Η ΑΡΜΟΝΙΑ ΣΤΗ ΦΥΣΗ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

Κύριε Πρόεδρε τῆς Ἀκαδημίας,

Σᾶς εὐχαριστῶ θερμὰ γιὰ τὰ φιλόφρονα λόγια σας τὰ ὁποῖα μὲ τιμοῦν, καθὼς καὶ γιὰ τὸν εὐγενικὸ καὶ ἐγκάρδιο χαιρετισμό σας κατὰ τὴν ἐπίσημη εἴσοδό μου στὸ ἀνώτατο Πνευματικὸ Ἵδρυμα τῆς χώρας.

* * *

Σεβαστὲ καὶ ἀγαπητὲ συνάδελφε, Κύριε Πυλαρινέ,

Μὲ βαθιὰ συγκίνηση ἄκουσα τοὺς ἐπαίνους καὶ χαρακτηρισμοὺς μὲ τοὺς ὁποίους πρὸ ὀλίγου μὲ παρουσιάσατε στὴν Ἀκαδημία. Ἀναφερθήκατε στὴν ἐπιστημονική μου σταδιοδρομία ἡ ὁποία ἄρχισε τὸ φθινόπωρο τοῦ 1935 μὲ τὴν ἐγγραφή μου ὡς πρωτοετοῦς φοιτητοῦ στὸ Μαθηματικὸ Τμῆμα τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Εἶναι γνωστὲς οἱ συνθῆκες ποὺ ἐπικρατοῦσαν τὴν ἐποχὴ ἐκείνη στὸ νεοσύστατο αὐτὸ Πανεπιστήμιο. Ὅμως ἐμεῖς, οἱ φοιτητές σας, θεωρούσαμε τοὺς ἑαυτούς μας πανευτυχεῖς ποὺ ἔτυχε νὰ ἀποτελεῖτε μέλος τοῦ καθηγητικοῦ σώματος. Στὸ πρόσωπό σας ταυτίζαμε τὸ Μαθηματικὸ Τμῆμα. Ὑπήρξατε γιὰ μᾶς ὁ ἐμπνευσμένος ἐπιστήμων, ὁ ἄριστος Καθηγητής, ὁ Βοηθὸς ποὺ μᾶς ἔκαμνε τὰ φροντιστήρια, ὁ καλὸς σύμβουλος, ὁ φίλος.

Εἶμαι ἰδιαίτερα εὐτυχής, κ. Καθηγητά, ποὺ οἱ ἔπαινοι ποὺ ἀναφέρατε προηγουμένως προέρχονταν ἀπὸ Σᾶς, ἀπὸ ἕνα ἐπιστήμονα τῆς δικῆς σας ἀξίας, ἀπ' τὸν παλιό μου Δάσκαλο ὁ ὁποῖος μὲ ἐχειραγώγησε στὰ πρῶτα βήματα τῆς ἐπιστημονικῆς μου πορείας. Σᾶς εὐχαριστῶ ἐκ βαθέων.

* * *

Κύριοι Συνάδελφοι,

Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ἀπ' τὸ τιμητικὸ αὐτὸ βῆμα, στὸ ὁποῖο βρίσκομαι αὐτὴ τὴ στιγμή, ἡ σκέψη μου στρέφεται μ' εὐγνωμοσύνη πρὸς ἐκείνους ποὺ συντελέσανε νὰ φθάσω μέχρι ἐδῶ.

Πρῶτ' ἀπ' ὅλα, εὐχαριστῶ θερμὰ τὴν Ἀκαδημία Ἀθηνῶν γιὰ τὴν τιμὴ ποὺ μοῦ ἔκανε νὰ μὲ ἐκλέξει τακτικὸ μέλος της στὴν Ἕδρα τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν (Τομέας Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως) τῆς Τάξεως τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν. Ἔχω συνείδηση τῆς εὐθύνης ποὺ συνεπάγεται ἡ ὑψηλὴ αὐτὴ τιμή, καθὼς καὶ τοῦ ἐπιτακτικοῦ μὲν ἀλλὰ εὐχάριστου καθήκοντος ποὺ δημιουργεῖ στὸ νέο μέλος: νὰ συμβάλλει ἀκατάπαυστα στὴν ἀποστολὴ τοῦ Ἱδρύματος. Ἔχοντας ὑπόψη τὴν ἐπιταγὴ αὐτή, ὑπόσχομαι νὰ ἐργασθῶ καὶ νὰ συνεργασθῶ μαζί σας κ.κ. Συνάδελφοι μὲ ὅλες μου τὶς δυνάμεις, γιὰ νὰ συμβάλω στὴν ἐπίτευξη τῶν ὑψηλῶν στόχων τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν.

Στὴ συνέχεια, ἡ σκέψη μου στρέφεται μὲ εὐλάβεια στοὺς ἀείμνηστους γονεῖς μου, οἱ ὁποῖοι, μέσα στὶς τόσες τραγικὲς ἀντιξοότητες καὶ φοβερὲς ταλαιπωρίες ποὺ τοὺς δημιούργησε ἡ Μικρασιατικὴ Καταστροφὴ καὶ ἡ Προσφυγιά, δὲν ἔπαυσαν νὰ ἐμπνέουν καὶ νὰ καλλιεργοῦν στὶς ψυχὲς τῶν παιδιῶν τους τὴν ἀνάταση καὶ τὴν ἔφεση πρὸς μάθηση καὶ δημιουργία.

Τέλος ἐκφράζω αἰσθήματα βαθιᾶς εὐγνωμοσύνης στὸν ἀδελφό μου καὶ στὴ σύζυγό μου.

* * *

Ἡ Ἁρμονία στὴ Φύση: Ὁ ρόλος τῶν Μαθηματικῶν στὴν κατανόησή της

εἶναι τὸ κύριο θέμα τῆς ὁμιλίας μου. Εἶναι περιττὸ νὰ τονίσω ὅτι τὸ θέμα εἶναι ἀπέραντο καὶ ἡ πλήρης ἀνάπτυξή του στὰ χρονικὰ ὅρια ποὺ διαθέτω θὰ ἦταν, τουλάχιστον γιὰ τὸν ὁμιλοῦντα, κάτι τὸ ἀδύνατο. Γιὰ τὸ λόγο αὐτό, ἀλλὰ καὶ διότι ἤθελα νὰ παρουσιάσω, σὲ συντομία, καὶ μιὰ ἄλλη ὄψη τῶν Μαθηματικῶν, ἀναγκάσθηκα νὰ παρακάμψω ὁρισμένες πτυχὲς τοῦ κυρίου θέματος, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι καὶ ἡ σπουδαιότατη καὶ πολὺ γνωστὴ ἄποψη τῶν Πυθαγορείων ἐπ' αὐτοῦ.

Θὰ περιορισθῶ στὸ νὰ συνοψίσω μόνο τὴν ἄποψη αὐτή: Οἱ μεγάλες σὲ ἔκταση μαθηματικὲς ἔρευνες τῶν Πυθαγορείων περιελάμβαναν τὴ μελέτη τῶν περιττῶν καὶ τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, τῶν πρώτων ἀριθμῶν, καθὼς καὶ ἐκείνων ποὺ εἶναι τετράγωνα ἀκεραίων. Ξεκινώντας ἀπ' τὸ ἀριθμητικὸ αὐτὸ ὑπόβαθρο καλλιέργησαν τὴν ἔννοια τοῦ «ἀριθμοῦ» ἡ ὁποία κατέστη γι' αὐτοὺς ἡ ὑψίστη, ἡ μοναδικὴ Ἀρχὴ γιὰ τὴν ἑρμηνεία κάθε ἀναλογίας, τάξεως καὶ ἁρμονίας στὴ Φύση.

῾Ο ἀριθμὸς τοῦ Πυθαγόρα δὲν εἶναι μαθηματικός, ἂν καὶ παρέλαβε αὐτὸν ἀπ᾽ τὰ Μαθηματικά. Εἶναι λέξη συμβολικὴ μὲ τὴν ὁποία ὁ Πυθαγόρας δηλώνει τὸ εἰς τὰ σώματα ἐνυπάρχον ἀΐδιον ὑπερβατικὸν στοιχεῖον τὸ ὁποῖο δὲν ἐχώριζε ἀπ᾽ τὰ σώματα. ῞Οπως οἱ ἀριθμοὶ ἀνάγονται ὅλοι στὴ μονάδα καὶ προέρχονται ἀπ᾽ αὐτήν, ἔτσι καὶ τὰ διὰ τῶν ἀριθμῶν δηλούμενα στοιχεῖα ἀνάγονται σὲ μιὰ ἀρχή, πρωταρχική, τὴν ὁποία συμβολικὰ παριστάνει μὲ τὴ μονάδα «ἧς οὐκ ἔστι γένεσις». ῾Η Μονάδα εἶναι αὐτὸς ὁ Θεὸς τοῦ Πυθαγόρα. Χάρις στὴν ὕπαρξη αὐτῆς ἐπικρατεῖ στὸ Σύμπαν Τάξις, Συμμετρία καὶ ῾Αρμονία.

῾Η βιβλιογραφία γύρω ἀπ᾽ τὸν Πυθαγόρα καὶ τοὺς Πυθαγορείους εἶναι πλουσιοτάτη. ᾽Ενδεικτικά, πέραν τῶν ἑλληνικῶν, διακρίνω τὰ ἑξῆς ἀξιόλογα συγγράμματα:

T.L. Health, A History of Greek Methematics, Oxford 1921, 2 τόμοι.

, A Manual of Greek Mathematics, Oxford 1931.

K. Reidemeister, Die Arithmetik der Griechen, Leipzig 1940.

R. L. Van Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer, Mathematische Annalen 1948, (ἄρθρο)

, Die Astronomie der Pythagoreer, Amsterdam 1951.

* * *

Πρὶν ν᾽ ἀρχίσω τὴν ἀνάπτυξη τοῦ θέματός μου, θὰ ἤθελα νὰ προτάξω τὸ παρακάτω κείμενο τοῦ ὁποίου καὶ περίληψη ἀποτελεῖ, οὐσιαστικά, ὁ τίτλος τῆς παρούσας ὁμιλίας.

