ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Παρατηρήσεις τινὲς ἐπὶ τῶν δι' ἐπαναλήψεως διαδοχικῶν προσεγγίσεων παρὰ τοῖς ἀρχαίοις, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

Α'.

Συχνάκις παρουσιάζονται ἐξισώσεις καθ' ἃς ὁ ἄγνωστος x τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἐπιχειρεῖται ἡ ἀριθμητικὴ λύσις, ἐν ᾧ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως τιμή τις προσεγγίσεως, ἔστω x_0, καὶ κατόπιν προσδιορίζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2 \ldots\ldots$ κατὰ σειρὰν ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ Ἐν ᾗ περιπτώσει ἡ ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ὁριακήν τινα τιμὴν ξ, εἶναι προφανές, ὅτι $\xi=\varphi(\xi)$ εἶναι μία λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως[1]. Ἀναφέρομεν παραδείγματά τινα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης καὶ κατόπιν θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη ἦτο γνωστὴ κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου.

1. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=2$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{2}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+2}{x+1}$, (1). Πρὸς ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ x ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως, ἔστω $x_0=1$ καὶ θέτομεν ταύτην εἰς τὴν σχέσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέλος λαμβάνομεν 1, εἰς δὲ τὸ δεύτερον $\frac{3}{2}$· Τὴν τιμὴν $\frac{3}{2}$ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε εἰς μὲν τὸ α' μέλος ἔχομεν $\frac{3}{2}$ εἰς δὲ τὸ β' $\frac{7}{5}$· Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$
$\frac{x+2}{x+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$

Εἶναι δὲ $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

---

* **EVANGELOS STAMATIS, A few remarks of the succeeding approximation by iteratio by the Ancient Greeks.**

[1] R. Courant, *Vorlesungen ü. Dif.-und Integralrechnung*, σ. 315, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.— R. Zurmühl, *Praktische Mathematik für Ingenieure* σ. 22 ff., Springer Verlag, Berlin κλπ. 1953. — G. Runge-H. König, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Spinger Verlag, Berlin, 1924, unter Iteratio.

Ἡ $\sqrt{2}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $\sqrt{2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, (2). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β΄ μέλος τῆς (2) ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἐκ τοῦ α΄ μέλους ἴσης τιμῆς της, τῆς $1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ θὰ ἔχωμεν $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$. Ἐὰν καὶ πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὴν εἰς τὸ β΄ μέλος ἀπαντῶσαν $\sqrt{2}$ διὰ τῆς ἴσης τιμῆς της ἐκ τῆς (2), θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}.$$ Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ὑπολογίζοντες διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ συνεχοῦς ἀπεριορίστου τούτου κλάσματος λαμβάνομεν

$$\sqrt{2}=1,\ \sqrt{2}=\frac{3}{2},\ \sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5},$$

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12},\ \text{κλπ.}$$

2. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2=3$, ἐξ ἧς $x=\sqrt{3}$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη τιθεμένη ὑπὸ τὴν μορφὴν $x=\varphi(x)$ εἶναι ἡ $x=\frac{x+3}{x+1}$, (3). Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα λαμβάνοντες αὐθαιρέτως τιμήν τινα προσεγγίσεως $x_0=1$. Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α΄ μέλος 1, εἰς δὲ τὸ β΄ 2. Τὴν τιμὴν 2 θέτομεν εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ x, ὁπότε λαμβάνομεν εἰς μὲν τὸ α΄ μέλος 2, εἰς δὲ τὸ β΄ $\frac{5}{3}$. Κατωτέρω ἀναγράφομεν οὕτω πως λαμβανομένας τιμάς τινας.

x	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$
$\frac{x+3}{x+1}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\frac{989}{571}$	$\frac{1351}{780}$

Εἶναι δὲ

$$1<\frac{5}{3}<\frac{19}{11}<\frac{71}{41}<\frac{265}{153}<\frac{989}{571}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}<\frac{362}{209}<\frac{97}{56}<\frac{26}{15}<\frac{7}{4}<2.$$

Ἡ $\sqrt{3}$ δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2$.
Ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα διὰ τὴν $\sqrt{2}$ λαμβάνομεν τὴν $\sqrt{3}$ ὡς συνεχὲς ἀπεριόριστον κλάσμα.

