d) certains autres facteurs.

Ceux qui jouent la plus grande influence sont: les facteurs individuels et les conditions de vie extrascolaire des écoliers (hérédité, constitution et résistance en général de l'organisme, logement, alimentation, travail physique ou intellectuel extrascolaire, etc.); tous ces facteurs influencent l'organisme infantile, dans une échelle bien plus accentuée que tous ceux admis comme constituant les causes principales du surmenage scolaire, tels que les conditions du travail scolaire (organisation de l'école, horaire, nature et durée des cours, personnalité de l'instituteur etc.).

Un autre facteur qui joue aussi un rôle important, c'est la température élevée de l'atmosphère et en général la saison chaude de l'année, pendant laquelle on a toujours constaté des valeurs élevées de l'I. F.

Enfin, il y a lieu de constater que les femelles sont beaucoup plus sujettes au surmenage que les mâles.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. V. DHERS, Les Tests de fatigue, Paris.

2. Ε. ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟΥ, Ὁ διανοητικὸς κάματος τοῦ ἕλληνος μαθητοῦ, ἐλεγχόμενος διὰ τῆς αἰσθησιομετρίας (συμβολὴ εἰς τὴν παιδολογικὴν ψυχομετρίαν). Δελτ. Ὁμοσπ. Λειτ. Μ. Ἐκπαιδ. ἀρ. 100, 1935,

3. A. BINET, Recherches sur la fatigue intellectuelle scolaire et sur la mesure qui peut en être faite au moyen de l'esthésiomètre (Ann. Psychol. 11).

4. GRIESBACH, H., Weitere Untersuch. über Beziehungen zwischen geist. Ermüdung und Hauptsensibilität (Int. Arch. f. Schulhyg. I., 1905, 317-417).

5. Ε. ΛΑΜΠΑΔΑΡΙΟΥ, Σχολικὴ Ὑγιεινὴ μετὰ στοιχείων Παιδολογίας γ΄. ἔκδ. 1934.

ΔΗΜΟΓΡΑΦΙΑ.—Ἐπὶ μιᾶς νέας μεθόδου ὑπολογισμοῦ τῆς λογιστικῆς καμπύλης. Ἐφαρμογὴ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος, *ὑπὸ* ***Ἰωάννου Ξανθάκη.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Δ. Λαμπαδαρίου.

Ἡ ὑπὸ τῶν ἀμερικανῶν Dr R. Pearl καὶ Dr L. Reed ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου τοῦ Βέλγου μαθηματικοῦ Verhulst διὰ τὴν παράστασιν τῆς αὐξήσεως τῶν πληθυσμῶν ἔδωκε μέχρι τοῦδε ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα. Ὁ τύπος οὗτος, γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα «καμπύλη τῶν αὐξήσεων» ἢ «λογιστικὴ καμπύλη» παριστᾷ πράγματι ἱκανοποιητικῶς τὴν αὔξησιν τοῦ πληθυσμοῦ διαφόρων χωρῶν[1] καὶ παρέχει ἐνδιαφερούσας ἐνδείξεις ἀφ' ἑνὸς μὲν ὡς πρὸς τὴν πιθανὴν πορείαν ἣν πρόκειται νὰ ἀκολουθήσῃ, ὑπὸ ὁμαλὰς καὶ κανονικὰς συνθήκας, ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς χώρας, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὡς πρὸς τὸ μέγιστον εἰς ὃ τείνει ὁ πληθυσμὸς οὗτος ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις.

[1] R. PEARL, Studies in Human Biology, Ch. XXIV, p. 558-633.

* JOHN XANTHAKIS.—

Τὴν μέθοδον ταύτην ἐφήρμοσε τὸ πρῶτον διὰ τὴν Ἑλλάδα ὁ ὑγειονολόγος κ. Β. Βαλαώρας[1] ὅστις ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μέχρι τοῦδε γενομένων ἀπογραφῶν τοῦ πληθυσμοῦ εὗρεν ὅτι τὸ «μέγιστον» εἰς ὃ τείνει ἡ πυκνότης τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας εἶναι 57,5 ἤτοι, τὸ μέγιστον εἰς ὃ τείνει ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος εἶναι 7.400.000 κάτοικοι περίπου. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ «μεγίστου» ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ μᾶλλον ὡς μικρὰ ἐὰν λάβῃ τις ὑπ' ὄψιν ὅτι ἤδη ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας εἶναι περὶ τὰ 7.000.000, εὑρέθη διὰ γραφικῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης τῶν αὐξήσεων. Ἀλλ' ἡ εὕρεσις τοῦ «μεγίστου» διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, ἣν ἐφαρμόζουσιν εἰς τὰς σχετικὰς ἐρεύνας των οἱ κ. κ. L. Reed καὶ R. Pearl, τυγχάνει ὄχι μόνον λίαν ἐπίπονος, δεδομένου ὅτι ἀπαιτεῖ πολλὰς διαδοχικὰς δοκιμάς, ἀλλ' ἐνίοτε καὶ οὐχὶ λίαν ἀκριβής. Τοῦτο ἤγαγεν ἡμᾶς εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν μίαν νέαν μέθοδον δίδουσαν λογιστικῶς τὸ «μέγιστον» τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς χώρας διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ τῶν δεδομένων τῆς τελευταίας ἀπογραφῆς καὶ τῶν προγενεστέρων τοιούτων.