«῾Η ἁρμονία αὐτὴ τὴν ὁποία ἡ ἀνθρώπινη νόηση (εὐφυΐα) πιστεύει ὅτι ἀνακαλύπτει στὴ Φύση, ὑπάρχει ἀνεξάρτητα ἀπ᾽ τὴ νόηση αὐτή; ᾽Αναμφιβόλως ὄχι. Μιὰ πραγματικότητα τελείως ἀνεξάρτητη ἀπ᾽ τὸ πνεῦμα ποὺ τὴν συλλαμβάνει, τὴν βλέπει ἢ τὴν αἰσθάνεται, εἶναι κάτι τὸ ἀδύνατο. ῞Ενας τόσο ἐξωτερικὸς Κόσμος, ἀκόμα καὶ ἂν ὑπῆρχε, θὰ ἦταν γιὰ πάντα ἀπροσπέλαστος γιὰ μᾶς.

῞Ομως αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε «ἀντικειμενικὴ πραγματικότητα» εἶναι σὲ τελευταία ἀνάλυση κάτι ποὺ εἶναι κοινὸ σὲ ἕνα πλῆθος σκεπτομένων ὄντων καὶ ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ ἐπεκταθεῖ καὶ νὰ γίνει κοινὸ σὲ ὅλα τὰ σκεπτόμενα ὄντα. Τὸ κοινὸ αὐτὸ κτῆμα δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ ἁρμονία ποὺ ἐκφράζεται διὰ μαθηματικῶν νόμων».

Τὸ περιεχόμενο τοῦ κειμένου αὐτοῦ, ποὺ σχετικῶς πρόσφατα ἀνεκάλυψα στὸ ἔργο τοῦ Henri Poincaré «La valeur de la Science», σελ. 9, ἀποτελοῦσε ἀνέκαθεν πεποίθησή μου. Οἱ σκέψεις καὶ οἱ στοχασμοὶ κατέληγαν ἀναπόφευκτα, πάντοτε, στὴν ἄποψη ὅτι: τὸ ῾Υλικὸ Σύμπαν εἶναι κάτι ποὺ εἶναι ὁρατὸ διαμέσου τῆς ἀνθρώπινης νόησης, ποὺ μορφοποιεῖται ἀπ᾽ τὴν ἀνθρώπινη σκέψη, κάτι ποὺ γίνεται καὶ ξαναγίνεται ἀντιληπτὸ ἐπὶ αἰῶνες τώρα, καὶ μεταφέρεται ἀπὸ κοινωνία σὲ κοινωνία.

Εἶναι ποτὲ δυνατὸν ὁ ἄνθρωπος νὰ ἐξηγήσει, νὰ ἑρμηνεύσει τὸν ὑλικὸ Κόσμο, χωρὶς νὰ ὑπεισέλθει στὴν ἑρμηνεία αὐτὴ τὸ στοιχεῖο τοῦ ἀνθρωποκεντρισμοῦ; Νομίζω ὄχι.

Μπορεῖ ὁ ἄνθρωπος νὰ εἰσδύσει στὴν περιοχὴ τῆς «ἀπόλυτης γνώσης» χωρὶς ἡ γνώση αὐτὴ νὰ διηθηθεῖ ἀπ' τὸ φίλτρο τῆς ἀνθρώπινης νόησης, ἀφοῦ μάλιστα τὸ φίλτρο αὐτὸ εἶναι μέρος τοῦ ὑλικοῦ Σύμπαντος; Ἀμφιβάλλω.

Ἂς προχωρήσω ὅμως στὸ θέμα μου ἀναλυτικότερα.

Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μιὰ πολὺ παλιὰ Τέχνη, εἶναι μεταξὺ τῶν δραστηριοτήτων τοῦ ἀνθρώπου ἐκείνη ποὺ διακρίνεται γιὰ τὴ μεγίστη ἐσωτερικότητά της ἀλλὰ καὶ τὴν πρακτικότητά της.

Ἀπ' τὸ 1800 π.Χ. ἀκόμα, οἱ Βαβυλώνιοι μελετοῦσαν τὶς ἀφηρημένες ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν, στὴ δὲ Ἑλλάδα τῆς Ἀθήνας ἡ Γεωμετρία εἶχε φθάσει σὲ ὑψηλὰ θεωρητικὰ ἐπίπεδα. Παράλληλα ὅμως μὲ τὴ θεωρητική τους ἀνάπτυξη, τὰ Μαθηματικὰ ἀναπτύχθηκαν καὶ ὡς πρακτικὸ ἐργαλεῖο χρήσιμο στὴν καθημερινὴ ζωή, στὴ μέτρηση γαιῶν, στὴ ναυσιπλοΐα, στὴν ἐκτέλεση δημοσίων ἔργων, κ.ἄ. Τὰ πρακτικὰ προβλήματα καὶ οἱ θεωρητικὲς ἔρευνες, οἱ δύο αὐτὲς δραστηριότητες, χρησίμευσαν ὡς πηγὲς ἐρεθισμάτων ἡ μία γιὰ τὴν ἄλλη, ἔτσι ὥστε ὁ διαχωρισμός τους νὰ καταστεῖ ἀδύνατος.

Κάτι παρόμοιο συμβαίνει καὶ στὴν ἐποχή μας. Κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ 20ου αἰώνα τὰ Μαθηματικὰ ἄνθισαν, ἀναπτύχθηκαν σὲ ἔκταση, ποικιλία, βάθος καὶ ἀφαίρεση. Τόσο βαθιὰ ὑπῆρξε ἡ ἐκρηκτικὴ αὐτὴ ἔρευνα, ὥστε ὁλόκληρες περιοχὲς τῶν Μαθηματικῶν νὰ εἶναι σήμερα ἀκατάληπτες ἀπὸ τοὺς μὴ μαθηματικούς, πολὺ δὲ συχνὰ καὶ ἀπὸ μαθηματικοὺς ποὺ ἀσχολοῦνται σὲ διαφορετικὲς εἰδικότητες. Μολαταῦτα, παρὰ τὴν τάση αὐτὴ πρὸς ἐξειδίκευση, καὶ μάλιστα λόγω αὐτῆς ἀκριβῶς τῆς τάσεως, τὰ Μαθηματικὰ ἔχουν καταστεῖ σαφέστερα, πιὸ συγκεκριμένα, πιὸ ζωτικὰ θὰ ἔλεγα, ὅσο ποτὲ ἄλλοτε.

Τὰ τελευταῖα 25 χρόνια, τὰ Μαθηματικὰ καθὼς καὶ οἱ τεχνικές ποὺ αὐτὰ χρησιμοποιοῦν, ἔχουν καταστεῖ μιὰ οὐσιαστικὴ συνιστῶσα τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, τῆς Τεχνολογίας, τῆς Βιομηχανίας καὶ τῶν Ἐπιχειρήσεων.

Μποροῦμε νὰ ποῦμε, χωρὶς νὰ ὑπερβάλλουμε, ὅτι ζοῦμε στὴν ἐποχὴ τῶν Μαθηματικῶν, ὅτι ὁ πολιτισμός μας ἔχει μαθηματικοποιηθεῖ. Ἕνα ὁλοφάνερο ἀποτέλεσμα τῆς μαθηματικοποιήσεως αὐτῆς εἶναι οἱ γνωστοὶ σὲ ὅλους μας ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ. Θὰ ἀναφέρομε, πολὺ σύντομα καὶ πολὺ περιληπτικά, μερικὰ μόνο παραδείγματα στὰ ὁποῖα φαίνεται, πῶς οἱ ὑπολογιστὲς ἐπιδροῦν στὴ ζωή μας.

(α) Τὰ ἀεροπλάνα τῶν ἐμπορικῶν ἀερογραμμῶν μποροῦν νὰ προσγειώνονται χωρὶς κἂν ὁ πιλότος νὰ ἐγγίσει τοὺς σχετικοὺς μοχλοὺς ἐλέγχου. Τὰ δεδομένα τῶν μετρήσεων, ποὺ ἀφοροῦν τὴν ταχύτητα καὶ τὴν θέση τοῦ σκάφους, διοχετεύονται αὐτομάτως σὲ ἕνα

μηχάνημα πού λέγεται «Kalman Bucy Filter» τό όποῖο καί ἐκτελεῖ τήν πτήση, χρησιμοποιώντας συνεχῶς τή γνωστή μαθηματική μέθοδο τῶν «ἐλαχίστων τετραγώνων». Παρόμοια μηχανήματα κατευθύνουν τούς πυραύλους καί τούς δορυφόρους.

(β) Στήν Ἰατρική, ἡ ἀνάλυση ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ δεδομένων (data) καθιστᾶ δυνατή μιά γενική μελέτη τῆς Ἐπιδημιολογίας. Ἀληθινή ἐπανάσταση προκάλεσαν οἱ Ὑπολογιστές στή διάγνωση τῶν ἀσθενειῶν, μέ τήν αὐτόματη παροχή ἀναλύσεων αἵματος καί οὔρων, καθώς καί τομογραφιῶν ἐσωτερικῶν ὀργάνων. Εἶναι πιθανό, καί μάλιστα σύντομα, οἱ Ὑπολογιστές, διεξάγοντας ἀκίνδυνα tests ἐπί τῶν ἐξεταζομένων, νά τούς προειδοποιοῦν, δέκα ἤ καί εἴκοσι χρόνια νωρίτερα, γιά τούς κινδύνους πού διατρέχει ἡ ὑγεία τους.

(γ) Στόν κλάδο τῆς Βιομηχανίας καί τῶν Ἐπιχειρήσεων, ἡ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐπέφερε μεγάλη μεταβολή στό σχεδιασμό τῆς βιομηχανικῆς παραγωγῆς, στόν ἔλεγχο τῆς ἀπογραφῆς καί κατανομῆς τῶν προϊόντων, εὐκολύνοντας ἔτσι τήν εὕρεση τῆς πιό ἀποτελεσματικῆς κατανομῆς τῶν πλουτοπαραγωγικῶν πόρων.

Ὅλες αὐτές οἱ τόσο διαφορετικές μεταξύ τους ἐφαρμογές τῶν Ὑπολογιστῶν ἔχουν κάτι τό κοινό:

Στηρίζονται κυρίως στόν κλάδο ἐκεῖνο τῶν Μαθηματικῶν πού φέρει τό ὄνομα «Γραμμική Ἄλγεβρα» καί πού ἀναπτύχθηκε πρός τό τέλος τοῦ 19ου αἰώνα, χωρίς βέβαια οἱ πρωτεργάτες τοῦ κλάδου, νά εἶχαν κατά νοῦν καμιά ἀπ' τίς παραπάνω ἐφαρμογές. Τά κίνητρα γιά τήν ἀνάπτυξη τῆς «Γραμμικῆς Ἄλγεβρας» ἦταν ἐσωμαθηματικά καί πρέπει νά ἀναζητηθοῦν στήν προσπάθεια τῶν μαθηματικῶν νά κατανοήσουν τή γεωμετρία του ν-διαστάτου χώρου.

