

ὑπὸ τοῦ WINKLER¹ διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐν τῷ ὕδατι διαλελυμένου ὀξυγόνου.

Προκύπτει, ὡς νομίζομεν, σαφῶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω σκέψεων, ὅτι πρὸς ἐξήγησιν τοῦ φαινομένου, τῆς ζωηρᾶς δράσεως τῶν ἀερίων ἐν τῷ γεννᾶσθαι, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν νέας ὑποθέσεις, ἀλλ' ὅτι δυνάμεθα νὰ τὸ ὑπαγάγωμεν εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν συνήθων ἀντιδράσεων.

NOTE. — L'auteur, partant des considérations de M^r Zenghelis, sur les causes qui produisent les phénomènes caractérisant les gaz «à l'état naissant» et ayant répété les expériences de ce savant, sans l'emploi de parois poreuses, arrive aux conclusions suivantes:

La phase gazeuse, à sa naissance dans un milieu liquide, doit, vu les dimensions minimales des bulles, vaincre des pressions considérables, dues à la tension superficielle; c'est sous ces pressions que se produit une solution du gaz dans le liquide, qui, restant sursaturé, agit par la masse du gaz dissous; elle produit ainsi naturellement des effets plus intenses que ceux correspondant à la pression ordinaire.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΩΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩΝ

ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΚΥΡΙΟΥ MONTEL

ὑπο Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Γ. Ρεμούνδου)

Θεωρήσωμεν ἐν σύστημα ν ἀκεραίων συναρτήσεων

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\nu(x)$$

Ἐὰν ἡ παράστασις

$$\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_\nu f_\nu(x)$$

(ὅπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες) ἔχῃ πεπερασμένον πλῆθος ριζῶν εἰς ὄλον τὸ ἐπίπεδον θὰ λέγωμεν σύμφωνα μὲ τὸν ὄρισμὸν τοῦ κυρίου MONTEL² ὅτι τὸ σύστημα τῶν ν συναρτήσεων ἀποτελεῖ **συνδυασμὸν ἐξαιρετικὸν** (combinaison exceptionnelle).

Ἐστῶσαν $\nu + 1$ τοιοῦτοι συνδυασμοὶ

$$\lambda_0^i + \lambda_1^i f_1(x) + \lambda_2^i f_2(x) + \dots + \lambda_\nu^i f_\nu(x) \quad i = 1, 2, 3, \dots, \nu + 1$$

¹ B. B. 21, (1888), 2843.

² Sur les familles complexes des fonctions entières et ses applications (*Acta Mathematica* 1925).

δταν ἡ ὀρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{v+1} & \lambda_1^{v+1} & \dots & \lambda_n^{v+1} \end{vmatrix}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός οἱ συνδυασμοὶ θὰ λέγωνται διακεκριμένοι (distinctes) ἀλλήλων.

Ὅμοίως v τοιοῦτοι συνδυασμοὶ θὰ λέγωνται διακεκριμένοι ἂν ἡ ὀρίζουσα

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^v & \lambda_2^v & \dots & \lambda_n^v \end{vmatrix}$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας ὁ κ. MONTEL ἀπέδειξεν ὅτι ὁ ὀλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἐξαιρετικῶν συνδυασμῶν ἐνὸς συστήματος v ἀκεραίων συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ $2v-1$.

Ἀκολουθήσας τὰς ὀδηγίας τοῦ διδασκάλου μου κ. MONTEL κατώρθωσα νὰ τελειοποιήσω τὸ θεώρημα τοῦτο ἀντικαταστήσας τὸ $2v-1$ παρ' ἐνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ συναρτήσεω οὐχὶ τοῦ πλήθους v τῶν $f_1(x)$ ἀλλὰ καὶ τοῦ πλήθους τῶν γραμμικῶν σχέσεων τῶν διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων αἵτινες εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάρχωσι μεταξὺ τῶν $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ καὶ τῶν ὀποίων οἱ συντελεσταὶ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Θεώρημα: Θεωρήσωμεν v συναρτήσεις ἀκεραίας οὐχὶ πάσας πολυώνυμα

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

καὶ ἔστω ρ ὁ ἀριθμὸς τῶν σχέσεων τῶν γραμμικῶν τῶν διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν $f_1(x)$ μὲ σταθεροὺς συντελεστάς.

Τὸ πλῆθος τῶν ἐξαιρετικῶν διακεκριμένων συνδυασμῶν τοῦ συστήματος τῶν v συναρτήσεων δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ $v + \rho$

Εἶναι φανερόν ὅτι $\rho \leq v-1$ διότι ἄλλως ὀλαι θὰ ἦσαν πολυώνυμα συνεπῶς διὰ $\rho = v-1$ εὐρίσκομεν τὸ θεώρημα τοῦ κ. MONTEL.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐφαρμοζόμενον εἰς τὰς ἀλγεβροειδεῖς συναρτήσεις ὀριζόμενας ὑπὸ ἐξισώσεων τῆς μορφῆς

$$u^v + f_1(x)u^{v-1} + f_2(x)u^{v-2} + \dots + f_n(x) = 0$$

δίδει ὡς μερικὴν περίπτωσιν τὴν πρότασιν: ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν μᾶς ἀλγεβροειδοῦς συναρτήσεως μὲ ν κλάδους δὲν ὑπερβαίνει $\nu + \rho$

Ἐπειδὴ δὲ $\rho \leq \nu - 1$ βλέπομεν ὅτι διὰ $\rho = \nu - 1$ ἔχομεν τὸ θεώρημα τοῦ κ. ΡΕΜΟΥΝΑΟΥ¹ δι' οὗ γενικεύει τὸ θεώρημα τοῦ κ. ΡΙCΑRD τὸ ἀφορῶν τὰς ἐξαιρετικὰς τιμὰς τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων.

Τὸ ὡς ἄνω θεώρημα ἀναφερόμενον εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς involutions τοῦ κ. ΜΟΝΤΕL² λαμβάνει τὴν ἐξῆς μορφήν:

Θεώρημα: Τὸ πλῆθος τῶν ἐξαιρετικῶν involutions μᾶς ἀλγεβροειδοῦς συναρτήσεως ὀριζομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$u^\nu + f_1(x)u^{\nu-1} + \dots + f_\nu(x) = 0$$

δὲν δύναται γὰ ὑπερβῆ $\nu + \rho$ ἔνθα ρ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν γραμμικῶν καὶ μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς σχέσεων αἰτνες ὑπάρχοντες μεταξὺ συναρτήσεων f_1, f_2, \dots, f_ν .

¹ Sur les valeurs d'une classe des fonctions transcendentes, Thèse de Doctorat 1906 Paris.

² Βλέπε τὸ *Mémoire* τοῦ τῶν *Acta* 1925.