Πρὸς τοῦτο ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς λογιστικῆς καμπύλης:

$$\psi = \frac{M}{1+e^{\alpha-\beta x}} \tag{1}$$

ἔνθα ψ παριστᾷ τὴν πυκνότητα τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ τὸν χρόνον x, M τὸ «μέγιστον» τῆς πυκνότητος ἤτοι, τὴν τιμὴν τοῦ ψ διὰ $x \to \infty$ καὶ α, β, δύο σταθερὰς προσδιοριζομένας καταλλήλως. Ἔστωσαν

$$\psi_\varkappa, \qquad \psi_\lambda, \qquad \psi_\mu$$

τρεῖς τιμαὶ τῆς πυκνότητος ψ αἵτινες ἀντιστοιχοῦσι εἰς τὰς κατὰ τὰ ἔτη $x_\varkappa$, x_λ καὶ x_μ ἐκτελεσθείσας ἀπογραφάς. Ἐὰν θέσωμεν:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{M}{\psi_i} - 1\right) = z_i, \qquad i = \varkappa, \lambda, \mu \tag{1'}$$

θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῆς (1), τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha - \beta x_\varkappa = z_\varkappa \qquad \alpha - \beta x_\lambda = z_\lambda \qquad \alpha - \beta x_\mu = z_\mu$$

ἐκ τοῦ ὁποίου δι' ἀπαλοιφῆς τῶν σταθερῶν α καὶ β λαμβάνομεν:

$$(z_\lambda - z_\varkappa)(x_\mu - x_\varkappa) = (z_\mu - z_\varkappa)(x_\varkappa - x_\lambda)$$

ἤ, θέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ z_i ($i = \varkappa, \lambda, \mu$) ἐκ τῆς (1') ἔχομεν:

$$\left(\frac{M}{\psi_\varkappa} - 1\right)^{x_\lambda - x_\varkappa} \cdot \left(\frac{M}{\psi_\lambda} - 1\right)^{x_\mu - x_\varkappa} = \left(\frac{M}{\psi_\varkappa} - 1\right)^{x_\mu - x_\varkappa} \cdot \left(\frac{M}{\psi_\mu} - 1\right)^{x_\lambda - x_\varkappa} \tag{2}$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἡ δίδουσα τὰς τιμὰς τοῦ M. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως (2) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος τοῦ μεσολαβοῦντος μεταξὺ τῶν

[1] Β. ΒΑΛΑΩΡΑ, Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος ὅπως περιγράφεται ὑπὸ τῆς λογιστικῆς καμπύλης, *Πρακτικὰ Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν*, 11, 1936, σ. 36.

τριῶν ἀπογραφῶν. Συνεπῶς, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι, αἱ κατὰ τὰ ἔτη x_κ, x_λ καὶ x_μ ἐκτελεσθεῖσαι ἀπογραφαὶ διαφέρουσι ἀλλήλων κατὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἤτοι:

$$x_\lambda - x_\kappa = x_\mu - x_\lambda = \frac{1}{2}\left(x_\mu - x_\kappa\right)$$

ἡ σχέσις (2) γίνεται:

$$\left(\frac{M}{\psi_\lambda} - 1\right)^2 = \left(\frac{M}{\psi_\kappa} - 1\right) . \left(\frac{M}{\psi_\mu} - 1\right)$$

ἢ

$$\left\{\frac{1}{\psi_\lambda^2} - \frac{1}{\psi_\mu} \cdot \frac{1}{\psi_\kappa}\right\} M^2 + \left\{\frac{1}{\psi_\mu} + \frac{1}{\psi_\kappa} - \frac{1}{\psi_\lambda}\right\} M = 0$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀποκλειομένης τῆς τιμῆς $M=0$, εὑρίσκομεν:

$$M = \frac{\frac{1}{\psi_\mu} + \frac{1}{\psi_\kappa} - \frac{2}{\psi_\lambda}}{\frac{1}{\psi_\mu} \cdot \frac{1}{\psi_\kappa} - \frac{1}{\psi_\lambda^2}} = \frac{\psi'_\mu + \psi'_\kappa - 2\,\psi'_\lambda}{\psi'_\mu \cdot \psi'_\kappa - {\psi'_\lambda}^2} \qquad (3)$$

ἔνθα

$$\psi'_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad i = \kappa, \lambda, \mu$$