Θά μποροῦσε κανείς νά συγγράψει τόμους ὁλόκληρους σχετικά μέ τήν ὠφελιμιστική ἀξία καθώς καί τήν ἐπίδραση τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας στήν κοινωνία. Ὅμως, θά ἦταν ἴσως πιό σπουδαῖο καί πιό ἐνδιαφέρον νά τονισθοῦν τά ἑξῆς δύο συμπεράσματα πού τακτικά ἐπαληθεύονται στό ροῦν τῆς Ἱστορίας:

(α) Μαθηματικά καλῆς ποιότητας, ὅσο ἀφηρημένα κι ἄν εἶναι, ὁδηγοῦν πάντα σέ πρακτικές ἐφαρμογές στή Φύση. Ἀντιστρόφως, προβλήματα δύσκολα πού ἀνακύπτουν μελετώντας τή Φύση, ἀποτελοῦν κίνητρα γιά τήν ἀνακάλυψη νέων Μαθηματικῶν. Ὁ χρόνος πού μεσολαβεῖ μεταξύ μιᾶς μαθηματικῆς ἀνακαλύψεως καί τῆς ἀντίστοιχης ἐφαρμογῆς της, ποικίλλει πολύ. Καμιά φορά ἡ ἐφαρμογή ἀκολουθεῖ ἀμέσως τή θεωρία. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις ὅπου ἀπαιτοῦνται περισσότερα ἀπό 100 χρόνια, προτοῦ ἡ ἀφηρημένη μαθηματική θεωρία νά προκαλέσει μιά πραγματική ἐπανάσταση μέ τήν ἐφαρμογή της.

(β) Εἶναι ἀδύνατο νά προβλέψει κανείς, ποῦ ἀκριβῶς ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν

ἢ μιὰ συγκεκριμένη μαθηματικὴ ἀνακάλυψη, θὰ ἀποδειχθεῖ χρήσιμη. Ἀκόμα καὶ οἱ ἴδιοι οἱ πρωτοπόροι πολλῶν μαθηματικῶν ἰδεῶν μένουν κατάπληκτοι μπροστὰ στὶς ἐφαρμογὲς ποὺ βρίσκουν οἱ ἰδέες τους. Τὸ μόνο πράγμα ποὺ μπορεῖ κανεὶς νὰ πεῖ εἶναι ὅτι ὁ χρόνος, συχνά, ἐπιφυλάσσει δυσάρεστες ἐκπλήξεις σ' αὐτοὺς ποὺ ἰσχυρίζονται ὅτι: «Δὲν θὰ ὑπάρξει ποτὲ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἄλφα ἢ βῆτα ἀξιόλογης μαθηματικῆς θεωρίας». Ὁ διαπρεπὴς Ἄγγλος μαθηματικὸς G. H. Hardy γράφει στὴν αὐτοβιογραφία του ἡ ὁποία φέρει τὸν τίτλο «A mathematician's Apology», ὅτι ἀσχολήθηκε μὲ τὰ Μαθηματικὰ γιὰ τὴν ὁμορφιά τους μόνο καὶ ὄχι γιὰ τὴν πρακτική τους ἀξία. Γράφει ἐπίσης, σὲ ὕφος ἀνθρώπου ποὺ ἐκμυστηρεύεται κάτι τὸ ἐμπιστευτικό, ὅτι δὲν προβλέπει στὸ μέλλον καμιὰ ἐφαρμογὴ τῆς «Θεωρίας τῶν Ἀριθμῶν» ἢ τῆς «Θεωρίας τῆς Σχετικότητας». Ὡς πρὸς τὴ θεωρία τῆς Σχετικότητας ὁ Hardy διαψεύσθηκε ὕστερα ἀπὸ πολὺ λίγα χρόνια μὲ τὴν ἐφεύρεση τοῦ τρόπου διασπάσεως τοῦ ἀτόμου, μετὰ δὲ ἀπὸ σαράντα περίπου χρόνια ἡ ἀφηρημένη θεωρία ἀριθμῶν χρησίμευσε στὴν κατασκευὴ κρυπτογραφικῶν κωδίκων.

Δὲν θὰ ἦταν, ἴσως, ἄσκοπο νὰ πῶ δυὸ λόγια γιὰ τὴν κατασκευὴ αὐτὴ τῶν κωδίκων, ποὺ ἀποτελεῖ ἕνα λαμπρὸ παράδειγμα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς μιᾶς ἀφηρημένης μαθηματικῆς θεωρίας.

Οἱ μαθηματικοὶ εἶναι πολλὲς φορὲς σὲ θέση νὰ ἀποδεικνύουν ὅτι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχει παράγοντες (εἶναι δηλαδὴ σύνθετος), χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι σὲ θέση νὰ μποροῦν νὰ βροῦν τοὺς παράγοντες αὐτούς. Τὸ περίεργο, θὰ ἔλεγε κανείς, αὐτὸ φαινόμενο χρησίμευσε (ἀπ' τὸ 1976) ὡς βάση γιὰ τὴν κατασκευὴ κρυπτογραφικῶν κωδίκων. Ἡ γενικὴ ἰδέα εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὁ κατασκευαστὴς τοῦ κώδικος διαλέγει δύο παρὰ πολὺ μεγάλους πρώτους ἀριθμοὺς α και β, καὶ θεωρεῖ τὸ γινόμενό τους, αβ= γ, ποὺ εἶναι, προφανῶς, ἕνας σύνθετος ἀριθμός. Ὁ κατασκευαστὴς τοῦ κώδικος γνωρίζει, φυσικά, ποιοὶ εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ γ, ἐνῶ αὐτὸς ποὺ ἐπιχειρεῖ νὰ παραβιάσει τὸν κώδικα, μολονότι μπορεῖ (χρησιμοποιώντας γνωστὰ θεωρήματα ποὺ ὀφείλονται στὸν Εὐκλείδη καὶ στὸν Fermat) νὰ διαπιστώσει ὅτι ὁ γ εἶναι σύνθετος, δὲν μπορεῖ ὅμως νὰ βρεῖ τοὺς παράγοντες α καὶ β τοῦ γ. Ἡ παραβίαση ὅμως τοῦ κώδικος ἐξαρτᾶται ἀκριβῶς ἀπ' τὴ γνώση τῶν παραγόντων α καὶ β.

Τὸ ἑπόμενο βῆμα τοῦ κατασκευαστοῦ τοῦ κώδικος εἶναι νὰ ἐπιλέξει ἕναν ἀκόμα πρῶτο ἀριθμό, δ, ὁ ὁποῖος νὰ μὴν διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς ἀριθμοὺς α-1 καὶ β-1. Τὸ μήνυμα ποὺ ἀποστέλλεται μὲ τὸν κώδικα συντίθεται μὲ τὴν χρήση τῶν ἀριθμῶν α, β, γ καὶ δ. Δὲν θὰ ὑπεισέλθω στὶς τεχνικὲς λεπτομέρειες τοῦ τρόπου συνθέσεως τοῦ μηνύματος. Πάντως ὁ τρόπος συνθέσεως τοῦ μηνύματος καθὼς καὶ οἱ ἀριθμοὶ γ και δ, γίνονται δημοσίως γνωστοί, μποροῦν μάλιστα νὰ δημοσιευθοῦν στὴν πρώτη σελίδα μιᾶς ἐφημερίδας (πράγμα ποὺ ὄντως ἔχει γίνει) καὶ αὐτὸς εἶναι ἐξάλλου ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο οἱ κώδικες αὐτοὶ καλοῦ-

νται «Δημόσιοι Κρυπτογραφικοὶ Κώδικες» (Public Key Codes).

Βεβαίως θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ κάνει τὴ σκέψη: ἀφοῦ ἡ παραβίαση τοῦ κώδικος ἐξαρτᾶται ἀπ' τὴν εὕρεση τῶν ἀριθμῶν α και β, γιατί νὰ μὴ βροῦμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μὲ τὴ χρήση ἑνὸς ὑπολογιστῆ, ἀφοῦ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, τὸ γ δηλαδή, μᾶς εἶναι γνωστό. Ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι ὅτι, ὅταν οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι «πολὺ μεγάλοι» (π.χ. μὲ 200 ἢ καὶ περισσότερα ψηφία) διαπιστώθηκε ὅτι καὶ ὁ ταχύτερος ὑπολογιστὴς τότε, εἶναι ἀνίκανος νὰ λύσει τὸ πρόβλημα αὐτό. Θὰ ἦταν, ἴσως, ἐνδεικτικὸ τῆς δυσκολίας ποὺ δημιουργοῦν στοὺς ὑπολογιστὲς οἱ μεγάλοι ἀριθμοί, ἂν σκεφθοῦμε ὅτι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς μὲ 80 ψηφία εἶναι περίπου τῆς ἴδιας τάξεως μεγέθους μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀτόμων ποὺ πιστεύεται ὅτι ὑπάρχουν στὸ φυσικὸ Σύμπαν, καὶ φυσικὰ εἶναι περιττὸ νὰ ἀναφέρουμε ὅτι ἕνας ὑπολογιστὴς ἀπαρτίζεται ἀπὸ πολὺ λιγότερα μέρη ἀπ' ὅ,τι εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων τοῦ ὁρατοῦ Σύμπαντος. Ἀπ' τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι, ὑπὸ τὶς σημερινὲς συνθῆκες, οἱ Δημόσιοι Κρυπτογραφικοὶ Κώδικες εἶναι ἀπαραβίαστοι. Ὅμως μιὰ νέα ἰδέα, ποὺ μπορεῖ νά 'ρθεῖ ἀπ' ὁπουδήποτε, θὰ μποροῦσε, ἀνὰ πᾶσα στιγμή, νὰ μεταβάλει ριζικὰ τὸ χαρακτήρα τοῦ θεωρουμένου προβλήματος. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ θὰ ἦταν ἴσως φρονιμότερο νὰ μὴ λέει κανεὶς ὅτι οἱ Δημόσιοι Κρυπτογραφικοὶ Κώδικες εἶναι ἀπαραβίαστοι, ἀλλὰ ὅτι δὲν ἔχουν μέχρι σήμερα παραβιασθεῖ. Ἐξάλλου εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ ἐκβάσεις ἀρκετῶν πολεμικῶν ἐνεργειῶν (μαχῶν) κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου ἐπηρεάσθηκαν ἀποφασιστικὰ ἀπ' τὴν παραβίαση ὁρισμένων κρυπτογραφικῶν κωδίκων οἱ ὁποῖοι ὡς τότε ἐθεωροῦντο ἀπαραβίαστοι. Αὐτὴ εἶναι, σὲ πολὺ γενικὲς γραμμές, ἡ βασικὴ ἰδέα τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀφηρημένης θεωρίας ἀριθμῶν στὴν κατασκευὴ τῶν Δημοσίων Κρυπτογραφικῶν Κωδίκων.