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}} \text{ κλπ.}$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τοῦ κλάσματος τούτου θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{3}=1\,,\quad \sqrt{3}=1+\frac{2}{2}=2\quad \sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}=\frac{5}{3}\,,$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}=\frac{7}{4} \text{ κλπ.}$$

Β΄.

I. Ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος[1] εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ τὴν σκοποῦσαν τὴν ἑρμηνείαν τῶν μαθηματικῶν ἐκείνων, ἅτινα εἶναι χρήσιμα εἰς τὴν «Πλάτωνος ἀνάγνωσιν» ἀναπτύσσει δι᾽ ὀλίγων καὶ τὴν θεωρίαν τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν Ὁμοίαν διατύπωσιν τῆς θεωρίας ταύτης ἀναγιγνώσκομεν καὶ εἰς τὰ τοῦ Πρόκλου[2] σχόλια εἰς τὴν Πολιτείαν τοῦ Πλάτωνος. Παραθέτομεν τὸ σχετικὸν χωρίον τοῦ Πρόκλου.

«$\overline{\text{ΚΓ}}$. Ὅτι αἱ ταῖς ἀρρήτοις διαμέτροις παρακείμεναι ρηταὶ μονάδι μείζους εἰσὶν ἢ ἐλάττους διπλασίου, διὰ τῶν ἀριθμῶν οἱ Πυθαγόρειοι δεικνύ|ουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἐστιν καὶ διάμετρος. Ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἡ μὲν ὡς πλευρά [ἡ δ]ὲ ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο, ἐπείπερ ἡ ὡς διάμετρος μονάδι ἐλάσσων ἢ διπλασία τῆς ὡς πλευρᾶς. Ἔσται οὖν οὕτως ἡ μὲν δυοῖν μονάδων, ἡ δὲ τριῶν· καὶ τὰ μὲν ἀπὸ τούτων τῆς μὲν τεσσάρων, τῆς δὲ ἐννέα, ὅπερ ἐστὶν μονάδι μεῖζον ἢ διπλάσιον. πάλιν προσκείσθω τῇ μὲν δυοῖν μία διάμετρος ἡ

---

1 Ἐκδ. E. Hiller, σ. 42-55.

2 Ἐκδ. E. Kroll, II, σ. 24 κ.ἑ. 393 κ.ἑ. (Hultsch). Καὶ PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide, σ. 427-441, *Soc. d'éd. Les Belles Lettres*, Paris 1950. Καὶ ΕΥΑΓΓ. ΣΤΑΜΑΤΗ, Εὐκλείδου, Γεωμετρία - Θεωρία Ἀριθμῶν, σ. 8-18, (Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολ. Βιβλίων, Ἀθῆναι 1953).

τριῶν, τῇ δὲ τριῶν διαμέτρῳ δὶς ἡ πλευρὰ ταῖν δυοῖν. ἔσται οὖν ἡ μὲν πλευρὰ πέντε τινῶν, ἡ δὲ διάμετρος ἑπτά τινων, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τῆς μὲν κε', τῆς δὲ μθ', μονάδι ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον. ᾗ καὶ Πλάτων εἶπε τὸν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα ἀριθμὸν εἶναι ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν μὲν πεμπάδος δεομένων ἑνός, ἀρρήτων δὲ δεομένων δυοῖν, ἐπειδὴ διπλάσιον ἡ διάμετρος δύναται τῆς πλευρᾶς. ἐὰν δὲ λάβωμεν ἁπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται διπλάσιαι ὄντως, ὧν ἑκάστῃ μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου· οἷον ἡ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ' τῆς τοῦ κε' καὶ δ'. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ». (Σημ. ὡς γνωστὸν ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου ἐλέγετο ὑπὸ τῶν Ἀρχαίων διάμετρος).