Ἡ σχέσις (3) δίδει τὴν τιμὴν τοῦ M συναρτήσει τῶν τριῶν τιμῶν ψ_κ ψ_λ ψ_μ τῆς πυκνότητος[1]. Ἐὰν λάβωμεν τρεῖς ἄλλας τιμὰς τῆς πυκνότητος ἀντιστοιχούσας εἰς τρεῖς ἄλλας ἀπογραφὰς πληρούσας τὴν ἀνωτέρω συνθήκην (δηλαδὴ νὰ ἀπέχωσιν ἀλλήλων κατὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα) θὰ ἔχωμεν καὶ μίαν ἄλλην τιμὴν τοῦ M ἥτις πιθανὸν νὰ συμπίπτῃ ἢ νὰ προσεγγίζῃ πρὸς τὴν προηγουμένην, πιθανὸν ὅμως καὶ νὰ διαφέρῃ αἰσθητῶς αὐτῆς. Τοῦτο προφανῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν διαφόρων συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐξελίσσεται καὶ ἀναπτύσσεται ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας. Δυνάμεθα λοιπόν, ὑπὸ ὁμαλὰς καὶ κανονικὰς συνθήκας ἐξελίξεως τοῦ πληθυσμοῦ, νὰ χωρίσωμεν τὰς ἀπογραφὰς εἰς ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὰ δεδομένα τριῶν ἀπογραφῶν αἵτινες νὰ πληρῶσι τὴν ἀνωτέρω συνθήκην καὶ νὰ ἔχωμεν οὕτω ἕνα σύστημα τιμῶν τοῦ M μὴ ἀπεχουσῶν πολὺ ἀναμεταξύ των καὶ τῶν ὁποίων ὁ μέσος ὅρος θὰ παριστᾷ τὴν πιθανὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς ταύτης.

Ἀλλὰ ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ λαμβανόμεναι τιμαὶ τῆς πυκνότητος βαίνουσιν αὐξανόμεναι μετὰ τοῦ χρόνου, ἤτοι:

$$\psi_\kappa < \psi_\lambda < \psi_\mu$$

ἡ ὑπὸ τοῦ τύπου (3) διδομένη τιμὴ τοῦ M δέον νὰ εἶναι θετικὴ καὶ μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς πυκνότητος τῆς διδομένης ὑπὸ τῆς τελευταίας ἀπογραφῆς, ἤτοι:

$$\frac{\psi'_\mu + \psi'_\kappa - 2\,\psi'_\lambda}{\psi'_\mu \cdot \psi'_\kappa - {\psi'_\lambda}^2} > \psi'_\tau \qquad (4)$$

[1] Ἀνάλογος σχέσις εὑρέθη καὶ ὑπὸ τῶν κ. κ. Reed Pearl.

ἔνθα ψ_τ παριστᾷ τὴν τιμὴν τῆς πυκνότητος τῆς τελευταίας ἀπογραφῆς. Ἀλλ' ἐὰν

$$\psi'_\mu \cdot \psi'_\varkappa - \psi'^2_\lambda > 0 \qquad (4')$$

τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) εἶναι πάντοτε θετικὸν[1] συνεπῶς ἵνα ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης (4) ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$\psi'_\mu + \psi'_\varkappa - 2\,\psi'_\lambda > \psi_\tau \{\psi'_\mu \cdot \psi'_\varkappa - \psi'^2_\lambda\} \qquad (5)$$

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι:

$$\psi_\tau = \frac{1}{\psi'_\mu} = \psi_\mu$$

ἤτοι μία ἐκ τῶν θεωρουμένων τιμῶν τῆς πυκνότητος εἶναι ἡ τιμὴ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τελευταίαν ἀπογραφήν, τότε ἡ ἀνισότης (5) ἰσχύει πάντοτε διότι εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\{\psi'_\mu - \psi'_\lambda\}^2 > 0$$

Ὅθεν, ἵνα αἱ ἐκ τοῦ τύπου (3) εὑρισκόμεναι τιμαὶ τοῦ Μ εἶναι θετικαὶ καὶ μεγαλύτεραι τῆς τιμῆς τῆς πυκνότητος τῆς διδομένης ὑπὸ τῆς τελευταίας ἀπογραφῆς ἀρκεῖ 1) εἰς ἑκάστην ὁμάδα ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν τιμῶν τῆς πυκνότητος νὰ εἶναι ἡ τιμὴ ψ_τ τῆς πυκνότητος τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν τελευταίαν ἀπογραφὴν καὶ 2) αἱ δύο ἄλλαι λαμβανόμεναι τιμαὶ $\psi_\varkappa$ καὶ ψ_λ νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\psi^2_\lambda - \psi_\tau \cdot \psi_\varkappa > 0$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν μέθοδον ἐπὶ τῶν δεδομένων τῶν ἀπογραφῶν τοῦ πληθυσμοῦ τῶν Ἡνωμ. Πολιτειῶν λαμβάνομεν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

I ὁμας		II ὁμὰς		III ὁμὰς		IV ὁμὰς	
ἔτος	P*	ἔτος	P*	ἔτος	P*	ἔτος	P*
1910	91,972	1890	62,769	1870	39,372	1850	23,192
1920	107,394	1910	91,397	1900	76,870	1890	62,769
1930	122,397	1930	122,397	1930	122,397	1930	122,397
	M_1=197,18		M_2=197,10		M_3=197,17		M_4=197,23

[1] Πράγματι, ἐὰν

$$\psi'_\mu \cdot \psi'_\varkappa - \psi'^2_\lambda > 0$$

θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\psi'_\mu + \psi'_\varkappa - 2\,\psi'_\lambda > 0$$

Διότι ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$\psi'_\mu + \psi'_\varkappa > 2\,\psi'_\lambda \quad \text{ἢ} \quad \psi'^2_\mu + \psi'^2_\varkappa > 4\,\psi'^2_\lambda - \psi'_\mu \cdot \psi'_\varkappa$$

ἢ δυνάμει τῆς (4') ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:

$$\psi'^2_\mu + \psi'^2_\varkappa > 2\,\psi'_\mu \cdot \psi'_\varkappa$$

Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει πάντοτε.

