μάζης εἰς φωτόνια ἢ καὶ ἀντιστρόφως, τὸ κέντρον τοῦ Σύμπαντος θὰ ἔχῃ σταθερὰν ταχύτητα. Συνεπῶς εἰς πάντα μετασχηματισμὸν μάζης ἢ καὶ ἀντιστρόφως θὰ ὑφίσταται μεταβολὴ τῆς ταχύτητος

[1] P, Appel, Traité de Mecanique rationelle, Gauthier - Viliars, 1928, CXXIX.

[2] Βλ. ἀνωτ., σ. 111 σημ. 2.

τοῦ κέντρου βάρους τοῦ Σύμπαντος περὶ οὗ ἄλλοτε θὰ πραγματευθῶμεν. Ἀλλὰ ἵνα συμβῇ τοῦτο, δέον νὰ ἀναφανῶσι Κβαντικὰ φαινόμενα, ἅτινα ἐκφράζονται, ὡς γνωστόν [1], ὑπὸ τῶν Κβαντικῶν μου Γεωμετριῶν.

IV. ΠΡΟΣΘΗΚΗ

Ἡ ἀρχὴ τῆς Δράσεως - Ἀντιδράσεως τῆς δρώσης Ἀντισυναλλοιωτικῆς Δυνάμεως τοῦ πεδίου διετυπώθη οὕτω διὰ τὸν παραλληλισμὸν πρὸς τὴν παρομοίαν Ἀρχὴν τῆς Νευτωνίου Μηχανικῆς.

Πράγματι ὑφίσταται ἡ κάτωθι διαφορὰ (β) (δ) μεταξὺ τῶν δύο τούτων Ἀρχῶν. Ἐνῷ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως ἄνευ γωνιακῆς ταχύτητος ὑφίσταται ταυτότης τῶν δύο Ἀρχῶν, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως μετὰ γωνιακῆς ταχύτητος δὲν ὑφίσταται ἀπόλυτος ἰσότης δρωσῶν Ἀντισυναλλοιωτικῶν Δυνάμεων (τοῦθ' ὅπερ καὶ προκαλεῖ τὴν μετάθεσιν τοῦ περιηλίου (δ) λόγῳ τῆς σταθερότητος τῆς γωνιακῆς ποσότητος κινήσεως) ἀλλὰ μόνον ἡ διατήρησις τῶν ποσοτήτων κινήσεων (ἀντισυναλλοιωτικῶν), ἥτις καθιστᾷ τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος νὰ κινῆται μὲ σταθερὰν ταχύτητα (β).

Ὄντως ἔχομεν ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ κέντρου βάρους

$$M_A \bar{r}_A + M_B \bar{r}_B = Mr \tag{α}$$

$$D'_A + D'_B = D'_o = \text{σταθερὰ} \tag{β}$$

ἢ
$$\frac{D}{D\tau} D'_A + \frac{D}{D\tau} D'_B = \frac{D}{D\tau} D_o = 0 \tag{γ}$$

ἢ
$$\frac{dD'_A}{d\tau} - \frac{dD'_B}{d\tau} = - \frac{3GM_A M_B}{C^2} (w^2_A - w^2_B) = 0 \tag{δ}$$

Ἡ (δ) προέρχεται ἐκ τῶν ἀπολύτων διαφορίσεων τῆς Γεωμετρίας τοῦ Riemann καὶ παριστᾷ τὴν μετάθεσιν τοῦ περιηλίου διὰ τὰς μάζας M_A, M_B ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους, ὅπερ ἔχει σταθερὰν ταχύτητα (β) ἴσην πρὸς μηδέν.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

1) Κατ' ἐπέκτασιν τῆς Γεωμετρίας τοῦ Riemann, ἀντιπροσωπευούσης τὸ πεδίον βαρύτητος δύο σωμάτων ἐν σχέσει πρὸς τὸ κέντρον βάρους των, δεχόμεθα πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς Μηχανικῆς τῶν ν σωμάτων ἐν τῇ ΓΘΣ ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις ὡρισμένων μαζῶν ὑπὸ τοῦ κέντρου βάρους των ὑπὸ τὸν ὅρον ἡ ἀντικατάστασις αὕτη νὰ εἶναι *Φυσικῶς* δυνατὴ [λόγῳ τῆς ὑπάρξεως μηδενικῆς τιμῆς Δράσεως τοῦ συνισταμένου πεδίου δυνάμεων τῶν μαζῶν] εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἐφαρμοσθῇ πάλιν ἡ Γεωμετρία τοῦ Riemann διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν δύο σωμάτων.