Κατὰ τὸν Θέωνα καὶ τὸν Πρόκλον κατασκευάζονται ἐν συνεχείᾳ ἀριθμητικῶς τετράγωνα κατὰ νόμον ὅστις φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος.

		Πλευρὰ	Διαγώνιος
πρώτου τετραγώνου		1	1
δευτέρου	»	$1+1=2$	$2.1+1=3$
τρίτου	»	$2+3=5$	$2.2+3=7$
τετάρτου	»	$5+7=12$	$2.5+7=17$
πέμπτου	»	$12+17=29$	$2.12+17=41$
ἕκτου	»	$29+41=70$	$2.29+41=99$
⋮		⋮	⋮
$\nu+1$	»	$\alpha_\nu+\delta_\nu=\alpha_{\nu+1}$	$2.\alpha_\nu+\delta_\nu=\delta_{\nu+1}$, ἐὰν τοῦ

πρώτου τετραγώνου καλέσωμεν τὴν πλευρὰν α_1 καὶ τὴν διαγώνιον δ_1. Εἶναι δὲ

$$1^2=2.1^2-1, \quad 3^2=2.2^2+1, \quad 7^2=2.5^2-1, \quad 17^2=2.12^2+1.$$

Παρέχονται δηλ. διὰ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων $y^2=2\chi^2\mp1$. Τὴν αὐθαιρεσίαν τῆς θεωρήσεως τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα καὶ διαγώνιον ἐπίσης ἴσην πρὸς τὴν μονάδα ὁ Πρόκλος, ὡς φαίνεται ἀνωτέρω, τὴν αἰτιολογεῖ, γράφων, «ἐπεὶ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶ σπερματικῶς, δῆλον, φασίν, ὅτι καὶ πλευρὰ ἐστιν καὶ διάμετρος». ὁ Θέων γράφει συναφῶς τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ οὖν πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονὰς ἄρχει, οὕτως καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται». Καὶ σήμερον, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) προσεγγίσεων ἡ πρώτη τιμὴ προσεγγίσεως λαμβάνεται αὐθαιρέτως. Κατὰ σύγχρονον διατύπωσιν ὁ ὑπὸ τοῦ Θέωνος καὶ τοῦ Πρόκλου σωθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως.

$$x_{n+1}=\varphi(x_n, y_n) \quad \text{καὶ} \quad y_{n+1}=g(x_n, y_n).$$

Ὁ Πρόκλος μνημονεύει καὶ τὴν γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου κατασκευῆς τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. «Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείων γραμμικῶς ἀπ' ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ | εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] καὶ τὸ ἀπὸ [ταύ]της [μόνης τετράγωνα δι]πλάσια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισεί[ας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμ[ισείας καὶ τῆς] προσληφθείσης». Οὐδεμία ἀμφιβολία γεννᾶται ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ θεωρήματος II, 10 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τόσον ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς τοῦ Πρόκλου, ὅσον καὶ ἐκ τῆς φράσεως «προσλάβῃ δὲ .... *τὸ ἀπὸ τῆς ...*». Ἀποκλείεται νὰ εἶναι τὸ II, 6 τῶν Στοιχείων, διότι ἐκεῖ ἀναγιγνώσκομεν «ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, *τὸ ὑπὸ τῆς*...»

Ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς ἀναπτύξεως τῆς θεωρίας ὁ Θέων γράφει τὰ ἑξῆς· «ὥσπερ δὲ τριγωνικοὺς καὶ τετραγωνικοὺς καὶ πενταγωνικοὺς καὶ κατὰ τὰ λοιπὰ σχήματα λόγους ἔχουσι δυνάμει οἱ ἀριθμοὶ οὕτως καὶ πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους εὕροιμεν ἂν ἐμφανιζομένους τοῖς ἀριθμοῖς». Ἐκ τοῦ χωρίου τούτου καὶ τῆς φράσεως «τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὑρίσκεται», τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, συνάγεται, ὅτι ἐκ τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων διαγωνίων πρὸς τὰς πλευράς, ἤτοι οἱ λόγοι