V ὁμὰς		VI ὁμὰς		VII ὁμὰς	
ἔτος	P*	ἔτος	P*	ἔτος	P*
1830	13,107	1810	7,228	1790	3,929
1880	50,177	1860	30,412	1860	30,412
1930	122,397	1930	122,397	1930	122,397
	$M_5 = 197,20$		$M_6 = 197,22$		$M_7 = 197,23$

* P παριστᾷ τὸν πληθυσμὸν τῶν Ἡνωμ. Πολιτειῶν εἰς ἑκατομμύρια.

$$M = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{7} M_n = 197,19 \pm 0,03$$

Ἤτοι τὸ μέγιστον εἰς ὃ τείνει ὁ πληθυσμὸς τῶν Ἡνωμ. Πολιτειῶν εἶναι 197 ἑκατ. κάτοικοι περίπου. Ἡ τιμὴ αὕτη συμπίπτει σχεδὸν μὲ τὴν ὑπὸ τῶν κ. κ. Reed καὶ Pearl εὑρεθεῖσαν (197,27 ± 0,55), διὰ γραφικῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως (1).

Προκειμένου ὅμως περὶ τῆς Ἑλλάδος δὲν διαθέτομεν δυστυχῶς ἀπογραφὰς πληρούσας τοὺς ἀνωτέρω ὅρους. Ἡ τελευταία ἀπογραφὴ τοῦ πληθυσμοῦ ἐγένετο τὸ 1928 ἡ δὲ προτελευταία τὸ 1920. Ἐὰν δέ τις δὲν λάβῃ ὑπ' ὄψιν τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1920, λόγῳ τῶν ἐξαιρετικῶν συνθηκῶν ὑφ' ἃς διῆγε ἡ χώρα (Μικρασιατικὴ ἐκστρατεία), τότε ὀφείλει ν' ἀνατρέξῃ εἰς τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1907 καὶ τὰς προγενεστέρας τοιαύτας τὰς ἐκτελεσθεῖσας κατὰ τὰ ἔτη 1896 καὶ 1889 τὰς ὁποίας δέον νὰ συνδυάσῃ μὲ τὴν τελευταίαν ἀπογραφὴν τοῦ 1928. Ἔχομεν οὕτω τὰ κάτωθι δεδομένα τριῶν ὁμάδων ἀπογραφῶν[1], ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δι' ἀστερίσκου σημειούμεναι τιμαὶ τῆς πυκνότητος δὲν ἀντιστοιχοῦσι εἰς ἔτη ἀπογραφῶν ἀλλ' εὑρέθησαν ὑπὸ τῆς Γεν. Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος δι' ὑπολογισμοῦ.

I ὁμὰς	II ὁμὰς	III ὁμὰς
ψ^* 1886 = 33,28	ψ^* 1864 = 27,07	ψ^* 1850 = 21,17
ψ 1907 = 41,64	ψ 1896 = 38,26	ψ 1889 = 34,39
ψ 1928 = 48,06	ψ 1928 = 48,06	ψ 1928 = 48,06
M_1 = 58,29	M_2 = 64,06	M_3 = 71,93

