byzantine doivent être recherchées plutôt dans les centres des provinces grecques, parmi lesquelques Mistra est seul bien connu jusqu'à maintenant. L'auteur, qui a travaillé à Salonique, en Macédoine et dans les centres néglisés de la vieille Grèce (Karystia en Eubée, Argolis, Geraki, Égina etc.) a reuni un matériel abondant (cf. figure) il pense que avant la publication de celui-ci et des monuments des Balkans et de la Russie les opinions émises couramments, sur l'art de l'époque des Paléologues doivent être considérées comme prématurées.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES QUI PASSENT PAR CERTAINS POINTS AYANT UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE[1]

PAR M. GEORGES J. RÉMOUNDOS

Dans un travail publié en 1909 dans les «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» (Tomo XXVII, Sur la réductibilité des équations algébriques par des substitutions linéaires) nous avons démontré le théorème suivant:

Parmi les courbes algébriques inéductibles $\sum A_{m,n}\, x^m y^n = 0$ *où les coefficients* $A_{m,n}$ *sont des nombres algébriques, il n'y a que celles à équation binôme qui peuvent passer par des points ayant, dans ce même système d'axes, des coordonnées de la forme* $x = ae^{\alpha}, y = be^{\beta}$ *où les nombres* a, b, α, β *sont algébriques.*

Je me propose ici d'étudier le même problème arithmogéométrique pour les surfaces algébriques.

Envisageons une surface algébrique

$$F(x\, y\, z) = \sum A_{m,n,l}\, x^m y^n z^l = 0 \qquad (1)$$

irreductible, les coefficients étant des nombres algébriques et supposons qu'elle passe par un point ayant, dans le même système d'axes, des coordonnées de la forme:

$$x = ae^{\alpha}, \quad y = be^{\beta}, \quad z = ce^{\gamma} \qquad (2)$$

où les nombres $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont algébriques; la substitution des valeurs (2) à l'équation (1) nous conduira à une égalité de la forme:

$$\sum B_{m,n,l}{}^{lm\alpha+n\beta+l\gamma} = 0, \quad B_{m,n,l} = A_{m,n,l}\, a^m b^n c^l \quad (3)$$

les nombres $B_{m,n,l}$ étant aussi algébriques.

[1] ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΡΕΜΟΥΝΔΟΥ.—Περὶ μιᾶς τάξεως ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν ἀριθμητικήν τινα ἰδιότητα.

S'il y a dans cette égalité (3) des termes ayant le même exposant de l'exponentielle, ils seront réduits et nous n'avons qu'à effectuer ces réductions pour nous conduire à la forme des égalités, dont l'impossibilité se rattache au théorème bien connu d'Hermitte-Lindemann (Veber die Zahl, Mathematische Annalen, t. XX, 1882, p. 213-225). Si, donc, les exposants $m\alpha+n\beta+l\gamma$ sont tous distincts, l'impossibilité de l'égalité (3) est certaine, par ce que les coefficients $B_{m,n,l}$ sont visiblement différents de zéro; il suffit même qu'un seul terme reste irréductible pour que l'impossibilité de l'égalité (3) devienne certaine par suite du théorème d'HERMITTE-LINDEMANN; il faut, donc, que chaque terme se réduise avec un, au moins, des autres. Soit (G) un groupe de termes à coefficients.

$$A_{m_1 n_1 l_1},\quad A_{m_2 n_2 l_2},\quad A_{m_3 n_3 l_3},\quad A_{m_\varrho n_\varrho l_\varrho}$$

qui déviennent semblables (contiennent la même exponentielle) par la substitution des valeurs $x=ae^{\alpha}$, $y=be^{\beta}$, $z=ce^{\gamma}$ et $f(x, y, z)$ leur somme; nous aurons, alors, les égalités:

$$m_1\alpha+n_1\beta+l_1\gamma=m_2\alpha+n_2\beta+l_2\gamma=m_3\alpha+n_3\beta+l_3\gamma=\text{——}=m_\varrho\alpha+n_\varrho\beta+l_\varrho\gamma$$

d'où: $$(m_i-m_1)\alpha+(n_i-n_1)\beta+(l_i-l_1)\gamma=0 \qquad (i=2, 3, 4, \ldots \varrho) \qquad (4)$$

Avant d'aller plus loin, nous allons, pour faciliter les expressions, introduire une nouvelle notion, généralisant celle de l'homogénéïté.