2) Οὕτω, ἐὰν ἔχωμεν ν σώματα μαζῶν Μα, Μβ, Μγ...... Μν, τότε ἡ κίνησις

[1] Βλ. ἀνωτ., σ. 113 σημ. 1.

μιᾶς μάζης M_B δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ Γεωμετρίας (α) τοῦ Riemann, εἰς ἣν ἡ μᾶζα ἡ προκαλοῦσα τὸ πεδίον τῆς κινήσεως τῆς μάζης M_B, εἶναι ἡ μᾶζα $\overline{M}$ τῶν ὑπολοίπων μαζῶν, συγκεντρωμένων εἰς τὸ κέντρον βάρους των.

$$g_{11}\, dr^2_B + \frac{M}{\overline{M}}\, r^2_B\, d\phi^2 + g_{44}\, dx^{4^2} = -c^2 d\tau^2 , \quad dx^4 = icdt \qquad (\alpha)$$

$$g^{11}\frac{M^2}{\overline{M}^2} = g_{44} = 1 - \frac{2G\overline{M}^2}{c^2 M r_B}$$

$$M = M_A + M_B + \ldots . M\nu$$

$$\overline{M} = M - M_B$$

$$M_A \overline{r}_A + M_B \overline{r}_B + M\Gamma \overline{r}\Gamma + \ldots M\nu \overline{r}\nu = Mr = 0$$

$$\overline{M}\, \overline{r} = M r - M_B \overline{r}_B = M_A \overline{r}_A + M\Gamma \overline{r}\Gamma + \ldots . M\nu \overline{r}\nu.$$

Συναλλοιωτικὴ ἰσοδύναμος μᾶζα $= \dfrac{\overline{M}\, M_B}{M}$

Ἀντισυναλλοιωτικὴ » » $= \dfrac{M\, M_B}{\overline{M}}$

$\overline{r}_A$ ἡ ἀπόστασις τῆς μάζης M_A ἐκ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος.

3) Ἡ Γεωμετρία (α) ἀκολουθεῖ τὰς ἀρχὰς τῆς Μηχανικῆς τῆς ΓΘΣ.

α) Ἀρχὴ Διατηρήσεως τῶν ἀδρανῶν ποσοτήτων κινήσεων - ἐνεργείας (συναλλοιωτικὰ μεγέθη) ἑκάστου σώματος.

β) Ἀρχὴ τῆς Δράσεως καὶ Ἀντιδράσεως τῶν δρωσῶν Ἀντισυναλλοιωτικῶν Δυνάμεων (μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς μεταθέσεως τοῦ περιηλίου) ἥτις δίδει τὴν Ἀρχὴν τῆς Διατηρήσεως τῶν δρωσῶν ποσοτήτων κινήσεων (Ἀντισυναλλοιωτικῶν μεγεθῶν) ὡς καὶ τὴν θεωρίαν περὶ κέντρου βάρους τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **On geometrical equivalence and on a certain group of plane curves,** *by* ***Chr. B. Glavas*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Let $f_1(a_1, b_1) = 0$, $f_2(a_2, b_2) = 0$ be the equations of one and the same plane curve in the two plane coordinate systems (a_1, b_1) and (a_2, b_2) respectively. These two equations will be equivalent if one can transform analytically one to the other. The latter depends upon the possibility to find formulae of analytic transformation between the systems (a_1, b_1) and (a_2, b_2). For example the relations $x^2 + y^2 = a^2$ and $r^2 = a^2$ are analytically equival-

* ΧΡΗΣΤ. Β. ΓΚΛΑΒΑ, Ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς ἰσοδυναμίας καὶ τινος ὁμάδος καμπυλῶν τοῦ ἐπιπέδου.