Γενικότερα ὅμως, προκαλεῖ κατάπληξη τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ πιὸ ἀφηρημένοι κλάδοι τῶν Μαθηματικῶν, ὅπως εἶναι ἡ Γεωμετρία, ἡ Θεωρία Ἀριθμῶν, ἡ Μαθηματικὴ Λογική, ἔχουν ἀργὰ ἢ γρήγορα μεγάλες πρακτικὲς ἐφαρμογές.

Τὸ ὑλικὸ Σύμπαν, ἡ ἁρμονία ποὺ ὑπάρχει σ' αὐτό, φαίνεται ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ, δὲν μπορεῖ νὰ κατανοηθεῖ, χωρὶς τὴ γλώσσα τῶν Μαθηματικῶν.

Οἱ μαθηματικὲς δομὲς ποὺ παρατηροῦνται στοὺς φυσικοὺς νόμους εἶναι, σχεδὸν πάντα, δομὲς ποὺ δόθηκαν ἀπ' τοὺς μαθηματικοὺς πολὺ πρὶν νὰ ὑπάρξει καὶ ἡ παραμικρὴ σκέψη ὅτι αὐτὲς θὰ χρησίμευαν κάποτε στὸ νὰ περιγράψουν θαυμάσια τὴν Φύση, τὴ ἁρμονία ποὺ παρατηρεῖται σ' αὐτήν.

Ἀποτελεῖ μυστήριο θὰ ἔλεγε κανείς: πῶς συμβαίνει ὁ φυσικὸς νὰ διαπιστώνει ὅτι ὁ μαθηματικὸς εἶχε ἤδη περάσει ἀπ' ἐκεῖ ποὺ αὐτὸς βρίσκεται τώρα. Εἶναι σὰν νὰ λέμε ὅτι, ὅταν ὁ Neil Armstrong ἔφθασε στὴ Σελήνη καὶ κατέβηκε ἀπ' τὸ διαστημόπλοιο, βρῆκε *μπροστά του, ἐπάνω στὴ στάχτη τῆς Σελήνης, ἴχνη ἀπὸ πατημασιὲς τοῦ Jules Verne.*

Ἕνα περίφημο παράδειγμα, σχετικὸ μὲ τὸ φαινόμενο αὐτὸ ποὺ μόλις ἀναφέραμε, ἀποτελεῖ ἡ ἀνάπτυξη τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας ἀπ' τὸν Einstein κατὰ τὰ ἔτη 1905 ἕως 1916.

Εἶναι ἴσως γνωστὸ σὲ ὅλους, ὅτι ἡ οὐσία τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας ἔγκειται στὸ ὅτι, τὸ φαινόμενο τῆς βαρύτητας εἶναι ἁπλῶς ἕνα «σύμπτωμα» τῆς καμπυλότητας τοῦ χώρου-χρόνου. Ἡ ἀνακάλυψη αὐτὴ ὀφείλεται βέβαια στὸν Einstein, ὅμως ἡ μαθηματικὴ θεωρία τῆς καμπυλότητας τοῦ χώρου, ποὺ εἶναι πολὺ παλιά, δὲν ὀφείλεται σ' αὐτόν. Τὸ ὅτι καὶ ὁ τριδιάστατος χῶρος μπορεῖ νὰ δομηθεῖ ὥστε νὰ ἔχει καμπυλότητα ἦταν γνωστὸ πολλὲς δεκαετίες πρὸ τοῦ Einstein, τὸν 19ο αἰώνα, καὶ ὀφείλεται αὐτὸ στὸν Riemann ὁ ὁποῖος συνέχισε τὸ ἔργο τῶν Gauss, Bolyai καὶ Lobachevsky. Τὰ κίνητρα ποὺ ὤθησαν τοὺς μαθηματικοὺς αὐτοὺς στὶς ἀνακαλύψεις τους δὲν εἶχαν βέβαια καμιὰ ἀπολύτως σχέση μὲ τὴ βαρύτητα. Ἦταν κίνητρα ἐσωμαθηματικὰ ποὺ ξεκίνησαν ἀπ' τὴν προσπάθεια νὰ διαπιστωθεῖ ποιὰ ἀπ' τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας ἦταν ἀνεξάρτητα τῶν ὑπολοίπων ἀξιωμάτων της. Παρατηρεῖται δηλαδὴ ἐδῶ τὸ φαινόμενο: μαθηματικὲς δομὲς ποὺ ἀνακαλύφθηκαν σὲ ἀνύποπτο χρόνο, νὰ χρησιμεύουν στὸ νὰ κατανοήσομε ὑπέροχα μυστικὰ τῆς Φύσης, σὰν αὐτὰ ποὺ ἐκφράζει ἡ Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας.

Ὁ Einstein δὲν ἀνεκάλυψε ἐκ νέου τὴ θεωρία τῆς καμπυλότητας τοῦ χώρου. Τὴν ἔμαθε ἀπὸ κάποιο φίλο του καὶ ἦταν πανευτυχὴς γιὰ τὴν ἀνακάλυψη αὐτὴ τῶν ἄλλων, ἀνακάλυψη ποὺ τοῦ προσφέρονταν στὴν κατάλληλη στιγμή.

Ἕνα δεύτερο παράδειγμα σχετικὸ μὲ τὸ φαινόμενο τοῦ μαθηματικοῦ ποὺ «προηγεῖται» τοῦ φυσικοῦ, εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Τὸ 1970 ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Texas (Austin, USA) Steve Weimberg (Βραβεῖο Nobel Φυσικῆς 1979) καὶ οἱ συνεργάτες του, προσπαθοῦσαν νὰ ὑπολογίσουν τὸ πλῆθος τῶν καταστάσεων ποὺ προκύπτουν ὅταν πάλλεται ἕνα νῆμα δοθείσας μάζας. Ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ εἶχε, κατὰ τὸν Weimberg, σπουδαῖες ἐπιπτώσεις σὲ θέματα ποὺ ἀφοροῦσαν τὴ Θερμοδυναμική. Τελικὰ διαπιστώθηκε ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἦταν στενότατα συνδεδεμένος μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι γνωστὸς ὡς Partitio numerorum καὶ παριστάνει κατὰ πόσους τρόπους ἕνας θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἄθροισμα ἄλλων θετικῶν ἀκεραίων. Π.χ. ὁ 2 γράφεται μόνο κατὰ ἕνα τρόπο 1 + 1. Ὁ 3 γράφεται, 1 + 1 + 1 ἢ 2 + 1, κ.ο.κ. Αὐτὸ ποὺ ἐνδιέφερε τὸν Weimberg ἦταν ἡ συμπεριφορὰ τοῦ Partitio numerorum ὅταν οἱ ἀκέραιοι ἦταν πολὺ μεγάλοι, ἀντιστοιχοῦντες σὲ πολὺ μεγάλες μάζες. Ἀποκαλύφθηκε ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶχε ἤδη λυθεῖ τὸ 1918 ἀπ' τὸν G. H. Hardy, τὸν ὁποῖο ἀνέφερα καὶ προηγουμένως, καὶ τὸ συνάδελφό του Ramanujan. Ὑ-

πενθυμίζω ὅτι ὁ Hardy εἶχε «προφητεύσει» ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν του δὲν θὰ εἶχαν καμιὰ πρακτικὴ ἐφαρμογὴ στὸ μέλλον!

Θὰ μπορούσαμε νὰ συνεχίσουμε μὲ ἕνα τρίτο καὶ σπουδαιότατο παράδειγμα ποὺ ἀποτελεῖ ἡ Θεωρία τῶν Ὁμάδων, τοῦ E. Galois, στὶς ἀρχὲς τοῦ 19ου αἰώνα, ποὺ κι' αὐτὴ ἐφευρέθηκε γιὰ νὰ ἱκανοποιήσει ἐσωτερικὲς ἀνάγκες τῶν Μαθηματικῶν, καὶ μόνο ὕστερα ἀπὸ πολλὰ χρόνια ὁ φυσικὸς ἀνεκάλυψε ὅτι ἡ θεωρία αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ μαθηματικὸ ἐργαλεῖο γιὰ τὴν περιγραφὴ τοῦ θεμελιώδους προβλήματος τῆς Φυσικῆς ποὺ εἶναι ἡ εὕρεση τῶν συμμετριῶν ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος. Ὅμως ὁ χρόνος δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐπεκταθοῦμε περισσότερο στὴν ἀνάπτυξη τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ.

Καὶ τώρα, ὕστερα ἀπ' ὅσα ἐκθέσαμε παραπάνω, εἶναι φυσικὸ νὰ ἐπανέλθουμε στὸ ἐρώτημα ποὺ θίξαμε προηγουμένως καὶ ποὺ εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Πῶς, κατὰ κανόνα, συμβαίνει, ἀφηρημένα Μαθηματικά, ποὺ ἀναπτύχθηκαν ἀποκλειστικὰ καὶ μόνο γιὰ τὸ κάλλος τους ἢ μὲ σκοπὸ νὰ ἐξυπηρετήσουν ἐσωμαθηματικὲς ἀνάγκες, νὰ ἔχουν ἀργὰ ἢ γρήγορα τόσο μεγάλες ἐφαρμογὲς καὶ νὰ χρησιμεύουν γιὰ τὴν πλήρη περιγραφὴ τοῦ φυσικοῦ Κόσμου, τῆς ἁρμονίας ποὺ διακρίνουμε σ' αὐτόν;

Βεβαίως ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἔχει ἀσφαλῶς κάποια σχέση μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ἐρευνητὴς μαθηματικὸς ἔχει τὴν τάση νὰ διακρίνει στὸ πρόβλημα ποὺ τὸν ἀπασχολεῖ τὴν οὐσιαστικὴ καὶ κρίσιμη ὄψη του, ἀπομακρύνοντας τὰ στοιχεῖα ἐκεῖνα ποὺ εἶναι δευτερούουσας σημασίας, πράγμα ποὺ τοῦ ἐπιτρέπει νὰ ἀνακαλύπτει τὸ κοινὸ ἐκεῖνο σημεῖο θεωρήσεως ἀπ' ὅπου, προβλήματα ποὺ ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνονται τελείως διαφορετικὰ καὶ ἄσχετα, νὰ διαπιστώνεται ὅτι εἶναι στενὰ συνδεδεμένα μεταξύ τους. Ὅμως ἡ ἄποψη αὐτὴ δὲν ἀποτελεῖ ἐπαρκῆ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημά μας.