Nous dirons que l'équation donnée (1) de la surface est *quasi-homogène*, lorsque il existe trois nombres constants P, q, v tels que la somme:

$$P_{m_i}+q_{n_i}+r_{l_i} \qquad (i=1, 2, 3, 4, \ldots \nu) \qquad (5)$$

soit la même pour tous les termes de l'équation.

Si, donc, nous supposons que l'équation (1) soit quasi-homogène, nous aurons les rélations:

$$(m_i-m_1)\,p+(n_i-n_1)\,q+(l_i-l_1)\,r=0 \qquad (6)$$

et, si les nombres p, q, v ne sont pas proportionnels aux exposants α, β, γ, les égalités (4) et (6) nous donnent les proportions:

$$\frac{m_i-m_1}{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ q & v\end{vmatrix}}=\frac{n_1-n_i}{\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ v & p\end{vmatrix}}=\frac{l_i-l_1}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & q\end{vmatrix}}=\mu_i \qquad (i=2, 3, \ldots p)$$

Il en résulte: $m_i-m_1=K_1\,\mu_i$, $n_i-n_1=K_2\,\mu_i$, $l_i-l_1=K_3\,\mu_i$

où: $K_1=\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ q & v\end{vmatrix}$, $K_2=\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ v & p\end{vmatrix}$, $K_3=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ p & q\end{vmatrix}$

et, par conséquent: $x^{m_i} y^{n_i} z^{l_i} = x^{m_1} y^{n_1} z^{l_1} \left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right)^{\mu_i}$

$$f(x,y,z) = x^{m_1} y^{n_1} z^{l_1} \sum A_{m_i n_i l_i} \left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right)^{\mu_i} = x^{m_1} y^{n_1} z^{l_1} \varphi\left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right) \quad (7)$$

où $\varphi\left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right) = \sum A_{m_i n_i l_i} \left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right)^{\mu_i}$ ou bien $\varphi(t) = \sum A_{m_i n_i l_i} t^{\mu_i}$

Cette expression (7) prend, pour $x = ae^{\alpha}$, $y = be^{\beta}$, $z = ce^{\gamma}$

la valeur: $a^{m_1} b^{n_1} c^{l_1} e^{\alpha m_1 + \beta n_1 + \gamma l_1} \varphi\left(a^{\kappa_1} b^{\kappa_2} c^{\kappa_3} e^{\alpha\kappa_1 + \beta\kappa_2 + \gamma\kappa_3}\right)$ (8)

Or, d'après le théorème d'HERMITTE-LINDEMANN, cette valeur (8) doit être nulle ce qui entraîne:

$$\varphi\left(a^{\kappa_1} b^{\kappa_2} c^{\kappa_3} e^{\alpha\kappa_1 + \beta\kappa_2 + \gamma\kappa_3}\right) = 0$$

mais cette quantité est la valeur de la fonction $\varphi(t)$ pour

$$t = x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3} = a^{\kappa_1} b^{\kappa_2} c^{\kappa_3} e^{\alpha\kappa_1 + \beta\kappa_2 + \gamma\kappa_3} \quad (9)$$

et, par conséquent, toutes les solutions de l'équation (9) [tous les points de la surface (9)] satisfont à l'équation: $f(x,y,z) = x^{m_1} y^{n_1} z^{l_1} \varphi\left(x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3}\right) = 0$

Il en est de même pour tous les groupes de termes de l'équation donnée qui contiennent la même exponentielle après la substitution des valeurs:

$$x = ae^{\alpha}, \qquad y = be^{\beta}, \qquad z = ce^{\gamma}$$

et, comme la surface (9) est indépendante des divers groupes, il en résulte que tous les points de la surface (9) appartiennent à la surface donnée, qui est supposée irréductible. Nous avons, donc, établi le théorème suivant:

Théorème. *Parmi les surfaces qui, dans un système d'axes, ont une équation quasi-homogène de la forme:*

$$F(x,y,z) = \sum A_{mnl} x^m y^n z^l = 0$$

ayant un nombre fini de termes, où les coefficients A_{mnl} *et les exposants* m, n, l *sont algébriques quelconques, il n'y a que les surfaces à équation binôme:*

$$x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3} = K$$

qui puissent passer par les points de l'espace ayant, dans le même système d'axes, des coordonnées de la forme: $x = ae^{\alpha}$, $y = be^{\beta}$, $z = ce^{\gamma}$

les nombres a, b, c, α, β, γ, étant algébriques.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς ἐργασίαν μου δημοσιευθεῖσαν τῷ 1909 εἰς τὸ περιοδικὸν *Rendiconti del Çircolo matematico di Palermo* (Tomo XXVII, Sur la réductibilité des équations algébriques par des substitutions linéaires) ἀπεδείξαμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Μεταξὺ τῶν ἀναγώγων ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων $\sum A_{mn} x^m y^n = 0$ *ὅπου οἱ συντελεσταὶ* $A_{m,n}$ *ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, μόνον αἵ ἔχουσαι μορφὴν διώνυμον δύνανται νὰ ἔχωσι λύσιν τῆς μορφῆς:* $x = ae^{\alpha}$, $y = be^{\beta}$ *τῶν ἀριθμῶν* a, b, α, β *ὄντων ἀλγεβρικῶν.*

Ἐζήτησα νὰ ἐπεκτείνω τὴν ἰδιότητα ταύτην εἰς τὰς ἐπιφανείας (εἰς τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας τρεῖς μεταβλητὰς) καὶ ἔφθασα εἰς τὸ ἑξῆς ἀποτέλεσμα:

Θεωρήσωμεν ἐξίσωσιν:

$$F(x, y, z) = \sum A_{m,n,l}\, x^m y^n z^l = 0 \qquad (1)$$

ἔχουσαν πεπερασμένον πλῆθος ὅρων. Θὰ λέγωμεν ὅτι αὔτη εἶναι *ὁμογενοειδὴς* ὅταν ὑπάρχωσι τρεῖς σταθεροὶ ἀριθμοὶ P, q, v τοιοῦτοι ὥστε τὸ ἄθροισμα:

$$P_{m_i} + q_{n_i} + r_{l_i}$$

νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν δι᾽ ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως.

Εἰς τὰς ἐξισώσεις ταύτας τὰς ὁμογενοειδεῖς κατώρθωσα νὰ ἐπεκτείνω τὴν ὡς ἄνω ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων *μὲ* δύω μεταβλητὰς διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

Θεώρημα. *Μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τῶν ἀναγώγων ὁμογενοειδῶν:*

$$F(x, y, z) = \sum A_{mnl}\, x^m y^n z^l = 0$$

τῶν ἐχουσῶν πεπερασμένον πλῆθος ὅρων, ἐν οἷς οἱ συντελεσταὶ καὶ οἱ ἐκθέται εἶναι πάντες ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, μόνον αἵ διώνυμοι τῆς μορφῆς:

$$x^{\kappa_1} y^{\kappa_2} z^{\kappa_3} = \kappa$$

δύνανται νὰ ἐπαληθεύωνται ὑπὸ τιμῶν τῆς μορφῆς:

$$x = ae^{\alpha}, \qquad y = be^{\beta}, \qquad z = ce^{\gamma}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ a, b, c, α, β, γ εἶναι ἀλγεβρικοί.

Ὀφείλω ἐνταῦθα νὰ τονίσω ὅτι ἡ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἐν ἀρχῇ εἴπομεν, περὶ τῶν ἐξισώσεων μὲ δύω μεταβλητάς, ἀληθεύει ὄχι μόνον διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις ἀλλὰ δι᾽ ὅλας τῆς μορφῆς:

$$\sum A_{mn}\, x^m y^n = 0$$

τὰς ἐχούσας πεπερασμένον πλῆθος ὅρων τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ καὶ οἱ ἐκθέται εἶναι ἀριθμοὶ ἀλγεβρικοί.