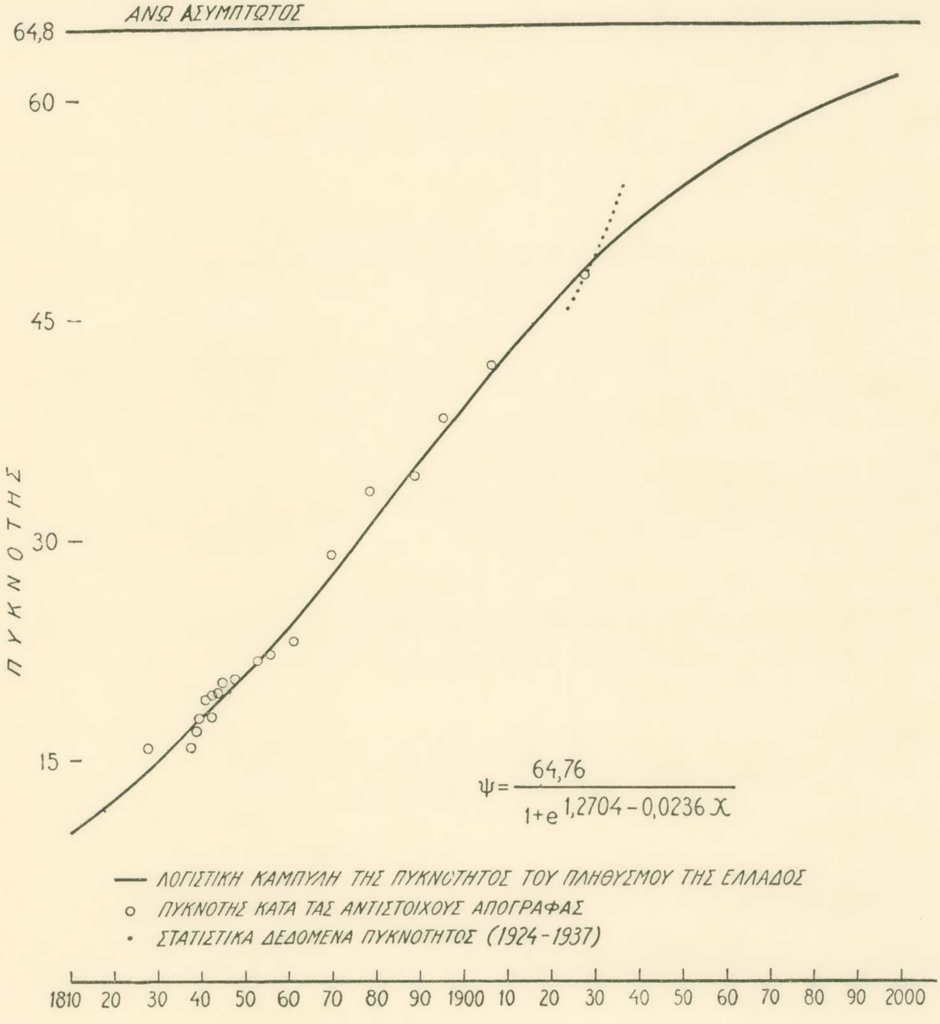
Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὡς πλέον πιθανὴν τιμὴν τοῦ M τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν M_1, M_2, M_3, εὑρίσκομεν[2]:

$$M = 64,76$$

[1] Αἱ ἀνωτέρω τιμαὶ τῆς πυκνότητος ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ σχετικοῦ πίνακος τῆς «Στατιστικῆς Ἐπετηρίδος τῆς Ἑλλάδος», 1937, σ. 453.

[2] Παρατηροῦμεν ἐνταῦθα μίαν μεγάλην διασπορὰν τῶν τιμῶν M_1, M_2, M_3, ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς τοῦ προηγουμένου πίνακος τοῦ δίδοντος τὰς τιμὰς τῆς σταθερᾶς ταύτης διὰ τὰ δεδομένα τῶν ἀπογραφῶν τῶν Ἡνωμ. Πολιτειῶν.

'Ανακ. κ. 'Ιωάννου Ξανθάκη, σελ. 412. ΙΔ' 1939.



Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ Μ προσδιορίσαμεν τὰς σταθερᾶς α καὶ β ἐκ τῶν κάτωθι 19 ἐξισώσεων:

$$\begin{array}{lll}
\alpha - \beta - 1{,}1259 = 0 & \alpha - 17\beta - 0{,}8360 = 0 & \alpha - 52\beta + 0{,}0661 = 0 \\
\alpha - 11\beta - 1{,}1285 = 0 & \alpha - 18\beta - 0{,}7903 = 0 & \alpha - 62\beta + 0{,}1244 = 0 \\
\alpha - 12\beta - 1{,}0061 = 0 & \alpha - 21\beta - 0{,}7505 = 0 & \alpha - 69\beta + 0{,}3667 = 0 \\
\alpha - 13\beta - 0{,}9632 = 0 & \alpha - 26\beta - 0{,}6791 = 0 & \alpha - 80\beta + 0{,}5888 = 0 \\
\alpha - 14\beta - 0{,}9455 = 0 & \alpha - 29\beta - 0{,}6397 = 0 & \alpha - 101\beta + 1{,}1394 = 0 \\
\alpha - 15\beta - 0{,}9586 = 0 & \alpha - 34\beta - 0{,}5911 = 0 & \\
\alpha - 16\beta - 0{,}8595 = 0 & \alpha - 43\beta - 0{,}2070 = 0 &
\end{array}$$

διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καὶ εὕρομεν

$$\alpha = 1{,}2704 \qquad \beta = 0{,}0236$$

Ἔχοντες οὕτω τὰς τιμὰς τῶν Μ, α καὶ β ὑπελογίσαμεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (1) τὰς τιμὰς τῆς πυκνότητος ἃς παραθέτομεν εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα Ι (στήλη 3). Εἰς τὴν 1ην στήλην τοῦ πίνακος τούτου ἀναγράφονται τὰ ἔτη τῶν ἀπογραφῶν τοῦ πληθυσμοῦ, εἰς τὴν 2αν αἱ τιμαὶ ψ_π τῆς πυκνότητος, εἰς τὴν 3ην αἱ ἐκ τοῦ τύπου (1) ὑπολογισθεῖσαι τιμαὶ ψ_υ τῆς πυκνότητος ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν σταθερῶν Μ, α, β καὶ τέλος εἰς τὴν 4ην καὶ 5ην στήλην αἱ διαφοραὶ $\psi_\pi - \psi_\upsilon$ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν.