Ἐπίσης ἀπορρίπτεται καὶ ἡ ἀπάντηση ποὺ μερικοὶ φυσικοὶ προτείνουν, ὅτι δηλαδὴ οἱ μαθηματικοὶ (ἢ τουλάχιστον μερικοὶ ἀπ' αὐτοὺς) ἔχουν πουλήσει τὴν ψυχή τους στὸ διάβολο μὲ ἀντάλλαγμα νὰ τοὺς πληροφορεῖ αὐτὸς ἐγκαίρως, ὅσο γίνεται νωρίτερα, σχετικὰ μὲ τὸ εἶδος τῶν μαθηματικῶν ποὺ θὰ ἔχουν σπουδαῖες ἐφαρμογὲς στὸ μέλλον!

Γνωρίζω πολλοὺς μαθηματικούς, ὅλοι ὅμως εἶναι ἀνώτεροι πάσης «ὑποψίας»!

Ὁ καθηγητὴς μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard (USA) Andrew Gleason δίνει τὴν ἑξῆς ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα ποὺ θέσαμε παραπάνω:

Τὰ Μαθηματικά, *ὑποστηρίζει ὁ Gleason,* εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῆς Τάξεως, τὸ δὲ ἀντικείμενό τους εἶναι ἡ ἀνακάλυψη, ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ κατανόηση τῆς τάξεως ποὺ βρίσκεται στὴ βάση πολλῶν, ἐκ πρώτης ὄψεως διαφορετικῶν μεταξύ τους, καὶ πολυπλόκων καταστάσεων. *Ἐδῶ μὲ τὴν λέξη «τάξη» ὁ Gleason ἐννοεῖ ἀσφαλῶς «ἁρμονία».* Τὰ κύρια ἐργαλεῖα-ὅπλα τῶν μαθηματικῶν, *συνεχίζει ὁ Gleason,* εἶναι ἔννοιες ποὺ καθιστοῦν δυνατὴ τὴν περιγραφὴ αὐτῆς τῆς τάξεως. Ἀκριβῶς ἐπειδὴ ἐπὶ αἰῶνες οἱ μαθηματικοὶ προσπαθοῦν νὰ ἀνακαλύψουν τὶς πιὸ κατάλληλες ἔννοιες ποὺ θὰ τοὺς ἐπέτρεπαν νὰ περιγράψουν, νὰ διαλευκάνουν, νὰ ἀνακαλύψουν τὴν ὑπάρχουσα τάξη σὲ καταστάσεις σκοτεινὲς καὶ πολύπλοκες, τὰ ἴδια αὐτὰ ἐργαλεῖα μποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ γιὰ τὴν περιγραφὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ, τοῦ φυσικοῦ Κόσμου. Διότι, *καταλήγει ὁ Gleason,* ὁ φυσικὸς αὐτὸς Κόσμος, εἶναι ἕνα ἀπαύγασμα, μιὰ ἐπιτομή, μιᾶς πολυσχιδοῦς καταστάσεως στὴν ὁποία ὅμως ὑπάρχει κρυμμένη, ὑποβόσκει, μιὰ πολὺ μεγάλη δόση ἁρμονίας.

Ὁποιοιδήποτε ὅμως καὶ ἂν εἶναι οἱ λόγοι ποὺ συνηγοροῦν γιὰ τὴ σπουδαιότητα ποὺ ἔχουν τὰ Μαθηματικὰ στὴν Κοινωνία, ἀποτελεῖ γεγονὸς ὑψίστης καὶ ζωτικῆς σημασίας, μὲ πολὺ σοβαρὲς συνέπειες, τὸ νὰ γίνει ἀντιληπτὸ ἀπ' ὅλους, καὶ εἰδικότερα ἀπ' τοὺς ἁρμοδίους, ὁ ἰδιότυπος τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖο τὰ Μαθηματικὰ ἀναπτύσσονται, καὶ ἰδίως τὰ λεγόμενα «Καθαρὰ Μαθηματικά» ὅπου μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι παρατηρεῖται μιὰ ὑποτονικότητα στὴ χώρα μας, μολονότι ὁ καθαρὸς μαθηματικὸς ἔχει ἀνάγκη μόνο ἀπὸ μολύβι, χαρτί, καλὴ βιβλιοθήκη στὴ διάθεσή του, καὶ σύνδεση μὲ τὰ μεγάλα διεθνῆ κέντρα ἐρευνῶν.

Τὸ νὰ ὑστερεῖ ἡ χώρα μας, ἔναντι ἄλλων χωρῶν, στὸν τεχνικὸ καὶ τεχνολογικὸ τομέα εἶναι εὐνόητο καὶ δικαιολογημένο, ἀφοῦ δὲν διαθέτουμε τὸν πλοῦτο καὶ τὶς πρῶτες ὕλες. Ὅμως στὸν τομέα τῆς καθαρῆς διανόησης, δηλαδὴ στὸν θεωρητικὸ τομέα, ὅπως εἶναι τὰ Καθαρὰ Μαθηματικά, ἡ Ἑλλάδα θὰ μποροῦσε νὰ διαπρέψει, γιατὶ ἐδῶ οἱ «πρῶτες ὕλες» ὑπάρχουν.

Ἡ μαθηματικὴ ἔρευνα χρειάζεται σοβαρὴ ἐνθάρρυνση, οὐσιαστικὴ καὶ συνεχῆ ὑποστήριξη, καλὴ ὀργάνωση καὶ πειθαρχία. Πρέπει αὐτὴ νὰ ἐκτείνεται σὲ εὐρὺ φάσμα, νὰ εἶναι ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ πρωτότυπη μὲ προοπτικὲς μακροῦ βεληνεκοῦς, καθόσον εἶναι λογικὸ νὰ ὑποθέσει κανεὶς ὅτι ἡ Ἱστορία θὰ ἐξακολουθήσει νὰ ἐπαναλαμβάνει ἑαυτήν, καὶ ὅτι ὡς ἐκ τούτου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ προβλέψουμε σήμερα, ποιὲς θὰ εἶναι οἱ χρήσιμες καὶ βαθύτερες ἐφαρμογὲς τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας, ἀφοῦ οἱ ἐφαρμογὲς αὐτὲς ἐξαρτῶνται καὶ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα ποὺ θὰ ἐπακολουθήσουν στὸ μέλλον.

Εἶναι φυσικὸ τὸ μεγαλύτερο μέρος τῆς μαθηματικῆς ἔρευνας νὰ στρέφεται πρὸς τὴν ἐπίλυση ζωτικῶν προβλημάτων ποὺ ἀπασχολοῦν τὸν κλάδο, ὅμως ἐκ παραλλήλου δὲν πρέπει νὰ ξεχνᾶμε ὅτι ἡ κατεύθυνση ποὺ ἀκολουθοῦν τὰ Μαθηματικὰ σταθερῶς μεταβάλλεται καὶ ὡς ἐκ τούτου νέα ταλέντα, προικισμένοι μαθηματικοί, πρέπει νὰ ἐνθαρρύνονται στὶς πρωτοποριακές τους ἔρευνες, ἀσχέτως ἂν ἡ χρησιμότητα τῶν ἐρευνῶν αὐτῶν σήμερα δὲν γίνεται ἢ γίνεται ἐν μέρει μόνο ἀντιληπτή, ἐνδέχεται ὅμως αὐτὲς νὰ εἰσαγάγουν νέες ἀπό-

ψεις ἢ νὰ ἀνοίξουν νέους δρόμους στὸ μέλλον.

Τὰ τελευταῖα 40 ἢ 50 χρόνια, ποὺ ἀποτελοῦν μιὰ τόσο γόνιμη ἐποχὴ τῶν Μαθηματικῶν, διαπιστώθηκε ὅτι ὡς διὰ μαγείας, κάθε κλάδος, κάθε περιοχὴ τῶν Μαθηματικῶν σχετίζεται, συνδέεται μὲ ὅλες τὶς ἄλλες περιοχές. Ἐπειδὴ ὁ χρόνος δὲ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ σχολιάσουμε ἐκτενέστερα τὸν «συνδετικὸ αὐτὸ ἱστό», θὰ περιορισθῶ στὸ νὰ διηγηθῶ μόνο, πολὺ σύντομα, τὴν ἱστορία τοῦ κλάδου ἐκείνου τῶν Μαθηματικῶν ποὺ ὀνομάζεται «Ἀνάλυση τοῦ Fourier» ἢ «Ἁρμονικὴ Ἀνάλυση», ὅπου καὶ ἐμπίπτει ἕνα μεγάλο μέρος τοῦ ἐρευνητικοῦ μου ἔργου. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἐξιστόρηση αὐτὴ τῶν γεγονότων ἀποκαλύπτει, γιὰ μιὰ ἀκόμη φορά, ἕνα φαινόμενο ποὺ πολὺ συχνὰ παρατηρεῖται, ὅτι δηλαδὴ μαθηματικὲς θεωρίες ποὺ ἐπινοοῦνται μὲ σκοπὸ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς συγκεκριμένου προβλήματος ἀποδεικνύονται, μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου, πολὺ πιὸ σπουδαῖες καὶ χρήσιμες ἀπὸ αὐτὸ τοῦτο τὸ πρόβλημα ποὺ ἐπέλυσαν.

Ἡ ἱστορία ἀρχίζει περίπου τὸ 1740 μ.Χ., ὅταν οἱ μαθηματικοὶ D. Bernouilli, D'Alembert, Lagrange καὶ Euler, ὁδηγούμενοι ἀπὸ προβλήματα τῆς μαθηματικῆς Φυσικῆς, κατέληξαν στὸ πρόβλημα τῆς παραστάσεως μιᾶς τυχούσας συνάρτησης, 2π-περιοδικῆς, ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος μιᾶς τριγωνομετρικῆς σειρᾶς. Οἱ συζητήσεις ποὺ ἄρχισαν νὰ γίνονται γύρω ἀπ' τὸ θέμα αὐτό, ἀπετέλεσαν τὸ σπινθήρα γιὰ τὸ ξεκίνημα μιᾶς κρίσιμης περιόδου στὴν ἀνάπτυξη τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως.