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \text{κλπ.}$$

Ὁ Θέων δὲν μνημονεύει ρητῶς τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}\,.$$

Θεωρεῖται ὅμως ἀναμφισβήτητον ὅτι ἡ θεωρία τῶν πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν ἀφεώρα κατὰ πρῶτον λόγον εἰς τὴν σχέσιν ταύτην. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ 3^{ον} θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Κύκλου μέτρησις διατυπώσεως παρομοίας σχέσεως διὰ τὴν $\sqrt{3}$,

τῆς $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, ὡς καὶ τῶν σχέσεων

$$265^2 = 3.153^2 - 2\,,\quad 1351^2 = 3.780^2 + 1\,,\quad (y^2 = 3x^2 - 2\,,\quad y^2 - 3x^2 + 1).$$

Καθ' ἡμετέραν ἀνακοίνωσιν, γενομένην ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν[1] αἱ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους λαμβανόμεναι ἄνευ ἀποδείξεως σχέσεις λαμβάνονται διὰ λόγων διαμετρικῶν πρὸς πλευρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς κατασκευῆς ὁμοίων ρόμβων κατὰ τὸ εὐκλεί-

---

[1] Βλέπε *Πρακτικὰ Ἀκαδημίας*, **30**, 1955, σ. 255.

δειον θεώρημα II, 10. Ὁπωσδήποτε θεωροῦμεν βέβαιον ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζε τοὺς λόγους, οἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ἀκολουθίας, τὴν μὲν αὐξανομένην, τὴν δὲ φθίνουσαν καὶ ὅτι μεταξὺ τούτων τῶν ἀκολουθιῶν εὑρίσκεται ἡ $\sqrt{3}$, ἤτοι ἐγνώριζε τὰς σχέσεις

$$\frac{1}{1} < \frac{5}{3} < \frac{19}{11} < \frac{71}{41} < \frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} < \frac{362}{209} < \frac{97}{56} < \frac{26}{15} < \frac{7}{4} < \frac{2}{1}.$$

II. Ὡς συνάγεται ἐκ τῶν Μετρικῶν τοῦ Ἥρωνος τοῦ Ἀλεξανδρέως [1] ἦτο γνωστὸν κατὰ τὴν ἀρχαιότητα ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ σχηματισμοῦ διαδοχικῶν μουσικῶν ἀναλογιῶν. Ἐὰν δηλ. Α εἶναι ἀριθμὸς μὴ τετράγωνος, λαμβάνεται ὁ ἐγγύτερον πρὸς τοῦτον τετράγωνος μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τοῦ Α, τοῦ ὁποίου ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἔστω α, καὶ σχηματίζεται τὸ πηλίκον $\frac{A}{\alpha}$· Εἰς τὸ μνημονευόμενον παράδειγμα τοῦ Ἥρωνος εἶναι $\frac{A}{\alpha} < \alpha$. Σχηματίζεται ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α

$\frac{A}{\alpha} : \beta_1 = \gamma_1 : \alpha$, ἔνθα β_1 τὸ ἁρμονικὸν μέσον $\dfrac{2\frac{A}{\alpha}\cdot\alpha}{\frac{A}{\alpha}+\alpha}$ καὶ γ_1 τὸ ἀριθμητικὸν μέσον $\left(\frac{A}{\alpha}+\alpha\right) : 2$ τῶν $\frac{A}{\alpha}$ καὶ α. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς β_1, γ_1 σχηματίζεται ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία

$\beta_1 : \beta_2 = \gamma_2 : \gamma_1$ ἔνθα $\beta_2 = \frac{2\beta_1\gamma_1}{\beta_1+\gamma_1}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\gamma_2 = \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν β_1, γ_1. Εἶναι δὲ $\beta_1 < \beta_2 < \gamma_2 < \gamma_1$. Μὲ ἄκρους τοὺς β_2, γ_2 σχηματίζεται ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἶναι δὲ

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \sqrt{A} < \gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1 .$$

Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Πυθαγόρειον Ἀρχύταν τὸν Ταραντῖνον [2].

Κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{2}$ ἔχομεν:

Ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 2 τετράγωνος εἶναι ὁ 1^2, καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 2 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 1^2 εἶναι ὁ $\frac{2}{1}$· Ἡ πρώτη μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς 1 (δηλ. τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ 1^2) καὶ $\frac{2}{1}$ εἶναι ἡ

$1 : \dfrac{2\cdot 1\cdot \frac{2}{1}}{1+\frac{2}{1}} = \dfrac{1+\frac{2}{1}}{2} : \frac{2}{1}$ ἢ $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, ἔνθα $\frac{4}{3}$ τὸ ἁρμονικὸν μέσον

---

[1] ΗΡΩΝΟΣ, Μετρικά, (ἔκδ. Schöne, τόμ. III, σ. 18 - 20, Teubner, 1903) καὶ P. TANNERY, Mémoires Scientifiques III, σ. 68 καὶ 244, καὶ PAUL - HENRI MICHEL. Ἔνθ' ἀν., σ. 426.

[2] P. TANNERY, Ἔνθ' ἀν.

καὶ $\frac{3}{2}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 1 καὶ $\frac{2}{1}$. Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία μὲ ἄκρους ὅρους τοὺς $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$ εἶναι $\frac{4}{3} : \frac{24}{17} = \frac{17}{12} : \frac{3}{2}$, ἔνθα $\frac{24}{17}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{17}{12}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{4}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$.

Ἡ τρίτη μουσικὴ ἀναλογία εἶναι $\frac{24}{17} : \frac{816}{577} = \frac{577}{408} : \frac{17}{12}$, ἔνθα $\frac{816}{577}$ εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον καὶ $\frac{577}{408}$ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\frac{24}{17}, \frac{17}{12}$, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Εἶναι δὲ $1 < \frac{4}{3} < \frac{24}{17} < \frac{816}{577} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2} < \frac{2}{1}$.

Κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τοῦ Ἀρχύτου, διὰ τὴν $\sqrt{3}$ ἔχομεν: ὁ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετράγωνος εἶναι ὁ 2^2 καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3 διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2^2 εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$. Ἄκροι ὅροι πρὸς σχηματισμὸν τῆς πρώτης μουσικῆς ἀναλογίας εἶναι ὁ $\frac{3}{2}$ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἐγγύτερον πρὸς τὸν 3 τετραγώνου, ὁ 2. Αὕτη εἶναι

$$\frac{3}{2} : \frac{12}{7} = \frac{7}{4} : 2 .$$

Ἡ δευτέρα μουσικὴ ἀναλογία εἶναι

$$\frac{12}{7} : \frac{168}{97} = \frac{97}{56} : \frac{7}{4}, \text{ κλπ.}$$

Εἶναι δὲ

$$\frac{3}{2} < \frac{12}{7} < \frac{168}{97} < \sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{7}{4} < 2 .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων τῶν ἀφορώντων εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

Εὑρίσκεται κατά τινα τρόπον προσέγγισίς τις πρὸς ζητουμένην ἀληθῆ τινα τιμήν. Ἡ προσέγγισις αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως, ἡ νέα προσέγγισις διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκόμη καλυτέρας προσεγγίσεως καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται σήμερον μέθοδος τῶν δι' ἐπαναλήψεως (iteratio) διαδοχικῶν προσεγγίσεων καὶ ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς πλεῖστα πολύπλοκα προβλήματα τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οἱ Ἀρχαῖοι Ἕλληνες, τοὐλάχιστον κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀρχύτου τοῦ Ταραντίνου, ἐγνώριζον τὴν μέθοδον ταύτην.

SUMMARY

The theory of 'Side'-and diameter-' numbers is developed as it has been saved by Theon of Smyrna and Proklus. It is reminded that

Archimedes knew the law of formation of relations $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{770}$. The theory of the Pythagoreans Archytas of Tarentum about the formation of succeeding musical proportions is also developed. From all this we come to the conclusion that the Ancient Greeks know the method of succeeding approximations by repeatition (iteratio) for the arithmetical solution of an equation, at least at the time of Plato and Archytas.