ΠΙΝΑΞ Ι

Ἔτος	ψ_π	ψ_υ	$\psi_\pi - \psi_\upsilon$	$(\psi_\pi - \psi_\upsilon)^2$	Παρατηρήσεις
1828	15,86	14,46	+1,40	1,960	
1838	15,83	17,28	−1,45	2,103	
1839	17,34	17,58	−0,24	0,058	
1840	17,89	17,88	+0,01	0,000	
1841	18,12	18,19	−0,07	0,005	
1842	17,95	18,50	−0,55	0,303	
1843	19,26	18,68	+0,58	0,336	
1844	19,58	19,13	+0,45	0,203	
1845	20,21	19,45	+0,76	0,578	
1848	20,77	20,43	+0,34	0,116	
1853	21,79	22,11	−0,32	0,102	
1856	22,36	23,15	−0,79	0,624	
1861	23,08	24,94	−1,86	3,460	
1870	29,04	28,27	+0,77	0,593	
1879	33,45	31,68	+1,77	3,133	
1889	34,39	35,49	−1,10	1,210	
1896	38,26	38,12	+0,14	0,020	
1907	41,64	41,42	+0,22	0,048	
1928	48,06	48,75	−0,69	0,476	πυκνότης κατὰ τὴν 31-12-28
	474,88	475,51	+6,44	15,328	
			−7,07		
			−0,63		

Συγκρίνοντες τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ἡμετέρου ὑπολογισμοῦ μὲ τὰ ἀντίστοιχα ἐξαγόμενα τοῦ κ. Βαλαώρα, παρατηροῦμεν: 1. Τὰ δύο σύνολα τῆς πυκνότητος τοῦ πληθυσμοῦ (στήλη $2^{α}$ καὶ $3^{η}$) διαφέρουσιν ἐνταῦθα μόνον κατὰ 0,63, ἐνῷ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κ. Βαλαώρα διαφέρουσι κατὰ ποσότητα τετραπλασίαν περίπου, 2. τὸ πλῆθος τῶν διαφορῶν $\psi_{\pi} - \psi_{υ}$ ὧν τὸ μέγεθος εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος εἶναι μικρότερον ἐνταῦθα ἢ εἰς τὸν πίνακα τοῦ κ. Βαλαώρα καὶ 3. τὸ μέσον σφᾶλμα τετραγώνου

$$\mu = \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}, \qquad \upsilon = \psi_{\pi} - \psi_{\upsilon}$$

εἶναι εἰς μὲν τὸν ἡμέτερον ὑπολογισμὸν ± 0,92 εἰς δὲ τὸν τοῦ κ. Βαλαώρα ± 0,97. Ταῦτα δεικνύουσι ὅτι ἡ ἡμετέρα μαθηματικὴ παράστασις τῆς πυκνότητος τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν σταθερῶν M, α καὶ β εἶναι περισσότερον ἱκανοποιητική. Συνεπῶς ἡ τιμὴ M = 64,76 τοῦ μεγίστου τῆς πυκνότητος εἶναι περισσότερον πιθανὴ τῆς τιμῆς M = 57,5 ἥτις εὑρέθη ὑπὸ τοῦ κ. Βαλαώρα διὰ γραφικῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως (1) κατὰ τὴν μέθοδον τῶν κ. κ. Reed καὶ Pearl. Εἰς τὴν τιμὴν ταύτην (64,76) τοῦ μεγίστου τῆς πυκνότητος ἀντιστοιχοῦσι 8.400.000 κάτοικοι περίπου. Ὁ ἀριθμὸς δὲ οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ἀνώτερον ὅριον εἰς ὃ τείνει ὑπὸ τὰς παρούσας συνθήκας (μέχρι τοῦ 1928 ὅτε ἐγένετο ἡ τελευταία ἀπογραφὴ) ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας. Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα ἐμφαίνοντα τὸν πληθυσμὸν τῆς Ἑλλάδος διὰ μελούσας χρονολογίας ὑπολογισθέντα τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (1) καὶ ἐπὶ τῇ προϋποθέσει ὅτι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους θὰ παραμείνῃ ἡ αὐτὴ (ὡς ἡ μέχρι τοῦ 1928) καὶ ὅτι δὲν θὰ μεσολαβήσῃ σοβαρὰ πλὴν τῆς φυσικῆς ἐξελίξεως ἀλλαγὴ τόσον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολιτισμοῦ τῆς χώρας ὅσον καὶ εἰς τὴν σύνθεσιν καὶ κίνησιν τοῦ πληθυσμοῦ ἐν γένει.