Πιὸ συγκεκριμένα, στὴ συνεδρία τῆς 21/12/1807 τῆς Ἀκαδημίας Ἐπιστημῶν τῆς Γαλλίας, ὁ ἡλικίας 39 ἐτῶν μαθηματικὸς Jean Baptiste Joseph Fourier, σὲ ἐργασία του σχετικὴ μὲ τὴ μετάδοση τῆς θερμότητας στὰ στερεὰ σώματα, ὑπεστήριξε τὴ «θέση» ὅτι, ὁποιαδήποτε συνάρτηση ὁρισμένη σὲ ἕνα πεπερασμένο διάστημα, μπορεῖ νὰ ἀναπτυχθεῖ σὲ τριγωνομετρικὴ σειρά. Οἱ ἀκαδημαϊκοί, οἱ παρόντες στὴ συνεδρία αὐτή, ὑποδέχθηκαν τὴ «θέση» αὐτὴ τοῦ Fourier μὲ μεγάλη ἐπιφυλακτικότητα. Οἱ κριτὲς τῆς ἀνακοινώσεως ἦταν οἱ Lagrange, Laplace καὶ Legendre, οἱ ὁποῖοι καὶ τὴν ἀπέρριψαν. Ἐκ παραλλήλου ὅμως, ἡ Ἀκαδημία γιὰ νὰ ἐνθαρρύνει τὸν Fourier στὴν προσπάθειά του καὶ νὰ τὸν προτρέψει σὲ μιὰ προσεκτικότερη καὶ σαφέστερη ἀνάπτυξη τῶν ἰδεῶν του, ἀνεκήρυξε τὸ πρόβλημα τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητας ὡς τὸ ἀντικείμενο μεγάλου βραβείου ποὺ θὰ ἀπενέμετο τὸ 1812.

Τὸ 1811 ὁ Fourier ὑπέβαλε πάλι τὴν ἴδια ἐργασία βελτιωμένη. Ἡ ἐπιτροπὴ κρίσεως, μεταξὺ τῶν μελῶν τῆς ὁποίας ἦταν καὶ τὰ τρία τῆς προαναφερθείσας συνεδρίας, μολονότι ἀπένειμε στὸν Fourier τὸ μεγάλο βραβεῖο, δὲν ἐνέκρινε τὴν δημοσίευση τῆς ἐργασίας στὰ Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας μὲ τὸ αἰτιολογικὸ ὅτι αὐτὴ ὑστεροῦσε ἀπὸ πλευρᾶς μαθηματικῆς αὐστηρότητας.

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ἔγινε δεκτὴ ἡ δημοσίευση τῆς ἐργασίας του στὰ Πρακτικὰ τῆς 'Ακαδημίας, ὁ Fourier συνέχισε μὲ πεῖσμα, πίστη καὶ αὐτοπεποίθηση τὴν ἔρευνά του ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητας, τὸ δὲ 1822 δημοσιεύθηκε ἡ πραγματεία του μὲ τίτλο «Théorie Analytique de la Chaleur», ἡ ὁποία ἔκτοτε παραμένει ὡς ἕνα σπουδαιότατο κλασσικὸ μαθηματικὸ σύγγραμμα καὶ ἀποτελεῖ τὴν κύρια πηγὴ τῶν ἰδεῶν τοῦ Fourier.

Οἱ μέθοδοι τῆς «'Αρμονικῆς 'Αναλύσεως» ἢ ὅπως ἀλλιῶς λέγεται, τῆς «'Αναλύσεως τοῦ Fourier», κατέληξαν νὰ παίξουν ἕνα παρὰ πολὺ μεγάλο καὶ σπουδαῖο ρόλο σὲ ὅλους τοὺς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Φυσικῶν 'Επιστημῶν, ρόλο πολὺ πιὸ σπουδαῖο ἀπ' ὅ,τι ἦταν ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος μεταδόσεως τῆς θερμότητας γιὰ τὸ ὁποῖο, πρόβλημα, καὶ εἶχε ἐπινοηθεῖ.

'Η 'Αρμονικὴ 'Ανάλυση ἀποτελεῖ ἕνα τεράστιο αὐτοτελῆ κλάδο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν.

'Επιπλέον ἡ Θεωρία τῶν Διαφορικῶν 'Εξισώσεων, ἡ Θεωρία τῶν 'Ομάδων, ἡ Θεωρία Πιθανοτήτων, ἡ Στατιστική, ἡ Γεωμετρία, ἡ Θεωρία 'Αριθμῶν, γιὰ νὰ ἀναφέρω μερικὲς μόνο ἀπ' τὶς θεωρίες, χρησιμοποιοῦν τὴν τεχνικὴ τοῦ Fourier γιὰ νὰ ἀναλύσουν συναρτήσεις στὶς λεγόμενες «θεμελιώδεις συχνότητές» τους.

"Οταν τὸ 1873 ὁ Maxwell περιέγραψε τὰ ἠλεκτρομαγνητικὰ κύματα μὲ τὶς περιώνυμες ἐξισώσεις ποὺ φέρουν τὸ ὄνομά του, ἡ «'Ανάλυση τοῦ Fourier» κατέστη μιὰ ἀπ' τὶς μεθόδους-κλειδὶ γιὰ τὴ μελέτη τῶν κυμάτων αὐτῶν καὶ τῶν ἁρμονικῶν συνιστωσῶν τους, ὅπως εἶναι οἱ ἀκτίνες-x, τὸ ὁρατὸ φῶς, τὰ μικροκύματα, τὰ ραδιοκύματα κ.ἄ.

Στὸν αἰώνα ποὺ διατρέχουμε ἡ «'Ανάλυση τοῦ Fourier» ἔπαιξε βασικὸ ρόλο στὸ νὰ γίνει ἀντιληπτὴ ἡ θεωρία τῶν quanta καὶ κατὰ συνέπεια ὅλη ἡ σύγχρονη Φυσικὴ καὶ Χημεία.

Θὰ μποροῦσα νὰ συνεχίσω ἀπαριθμώντας καὶ ἄλλες ἐφαρμογὲς τῆς «'Αναλύσεως τοῦ Fourier» στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες. Θὰ ἦταν παράλειψη ὅμως νὰ μὴν ἀναφέρω ὅτι οἱ ἐφαρμογὲς τῆς «'Αναλύσεως τοῦ Fourier» στὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἐξίσου πολλὲς καὶ σπουδαῖες μὲ ἐκεῖνες στὶς ἄλλες ἐπιστῆμες.

"Οπως ὅλοι οἱ ἐπιστήμονες, οἱ μαθηματικοὶ ἐρευνοῦν ἐπιζητώντας τὴν εὕρεση νέων μέσων, νέων ἐργαλείων ποὺ θὰ λύσουν τὰ θεωρητικά τους προβλήματα. Καθὼς ἐπανειλημμένως ἐτόνισα, συμβαίνει συχνά, τεχνικὲς ποὺ ἐφευρέθηκαν γιὰ νὰ ἐπιλύσουν κάποιο ἀφηρημένο μαθηματικὸ πρόβλημα νὰ ἐφαρμόζονται ἀργότερα γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς μεγάλης ποικιλίας ἄλλων προβλημάτων. "Αν κάποιος δὲν πείθεται γιὰ τὴν ἀλήθεια τοῦ ἰσχυρισμοῦ αὐτοῦ, δὲν ἔχει παρὰ νὰ ἐπισκεφθεῖ τὴ βιβλιοθήκη τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος

ἑνὸς μεγάλου Πανεπιστημίου, καὶ νὰ ζητήσει νὰ ἐξετάσει τὶς καρτέλες ποὺ ἀκολουθοῦν τὴν ἔνδειξη «Fourier». Στὴ βιβλιοθήκη τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harvard (USA) π.χ., ὑπάρχουν 212 καρτέλες μὲ τὴν ἔνδειξη αὐτή, ἐκ τῶν ὁποίων ἕνας μεγάλος ἀριθμὸς φέρει τὴν ἐπικεφαλίδα «Ἀνάλυση τοῦ Fourier» στή: Θεωρία Πιθανοτήτων, Θεωρία Συναρτήσεων πολλῶν μιγαδικῶν μεταβλητῶν, Θεωρία τῶν τοπικῶς συμπαγῶν ἀβελιανῶν ὁμάδων, Γεωμετρικὴ Θεωρία τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων, κ.ἄ.

Θὰ ὁλοκληρώσω τὴ σύντομη αὐτὴ ἱστορία τῆς «Ἀναλύσεως τοῦ Fourier» μὲ τὴν ἑξῆς παρατήρηση:

Ὁ ἰσχυρισμὸς τοῦ Fourier, ὅτι μιὰ περιοδικὴ συνάρτηση μπορεῖ νὰ ἀναπτυχθεῖ σὲ τριγωνομετρικὴ σειρά, ἀποδείχθηκε ὅτι ἦταν σωστὸς γιὰ ἕνα τεράστιο ἀριθμὸ συναρτήσεων, ὄχι ὅμως γιὰ ὅλες. Ἔτσι ἡ ἐπιφυλακτικότητα ποὺ εἶχαν δείξει οἱ κριτὲς τῆς ἀνακοινώσεως τοῦ Fourier στὴ συνεδρία τῆς 21/12/1807 δὲν ἦταν ἀδικαιολόγητη.

* * *

Τὰ ὅσα ἐξέθεσα μέχρι στιγμῆς ἀποτελοῦν μιὰ προσπάθεια, μιὰ ἀπόπειρα θὰ ἔλεγα, νὰ παρουσιασθοῦν τὰ Μαθηματικὰ ὡς τὸ μοναδικὸ ἐκεῖνο μέσο γιὰ τὴν κατανόηση καὶ περιγραφὴ τῆς ἁρμονίας τὴν ὁποία ὁ ἄνθρωπος πιστεύει ὅτι ἀνακαλύπτει στὴ Φύση. Στὴν προσπάθειά μου αὐτὴ μίλησα γιὰ τὶς ἐφαρμογὲς ποὺ ἀργὰ ἢ γρήγορα ἀκολουθοῦν τὴν μαθηματικὴ ἀνακάλυψη, τονίζοντας ἔτσι καὶ τὴν ὠφελιμιστικὴ ἀξία τῶν Μαθηματικῶν.