ΦΑΡΜΑΚΟΛΟΓΙΑ.—Ἐπίδρασις τῆς θυροξίνης ἐπὶ τῆς ἐπουλώσεως τῶν τραυμάτων, ὑπὸ ***Διον. Βαρώνου*** καὶ ***Γεωρ. Λογαρᾶ****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Γεωργ. Ἰωακείμογλου.

Ἡ ἐπίδρασις τῆς ὁρμόνης τοῦ θυρεοειδοῦς ἀδένος[1] ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς ἰάσεως τοῦ τραύματος ἐμελετήθη ὑπὸ πολλῶν ἐρευνητῶν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη.

Ἡ ἐπίδρασις τῆς θυροξίνης ἐπὶ τῆς θεραπείας τῶν τραυμάτων ἐμελετήθη μόνη ἢ ἐν σχέσει πρὸς τὴν θυρεοειδοτρόπον ὁρμόνην τοῦ προσθίου λοβοῦ τῆς ὑποφύσεως ἐπὶ πειραματοζῴων (συνήθως ἰνδικῶν χοιριδίων καὶ ἐπιμύων), προηγουμένως θυρεοειδεκτομηθέντων ἢ μή, ὡς καὶ ὑποφυσιεκτομηθέντων ἢ μή.

Τὸ θέμα τῆς ἰάσεως τῶν τραυμάτων ἦτο καὶ εἶναι καθ' ἑαυτὸ ἐνδιαφέρον ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι προσφέρεται ὡς κατάλληλον πεδίον διὰ τὴν μελέτην τῆς δημιουργίας, ἀναπτύξεως καὶ λειτουργίας τοῦ κοκκιώδους ἱστοῦ καὶ ἐν ἀπωτέρᾳ ἀναλύσει τοῦ συνδετικοῦ.

Αἱ κολλαγόνοι ἶνες, στοιχεῖον τοῦ συνδετικοῦ ἱστοῦ, ἔχουν κινήσει κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη τὸ διεθνὲς διαφέρον τῶν ἐρευνητῶν καὶ κάθε οὐσία, ἔχουσα σχέσιν ἢ ὑποτιθεμένη ὅτι δύναται νὰ ἔχῃ σημασίαν τινὰ εἰς τὸν σχηματισμόν των ἢ εἰς τὴν φυσιολογίαν καὶ παθολογίαν των, γεννᾷ νέας περιπτώσεις ἐρεύνης.

Ἐκ τῶν κυριωτέρων παραγόντων οἵτινες ἐμελετήθησαν καὶ μελετῶνται σήμερον εἰς τὸ πλαίσιον τοῦτο τῶν ἐρευνῶν εἶναι αἱ ὁρμόναι. Προσπάθειαι ἐγένοντο, ἵνα καθορισθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ ὁρμονῶν ἢ ὁρμόνης καὶ δημιουργίας, ἀναπτύξεως καὶ ἐξελίξεως τοῦ κοκκιώδους ἱστοῦ. Ἐκ τῶν ἐρευνῶν τούτων συνεχῶς προστίθενται νέαι γνώσεις, ἐνδιαφέρουσαι τοὺς ἐρευνητάς, οἵτινες προσφέρουν τὰ συμπεράσματά των εἰς τὸν πρακτικὸν ἰατρόν. Ἡ παροῦσα πειραματικὴ ἐργασία ἔχει σκοπὸν τὴν μελέτην τῆς

---

* **D. VARONOS and G. LOGARAS, Effect of Thyroxine on Wound healing.**

1 Ἐννοοῦμεν μόνον τὴν Θυροξίνην. Διὰ τὴν ἄλλην ὁρμόνην τοῦ θυρεοειδοῦς τὴν τριϊωδοθυρονίνην δὲν ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ παρόντος δεδομένα.