ΠΙΝΑΞ ΙΙ

Ἔτος	Ἐπιφάνεια	Πυκνότης	Πληθυσμὸς	Ἔτος	Ἐπιφάνεια	Πυκνότης	Πληθυσμὸς
1940	129.976 τ.χ.μ.	51,91	6.747.000	1980	129.976 τ.χ.μ.	59,07	7.678.000
1950	» »	54,17	7.041.000	1990	» »	60,11	7.813.000
1960	» »	56,10	7.292.000	2000	» »	61,10	7.942.000
1970	» »	57,72	7.502.000	Μέγιστ.	» »	64,76	8.418.000

Ἀλλά, προκειμένου περὶ τῆς Ἑλλάδος, ἡ ἐπέκτασις τῶν ἐκ τῆς σχέσεως (1) διδομένων τιμῶν τῆς πυκνότητος πέραν τοῦ 1928 τυγχάνει λίαν παρακεκινδυνευμένη. Διότι, κατὰ τὸ μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἀπογραφῶν 1907 καὶ 1928 μεσολαβῆσαν χρονικὸν διάστημα οὔτε ἡ ἔκτασις τῆς χώρας παρέμεινε σταθερὰ οὔτε αἱ λοιπαὶ συνθῆκαι ἃς ἀνωτέρω ἀναφέρομεν ὑπῆρξαν ὁμαλαὶ καὶ κανονικαί. Πράγματι, ὁ διπλασιασμὸς τῆς ἐκτάσεως τῆς χώρας μετὰ τὸ 1913 διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων χωρῶν μὲ μικροτέραν πυκνότητα καὶ ἡ μείωσις τῶν γεννήσεων λόγῳ τῶν ἀπὸ τοῦ 1912 μέχρι τοῦ 1922 πολεμικῶν ἐπιχειρήσεων ἐπέφερον κατ' ἀρχάς, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος III, μίαν αἰσθητὴν μείωσιν τῶν τιμῶν τῆς πυκνότητος ἐν συγκρίσει πρὸς τὰς ὑπὸ τῆς σχέσεως (1) διδομένας τοιαύτας. Ἔπειτα ὅμως, ἡ ἔλευσις καὶ ἡ ἐγκατάστασις ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς τὴν ὕπαιθρον χώραν $1^1/_2$ ἑκατομμυρίου Ἑλλήνων ἐκ Μικρᾶς Ἀσίας ἐπροκάλεσεν, ἀπὸ τοῦ 1922 καὶ ἐντεῦθεν, μίαν ταχεῖαν αὔξησιν τῆς πυκνότητος, οὕτως ὥστε κατὰ τὸ 1928 ὅτε ἐγένετο ἡ τελευταία ἀπογραφὴ ἡ τιμὴ ταύτης ἔφθασε σχεδὸν τὴν ὑπὸ τῆς λογιστικῆς καμπύλης προβλεπομένην.

ΠΙΝΑΞ III

Ἔτος	Πυκνότης* στατιστικῶς	Πυκνότης κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)	Διαφορὰ	Ἔτος	Πυκνότης* στατιστικῶς	Πυκνότης κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)	Διαφορὰ
1914	39,56	44,10	- 4,54	1926	46,86	48,17	- 1,31
1915	39,55	44,77	- 5,22	1927	47,42	48,46	—0,96
1916	39,54	45,10	- 5,56	1928	48,06	48,75	- 0,71
1917	39,54	45,42	5,58	1929	48,49	49,03	- 0,54
1918	39,53	45,73	- 6,20	1930	49,22	49,31	0,09
1919	39,53	46,05	6,52	1931	49,88	49,58	+ 0,30
1920	36,67	46,36	- 9,69	1932	50,38	49,86	+ 0,52
1921	37,15	46,67	9,52	1933	51,01	50,10	+ 0,91
1922	45,72	46,98	1,26	1934	51,90	50,39	+ 1,51
1923	46,75	47,28	- 0,53	1935	52,62	50,65	+ 1,97
1924	45.57	47,58	2,01	1936	53,34	50,91	+ 2,43
1925	46,10	48,17	- 1,78	1937	53,96	51,17	+ 2,79

* Ἴδε Στατιστικὴν Ἐπετηρίδα τῆς Ἑλλάδος 1937 σ. 423.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο γεγονὸς (ἡ ἐγκατάστασις δηλαδὴ τῶν ἐκ Μικρᾶς Ἀσίας ἑλλήνων) ἐν συνδυασμῷ καὶ μὲ ἄλλους ἀκόμη παράγοντας (ἀνάπτυξις γεωργίας, βιομηχανίας, μέτρων κοινωνικῆς προνοίας κλπ.) ἐπιδρῶντας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολιτισμοῦ τῆς χώρας, μετέβαλεν αἰσθητῶς τὰς πρὸ τοῦ 1922 συνθήκας. Κατὰ συνέπειαν, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὰ ὑπὸ τῆς σχέσεως (1) διδόμενα καὶ διὰ χρονολογίας μεταγενεστέρας τοῦ 1928, δεδομένου ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπογραφαὶ ἐπὶ τῶν δεδομένων τῶν ὁποίων ἐστηρίχθημεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν σταθερῶν M, α καὶ β ἔλαβον χώραν πρὸ τοῦ 1912 ὁπότε μετεβλήθη σὺν τοῖς ἄλλοις καὶ ἡ ἔκτασις τῆς χώρας.