Δὲν θὰ ἤθελα ὅμως νὰ κλείσω τὴν ὁμιλία αὐτὴ χωρὶς νὰ ἀναφερθῶ, ἔστω καὶ σύντομα, σὲ μιὰ ἄλλη ὄψη τῶν Μαθηματικῶν, τὴ σπουδαιότερη κατὰ τὴ γνώμη μου, ὅπου καταφαίνεται ὁ αὐτόνομος χαρακτήρας τους, ὅτι δηλαδὴ τὰ Μαθηματικὰ ἀποτελοῦν αὐτοσκοπὸ καὶ συντελοῦν στὴ δημιουργία καὶ διατήρηση ὑψηλῶν καὶ εὐγενῶν συνηθειῶν στὸ ἀνθρώπινο πενῦμα, καὶ ὅτι δὲν εἶναι ἁπλῶς μέσο τεχνικῆς παιδείας γιὰ τοὺς μηχανικούς. Εἶναι ἀπαραίτητο νὰ γίνει ἀντιληπτὸς ὁ αὐτόνομος αὐτὸς χαρακτήρας τῶν Μαθηματικῶν, γιὰ νὰ κατανοηθεῖ ἡ καλλιτεχνική τους φύση, καθὼς καὶ ἡ περίοπτη θέση ποὺ κατέχουν μεταξὺ τῶν Καλῶν Τεχνῶν.

Θὰ ἦταν μεγάλο λάθος νὰ πιστέψει κανεὶς ὅτι ὁ σκοπὸς τῶν Μαθηματικῶν εἶναι μόνο ὠφελιμιστικός, ὅτι παρέχουν δηλαδὴ ἁπλῶς τὸ μηχανισμὸ τῆς ζωῆς. Διότι, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Bertrand Russel (ὁ ὁποῖος πολλὰ καὶ σοφὰ μᾶς διδάσκει ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ), ὁ ἄνθρωπος δὲν ἐπιθυμεῖ ἁπλῶς τὸ ζεῖν, ἀλλὰ καὶ τὴν τέχνη τοῦ ζεῖν ποὺ ἔγκειται στὴ θεώρηση, μελέτη καὶ ἀφοσίωσή του σὲ μεγάλα ἐπιτεύγματα.

Ὁ Πλάτων ὑπεστήριζε ὅτι στὴ μελέτη τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν διακρίνει κανεὶς κάτι τὸ «θεῖο». Κατὰ δὲ τὸν Russel, ὁ Πλάτων ὑπῆρξε ὁ μόνος ποὺ μπόρεσε νὰ ξεχωρίσει ποιὰ στοιχεῖα τῆς ἀνθρώπινης ζωῆς ἀξίζουν μιὰ θέση στὸν Παράδεισο, στὴν Αἰωνιότητα.

Ὑπάρχει στὰ Μαθηματικά, λέει ὁ Πλάτων (Νόμοι 818), κάτι «τὸ ἀπαραίτητο» κάτι ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ παραμερισθεῖ, καὶ ποὺ ἂν δὲ κάνω λάθος, συνεχίζει ὁ Πλάτων, εἶναι μιὰ «θεϊκὴ ἀναγκαιότητα» ἄσχετη μὲ τὶς πρακτικὲς ἐφαρμογὲς στὴν ἀνθρώπινη ζωή. Πρόκειται γιὰ τὰ πράγματα ἐκεῖνα ποὺ χωρὶς τὴ γνώση καὶ τὴ χρήση τῶν ὁποίων, ὁ ἄνθρωπος δὲν μπορεῖ νὰ γίνει Θεὸς μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων, οὔτε πνεῦμα, οὔτε ἥρωας, ὥστε νὰ σκέπτεται καὶ νὰ φροντίζει σοβαρὰ γιὰ τοὺς ἀνθρώπους.

Καὶ ὁ μὲν Πλάτων αὐτὴ τὴ γνώμη εἶχε γιὰ τὰ Μαθηματικά, ὅμως οἱ περισσότεροι μαθηματικοὶ δὲν φαίνεται νὰ διαβάζουν τὸν Πλάτωνα, ἐνῶ αὐτοὶ ποὺ τὸν διαβάζουν καὶ ποὺ στὴν πλειονότητά τους δὲν εἶναι μαθηματικοί, θεωροῦν, ὄχι βέβαια ὅλοι ἀλλὰ πολλοὶ ἀπ᾽ αὐτούς, τὶς ἀπόψεις του αὐτὲς περίεργες ἢ καὶ παράλογες.

Πιστεύω ὅτι τὰ παραπάνω πρέπει νὰ πείθουν ὅλους καὶ ἰδιαίτερα τοὺς ἁρμοδίους, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ πρέπει νὰ ἔχουν μιὰ περίοπτη θέση στὴν Ἐκπαίδευση καὶ πρέπει νὰ διδάσκονται σὲ ὅλους ἀνεξαιρέτως τοὺς κλάδους της, εἴτε αὐτοὶ εἶναι θετικοὶ ἢ θεωρητικοί. ... εἴπερ ἀριθμὸν ἐκ τῆς ἀνθρωπίνης φύσεως ἐξέλοιμεν, οὐκ ἄν ποτέ τι φρόνιμοι γενοίμεθα. οὐ γὰρ ἂν ἔτι ποτὲ ψυχὴ τούτου τοῦ ζῴου πᾶσαν ἀρετὴν λάβοι σχεδόν, ὅτου λόγος ἀπείη· ζῷον δὲ ὅτι μὴ γιγνώσκοι δύο καὶ τρία μηδὲ περιττὸν μηδὲ ἄρτιον, ἀγνοοῖ δὲ τὸ παράπαν ἀριθμόν, οὐκ ἄν ποτε διδόναι λόγον ἔχοι περὶ ὧν αἰσθήσεις καὶ μνήμας [ἔχοι] μόνον εἴη κεκτημένον, τὴν δὲ ἄλλην ἀρετήν, ἀνδρείαν καὶ σωφροσύνην, οὐδὲν ἀποκωλύει. στερόμενος δὲ ἀληθοῦς λόγου σοφὸς οὐκ ἄν ποτε γένοιτο, ὅτῳ δὲ σοφία μὴ προσείη, πάσης ἀρετῆς τὸ μέγιστον μέρος, οὐκ ἂν ἔτι τελείως ἀγαθὸς γενόμενος εὐδαίμων ποτὲ γένοιτο. οὕτως ἀριθμὸν μὲν ἀνάγκη πᾶσα ὑποτίθεσθαι.

(Πλάτωνος Ἐπινομὶς 977c)

Γιὰ τοὺς ὀλιγότερο ἐξοικειωμένους μὲ τὰ ἀρχαῖα κείμενα, τὰ παραπάνω μεταφραζόμενα ἔχουν ὡς ἑξῆς:

... ἂν ἐξαιρέσομε τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὴν ἀνθρώπινη φύση, δὲν εἶναι δυνατὸν ποτὲ νὰ γίνουμε λογικοί. Γιατὶ δὲν μπορεῖ πλέον νὰ ἀποκτήσει τελειότητα ἡ ψυχὴ τούτου τοῦ ζώου, ἀπὸ τὸ ὁποῖο λείπουν οἱ ἀριθμοί. Δηλαδὴ κάθε ζῶο ποὺ δὲν ξαίρει νὰ διακρίνει τὰ δύο καὶ τὰ τρία, οὔτε τὰ μονὰ καὶ τὰ ζυγά, καὶ γενικὰ δὲν ξέρει ἀριθμούς, ποτὲ δὲν μπορεῖ νὰ δώσει λόγο γιὰ ὅσα πράγματα ἀπέκτησε μόνο ἀντιλήψεις μὲ τὰ αἰσθητήρια καὶ παραστάσεις. Τὸ ὑπόλοιπο ὅμως τῆς ἀρετῆς, δηλαδὴ τὴν ἀνδρεία καὶ τὴν σωφροσύνη, τίποτε δὲν ἐμποδίζει νὰ τὴν ἀποκτήσει. Ὅποιος ὅμως στερεῖται τοῦ ἀληθινοῦ λόγου ποτὲ δὲν μπορεῖ νὰ γίνει σοφός, καὶ σὲ ὅποιον δὲν ὑπάρχει σοφία, ἡ ὁποία εἶναι τὸ μεγαλύτερο μέρος τῆς ὅλης ἀρετῆς, αὐτὸς δὲν μπορεῖ νὰ γίνει τελείως ἀγαθὸς καὶ ἑπομένως εὐτυχής. Τόσο μεγάλη εἶναι ἡ ἀνάγκη νὰ θέσουμε ὡς βάση τοὺς ἀριθμούς.

Στὴν ἐποχή μας, ὅπως καὶ στὴν Ἀρχαιότητα, τὰ Μαθηματικὰ ἀποτελοῦν οὐσιαστικὸ μέρος τῆς παιδείας τῶν ἐλευθέρων ἀνθρώπων.

Τὰ Μαθηματικὰ ὄχι μόνο πρέπει νὰ διδάσκονται ὡς κάτι τὸ ὑποχρεωτικὸ πρὸς μάθηση ἀλλὰ καὶ νὰ ἀφομοιώνονται ὡς μέρος τῆς καθημερινῆς σκέψης, κάτι ποὺ ὁ νοῦς ἀναθεωρεῖ διαρκῶς καὶ βελτιώνει.

Ὑπὸ τὴν εὐρεῖα ἔννοια τοῦ ὅρου, ἡ ἱκανότητα τοῦ «μαθηματικῶς σκέπτεσθαι» εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητη γιὰ τὴν ἐπιτυχὴ σταδιοδρομία σὲ κάθε ἐπάγγελμα.

Ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὴν Ποίηση, παρατηρεῖ ὁ Russel, στὰ Μαθηματικὰ βρίσκει κανεὶς τὴν ἀληθινὴ πνευματικὴ ἡδονή, τὴν ἀνάταση, τὸ αἴσθημα ὅτι εἶναι κάτι παραπάνω ἀπὸ ἄνθρωπος.

Τὸ χαρακτηριστικὸ στοιχεῖο τῶν Μαθηματικῶν δὲν εἶναι μόνο ἡ ἀλήθεια ποὺ ἐμπεριέχουν ἀλλὰ καὶ ἡ ὀμορφιά τους, ποὺ πρέπει νὰ ἀναζητηθεῖ στὴν αὐστηρὴ λογική τους, στοὺς λογικοὺς κανόνες ποὺ εἶναι γιὰ τὰ Μαθηματικὰ ὅ,τι οἱ δομικοὶ κανόνες γιὰ τὴν Ἀρχιτεκτονική. Ὁ πραγματικὸς Κόσμος, αὐτὸς στὸν ὁποῖο ζοῦμε, ἀποτελεῖ γιὰ τὸν ἄνθρωπο ἕνα διαρκῆ συμβιβασμὸ μεταξὺ τοῦ ἰδεατοῦ καὶ τοῦ δυνατοῦ. Ὅμως ὁ Κόσμος τῆς Λογικῆς δὲν γνωρίζει συμβιβασμούς, οὔτε πρακτικοὺς περιορισμούς, οὔτε ἐμπόδια στὴ δημιουργική του δραστηριότητα, χαρακτηριστικὰ ποὺ τοποθετοῦν τὰ Μαθηματικὰ καὶ στὴ σφαίρα τῆς Τέχνης.