Εἶναι πολὺ πιθανόν, συνεπείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων, ἡ πορεία τῆς πυκνότητος τοῦ πληθυσμοῦ ἀπὸ τοῦ 1928 καὶ ἐντεῦθεν νὰ εἶναι διάφορος τῆς ὑπὸ τῆς λογιστικῆς καμπύλης διαγραφομένης καὶ μάλιστα νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τῶν παριστώντων τὰς πραγματικὰς πυκνότητας νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῶν τεταγμένων τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῆς λογιστικῆς καμπύλης. Μία τοιαύτη δὲ τάσις ἀρχίζει ἤδη νὰ ἐκδηλοῦται, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τῆς εἰκόνος I εἰς τὴν ὁποίαν ἡ συνεχὴς γραμμὴ παριστᾷ τὴν λογιστικὴν καμπύλην, οἱ μικροὶ κύκλοι τὰ δεδομένα τῶν ἀπογραφῶν, τὰ δὲ σημεῖα παριστῶσι τὴν πυκνότητα τοῦ πληθυσμοῦ τὴν διδομένην ὑπὸ τῆς Γεν. Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑπεροχῆς τῶν γεννήσεων ἐπὶ τῶν θανάτων καὶ τῆς κινήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας. Μία τοιούτου εἴδους μεταβολὴ ἥτις παρετηρήθη καὶ εἴς τινας ἄλλας χώρας ἰδίως δὲ εἰς τὴν Γερμανίαν[1] θὰ ἔχῃ ὡς συνέπειαν μίαν μεταβολὴν τῶν σταθερῶν M, α, β καὶ κυρίως μίαν αὔξησιν τῆς τιμῆς τοῦ M, ἤτοι αὔξησιν τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου τῆς πυκνότητος καὶ συνεπῶς αὔξησιν τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου εἰς ὃ τείνει ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας.

Πρὶν ἢ περατώσω τὴν παροῦσαν θεωρῶ καθῆκον μου νὰ ἐκφράσω ἐνταῦθα τὰς εὐχαριστίας μου πρὸς τὸν καθηγητὴν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Β. Αἰγινήτην ὅστις εἶχε τὴν καλωσύνην νὰ θέσῃ εἰς τὴν διάθεσίν μου τὰ ἐν τῷ Ἐργαστηρίῳ Φυσικῆς ὑπάρχοντα μέσα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν.

SUMMARY

The graphic method of determination of the constants of the logistic curve representing, as known, the growth of the population, is not only toilsome, but also sometimes is not quite satisfactory.

We have therefore sought to determine logistically these constants.

To this effect we have the equation of the logistic curve

$$\psi = \frac{M}{1 + e^{\alpha - \beta x}} \tag{1}$$

where ψ is representing the density of the population in the period of time x, M the ordinate of the above asymptote (1) and α, β two constants. If

$$\psi_m \quad \psi_k \quad \psi_e$$

are three values of the density corresponding to three census executed at equal intervals between each other, we easily find the relation given by Messrs. Read & Pearl:

$$M = \frac{\dfrac{1}{\psi_m} + \dfrac{1}{\psi_e} - \dfrac{2}{\psi_k}}{\dfrac{1}{\psi_m} \cdot \dfrac{1}{\psi_e} - \dfrac{1}{\psi_k^2}} \tag{2}$$

Parting now the census in groups each of which is constituted by the elements of three census filling the above condition, that is to say distant between each other by equal intervals of time, we shall also have from each of these groups a value of M of the formula (2).

[1] R. PEARL, Studies in Human Biology.

In order that the values of M found by this way may be positive and higher than the value of density given by the last census, it is sufficient that: 1) in each group one of the three values of the density be the value ψ_e corresponding to the last census, and 2) that the two other obtained values be such that we may have

$$\psi_k^2 - \psi_m \cdot \psi_e > 0$$

After the determination of M, the constants α and β are determined from the equations:

$$\alpha - \beta x_i = \log \left\{ \frac{M}{\psi_i} - 1 \right\} \qquad i = 1, 2, 3, \dots$$

by means of the method of the least quadrates.

From the application of the formula (2) on numbers given by the census in the United States we find:

$$M = 197,19 \pm 0,03$$

This value nearly approaches that found by Messrs. Read & Pearl:

$$M = 197,27 \pm 0,55$$

by means of the graphical solution of the equation of the logistic curve.

In the case of Greece we find

$$M = 64,76$$

This value is more satisfactory than the value

$$M = 57,5$$

which is given by the graphical sofution of the equation (1)[1].

ΒΙΟΛΟΓΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.— **Kurze Mitteilung über eine Pyridineiweiss-verbindung*** *von Anast. A. Christomanos.* Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Ἐμμ. Ἐμμανουήλ.

Bringt man genuïnes Hühnereiweiss mit der gleichen Menge Pyridin (I:I) unter starkem Schütteln zusammen, so bildet sich unter Erwärmung um ca 10° eine weisse wachsartige Masse, die nach Erwärmen von 100° sich vollkommen verflüssigt, und eine klare gelbliche Farbe annimmt. Ist die Menge von Pyridin zum Eiweiss P>E, so bildet sich keine klare Lösung, sondern die grösste Menge des Eiweisses fällt als Pyridinverbindung

[1] V. G. VALAORAS: The growth of the population of Greece as described by the logistic curve, *Report of the Academy of Athens*, 11, 1936, p. 36.

* ΑΝΑΣΤ. ΧΡΙΣΤΟΜΑΝΟΥ.—Ἐπὶ μιᾶς ἑνώσεως λευκώματος καὶ πυριδίνης.