Μέχρις ὅτου ἡ Συμβολικὴ Λογικὴ ἀναπτυχθεῖ ἀρκετὰ καὶ φθάσει ἐκεῖ ποὺ ἔφθασε στὶς ἀρχὲς τοῦ αἰώνα μας, ἐπικρατοῦσε ἡ ἄποψη ὅτι τὰ Μαθηματικὰ στηρίζονταν ἐπὶ φιλοσοφικῶν ἀρχῶν οἱ ὁποῖες μποροῦσαν νὰ ἀνακαλυφθοῦν μόνο μὲ τὶς μὴ προοδευτικὲς καὶ ἀβέβαιες μεθόδους ποὺ χρησιμοποιοῦσαν τότε οἱ φιλόσοφοι. Φυσικὰ μιὰ τέτοια ἄποψη, προφανῶς, ἀφαιροῦσε ἀπ' τὰ Μαθηματικὰ τὸν αὐτόνομο χαρακτῆρα τους. Ἐπιπλέον, ἐπειδὴ ἡ φύση τῶν ἀξιωμάτων ἀπ' τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἡ Θεωρία Ἀριθμῶν, ἡ Ἀνάλυση καὶ ἡ Γεωμετρία ἦταν συνδεδεμένες καὶ μπλεγμένες μέσα σὲ ἀτέρμονες, σκοτεινὲς καὶ μεταφυσικὲς ἀναζητήσεις, τὸ Μαθηματικὸ οἰκοδόμημα, χτισμένο ἐπάνω σὲ τέτοιες ἀμφιβόλου ποιότητας βάσεις, ἔδινε τὴν ἐντύπωση ὅτι αἰωρεῖτο στὸ κενό. Ἔτσι ἡ ἀνακάλυψη ὅτι, οἱ πραγματικὲς Ἀρχὲς ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζονται τὰ Μαθηματικὰ καθὼς καὶ οἱ συνέπειες τῶν Ἀρχῶν αὐτῶν ἀποτελοῦν μέρος αὐτῶν τούτων τῶν Μαθηματικῶν, ἐκτόπισε τὴν ὡς τότε ἐπικρατοῦσα ἄποψη ποὺ προαναφέραμε, δημιουργώντας μιὰ βαθιὰ ἱκανοποίηση στὴν ἀνθρώπινη διανόηση, δυνάμωσε τὸ σεβασμό μας πρὸς τὶς ἀνθρώπινες ἱκανότητες καὶ μᾶς ἔδωσε τὴν εὐκαιρία νὰ γνωρίσομε καὶ ἄλλες ὀμορφιὲς ποὺ ἀνήκουν στὸν ἀφηρημένο Κόσμο.

Ὅλοι μας, ἴσως, ἔχουμε πολλὲς φορὲς ἀκούσει ὅτι ὁ μαθηματικὸς ἀναζητᾶ πάντοτε, *μεταξὺ τῶν λύσεων ἑνὸς προβλήματος, τὴν πιὸ κομψή, τὴν πιὸ καλλιτεχνικὴ λύση. Ποιὰ ὅμως εἶναι τὰ κριτήρια γιὰ μιὰ τέτοια λύση; Θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ ἀπαντήσει στὸ ἐρώτημα αὐτό, κάπως πρόχειρα, ὅτι τὰ κριτήρια γιὰ τὴν ποιότητα ἑνὸς ἔργου εἶναι τὸ κάλλος, ἡ πλοκή, ἡ κομψότητα, ἡ εὐχάριστη ἐντύπωση, ἡ καταλληλότητα. Ὅλα αὐτά, ἂν καὶ εἶναι ὑποκειμενικὰ κριτήρια, εἶναι κατὰ κάποιο μυστηριώδη τρόπο παραδεκτὰ καὶ ἐφαρμόζονται ἀπὸ ὅλους μας. Ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ νὰ ἐπαναλάβω ἐδῶ ἕνα παράδειγμα κομψῆς λύσεως ἑνὸς μαθηματικοῦ προβλήματος, παράδειγμα ποὺ ἔχω χρησιμοποιήσει καὶ σὲ ἄλλη ὁμιλία μου.*

Πρόβλημα. Ἕνας σύλλογος παικτῶν τέννις, ἀποτελούμενος ἀπὸ 1025 παῖκτες, ὀργανώνει μεταξὺ τῶν μελῶν του ἕνα πρωτάθλημα ὡς ἑξῆς:

Οἱ παῖκτες χωρίζονται μὲ κλήρωση σὲ ζευγάρια, αὐτὸς ποὺ περισσεύει παραμερίζει καὶ οἱ ὑπόλοιποι παίζουν τὰ παιγνίδια τους. Αὐτὸς εἶναι ὁ πρῶτος γύρος. Στὸν δεύτερο γύρο παίζουν μόνο οἱ νικητὲς τοῦ πρώτου γύρου καθὼς καὶ αὐτὸς ποὺ περίμενε. Οἱ χαμένοι ἀποχωροῦν. Στὴ συνέχεια ξαναγίνεται ἡ κλήρωση, καὶ ἡ διαδικασία προχωρεῖ κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο κ.ο.κ. Τελικὰ μένουν μόνο δύο παῖκτες, ὁ δὲ νικητὴς εἶναι ὁ πρωταθλητής.

Τὸ ἐρώτημα εἶναι: Πόσα παιγνίδια παίχθηκαν συνολικά;

Ἡ μὴ καλλιτεχνικὴ λύση τοῦ προβλήματος, ποὺ ὁ καθένας μπορεῖ νὰ δώσει, εἶναι νὰ ἀθροίσουμε τὰ παιγνίδια ποὺ παίχθηκαν στοὺς ἕνδεκα γύρους, ἤτοι:

1ος Γύρος:		*(1025-1)/2= 512*	*παιγνίδια*
2ος »		*= 256*	*»*
3ος »		*= 128*	*»*
4ος »		*= 64*	*»*
5ος »		*= 32*	*»*
6ος »		*= 16*	*»*
7ος »		*= 8*	*»*
8ος »		*= 4*	*»*
9ος »		*2*	*»*
10ος »		*1*	*»*
11ος »	*(μ' αὐτὸν ποὺ περίμενε)*	*1*	*»*
		Σύνολο 1024	

Βέβαια εἴμαστε τυχεροί, στὴν περίπτωση αὐτή, ποὺ οἱ παῖκτες εἶναι 1025 καὶ δὲν εἶναι πολὺ περισσότεροι.

Τὸ πρόβλημα ὅμως ἔχει καὶ τὴν καλλιτεχνική του λύση ποὺ εἶναι ἡ ἑξῆς: Κάθε παιγνίδι ἔχει ἕνα νικητὴ καὶ ἕνα ἡττημένο. Ὁ ἡττημένος παίζει μόνο μιὰ φορά. Ἄρα παίχθηκαν τόσο παιγνίδια ὅσοι εἶναι καὶ οἱ ἡττημένοι. Ἐκτὸς ὅμως ἀπ' τὸν πρωταθλητὴ ὅλοι οἱ ἄλλοι εἶναι ἡττημένοι. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν παιγνιδιῶν ποὺ παίχθηκαν εἶναι 1025-1=1024. Γενικότερα ἂν τὸ πλῆθος τῶν παικτῶν ἦταν, α, τότε θὰ εἶχαν παιχθεῖ α-1 παιγνίδια.

Τὸ παράδειγμα αὐτὸ εἶναι ἕνα μικροσκοπικὸ δεῖγμα ἑνὸς ὡραίου κομματιοῦ τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν. Ἂν ἔχει κανεὶς ἰσχυρὴ φαντασία ὥστε νὰ μπορέσει νὰ συγκροτήσει τὸν Ὠκεανὸ ἀπὸ μιὰ σταγόνα νερό, θὰ μπορέσει νὰ κτίσει τὸ οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν ἀπ' τὸ πρόβλημα τῶν παικτῶν τέννις.

Ἡ ὄψη καὶ ἡ φύση τῶν Μαθηματικῶν ποὺ ἐξετάζομε, αὐτὴ δηλαδὴ ποὺ ἀφορᾶ τὸν αὐτόνομο χαρακτήρα τους, μπορεῖ ἴσως νὰ γίνει καλύτερα ἀντιληπτὴ ἂν τονισθεῖ ἡ ἀναλογία, ἡ ὁμοιότητα ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Μουσικῆς. Ὁ καθαρὸς μαθηματικὸς νιώθει, ὅπως καὶ ὁ μουσικός, ὅτι δὲν ἔχει ἀνάγκη νὰ δικαιολογήσει τὰ Μαθηματικά του. Κανένας δὲν περιμένει ἀπὸ ἕνα συνθέτη νὰ τοῦ ἐξηγήσει γιατὶ συνέθεσε τὴ Μουσική του, νὰ αἰτιολογήσει δηλαδὴ λογικὰ τὸ ἔργο του. Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὰ Καθαρὰ Μαθηματικά. Ὅπως ἡ Μουσικὴ ἔτσι καὶ τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μιὰ δημιουργία (ἢ ἀνακάλυψη) τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος ἡ ὁποία ἔχει τὰ δικά της πρότυπα ἀξιῶν, τὰ δικά της κριτήρια τοῦ ὡραίου ἢ τοῦ ἐξόχου, κριτήρια τὰ ὁποῖα ἀντλεῖ ἀπ' τὸν ἴδιο τὸν ἑαυτό της καὶ ὄχι ἀπὸ ἄλλες ἀνθρώπινες ἐμπειρίες. Ἡ ποιότητα μιᾶς κάποιας λύσεως ἑνὸς προβλήματος ἢ ἀποδείξεως ἢ μιᾶς θεωρίας, εἶναι τελείως ἐσωτερική της ὑπόθεση.

Τελειώνοντας θὰ ἤθελα νὰ προσθέσω ὅτι: ὁποιαδήποτε ὄψη τῶν Μαθηματικῶν κι ἂν θεωρήσει κανείς, θὰ διαπιστώνει σταθερὰ τὸν ἀνελικτικὸ καὶ δυναμικό τους χαρακτήρα καὶ θὰ νιώθει πάντα τὸ ρεῦμα ἐκεῖνο ποὺ ὠθεῖ τὸν ἄνθρωπο πρὸς τὴν ὑπέρτατη ἀρετὴ ποὺ δὲν εἶναι ἄλλη ἀπ' τὴν ἀγάπη πρὸς τὴν Ἀλήθεια.