ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur certaines notions préliminaires de l'hyperalgèbre linéaire - Introduction de l'hypergroupe polysymétrique,** *par Stavros G. Ioulidis et Jean D. Mittas* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλωνος Βασιλείου.

A'. INTRODUCTION DE L'HYPERALGÈBRE LINÉAIRE

1. Par le présent travail nous nous proposons de définir, en vue d'applications ultérieures, la structure hypercompositionnelle correspondante à l'algèbre linéaire, ainsi que les applications linéaires entre des hyperespaces vectoriels [**1**], [**13**] — c'est-à-dire des espaces vectoriels ayant comme domaine d'opérateurs un hypercorps commutatif (1) [**3**], [**11**], [**12**]. Pour ce but nous considérerons des matrices à éléments dans un hypercorps, qui feront aussi le passage à l'introduction d'une nouvelle structure hypercompositionnelle, celle de *l'hypergroupe polysymétrique* (mais d'espèce différente que celle de [**8**]).

2. Ce qui nous a conduit, tout d'abord, à réaliser la généralisation ci-dessus est la considération en [**12**] de l'ensemble $K[x]$ des hyperpolynômes — c'est-à-dire des polynômes à coefficients dans un hypercorps K-qui, comme on le sait, est, en effet, un K-hyperespace vectoriel [**13**] et, en même temps, un superanneau [**12**], qui, comme il est évident, vérifie en plus, pour tout $p(x)$, $q(x) \in K[x]$ et pour tout $\lambda \in K$, la propriété

$$\lambda[p(x)\, q(x)] = [\lambda p(x)]\, q(x) = p(x)\, [\lambda q(x)].$$

Outre l'exemple des hyperpolynômes un autre cas très important résulte de la considération des matrices à éléments dans un hypercorps K, autrement dit des *hypermatrices* ou K-*hypermatrices*, selon la terminologie adoptée pour les hyperstructures. Relativement on remarque que, si on accepte p a r d é f i n i t i o n les règles d'opérations des matrices pour les

---

* Σ. Γ. ΙΟΥΛΙΔΗ - Ι. Δ. ΜΗΤΤΑ, **Ἐπὶ μερικῶν εἰσαγωγικῶν ἐννοιῶν τῆς γραμμικῆς ὑπεράλγεβρας - Εἰσαγωγὴ τῆς πολυσυμμετρικῆς ὑπερομάδος.**

(1) Dans ce qui suit tous les hypercorps considérés seront commutatifs.

hypermatrices, l'addition et la multiplication dans l'ensemble de ces dernières sont des hyperopérations. En effet on a évidemment

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = \{ (c_{ij}) : c_{ij} \in a_{ij} + b_{ij} \},$$

pour des hypermatrices quelconques (a_{ij}), (b_{ij}) d'un même type $m \times n$ et

$$(a_{ij})\ (b_{ij}) = \left\{ (c_{ij}) : c_{ij} \in \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} \right\},$$

pour des hypermatrices (a_{ij}), (b_{ij}) de même quelconques, mais de type $m \times p$ et $p \times n$ respectivement.

Quant à l'opération externe avec comme domaine d'opérateurs l'hypercorps K lui-même on a, comme dans le cas classique,

$$\lambda (a_{ij}) = (a_{ij}) \lambda = (\lambda a_{ij}) .$$

De même comme dans le cas classique on a pour l'égalité dans l'ensemble des hypermatrices d'un même type

$$(a_{ij}) = (b_{ij}), \text{ si } a_{ij} = b_{ij} .$$

Après les notions ci-dessus on vérifie facilement et à l'aide des propriétés des hypercorps la proposition suivante :

Proposition 1. *L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}$ des K-hypermatrices de type $m \times n$ est un hyperespace vectoriel par rapport à l'addition des hypermatrices (comme hyperopération) et à leur multiplication par les éléments de K (comme opération externe).*

Remarque 1. Sauf le cas des opérations ci-dessus et la notion de l'égalité d'hypermatrices, à la théorie des K-hypermatrices et au point de vue de la terminologie nous tiendrons les divers termes de la théorie correspondante classique. On parlera ainsi des hypermatrices-lignes et colonnes, des hypermatrices nulles, carrées, unitaires, triangulaires, diagonales, scalaires, de la transposée d'une hypermatrice, et, encore du déterminant d'une hypermatrice carrée, qui, comme il est clair, représente un sous-ensemble de K.

On voit ensuite que les hypermatrices E_{ij} du type $m \times n$, ayant à la place (i, j) l'unité (1) de K et à toute autre place le zéro (0) de K, sont évidemment des hypervecteurs linéairement indépendants de l'hyperespace $\mathcal{M}_{m,n}$ et toute autre hypermatrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ est une combinaison linéaire stricte de E_{ij}. Elles constituent donc un système à la fois strictement libre et strictement générateur de $\mathcal{M}_{m,n}$ donc, par conséquent, une base stricte de $\mathcal{M}_{m,n}$ qui, comme il est facile de voir, est exceptionnelle. Le nombre des hypervecteurs E_{ij} étant mn nous pouvons énoncer [**1**], [**13**] :

P r o p o s i t i o n 2. *L'hyperespace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}$ est exceptionnel de dimension mn, possédant comme une base exceptionnelle les hypermatrices* E_{ij}.

3. Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des K-hypermatrices carrées d'ordre n. Dans cet ensemble la multiplication est partout définie et on vérifie sans peine les propriétés :

i) $(AB)C = A(BC)$

ii) $A(B+C) \subseteq AB+AC, \quad (B+C)A \subseteq BA+CA$

iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

quelsque soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n$ et $\lambda \in K$.

R e m a r q u e s 2. a) Il faut remarquer que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition n'a pas toujours lieu aux hypermatrices sauf sous le sens large des propriétés (ii) ci-dessus. En effet l'inverse de ces propriétés, qui, assurerait l'égalité n'est pas en général vrai, c'est-à-dire on n'a pas généralement $AB+AC \subseteq A(B+C)$, respec. $BA+CA \subseteq (B+C)A$, comme cela résulte de l'investigation détaillée du sujet et comme on peut le voir au contre-exemple suivant d'hypermatrices d'ordre 2 et où l'hypercorps K est l'hypercorps $\mathbf{R}_+$ «à éléments autoopposés» des nombres réels (2) $\geqslant 0$ [**9**] :

Soit $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

pour lesquelles on a (après la réalisation des opérations)

---

(2) La multiplication dans cet hypercorps est la multiplication habituelle, tandis que l'hyperaddition $\dot{+}$ est définie comme suit : $a \dot{+} b = [|a-b|, a+b]$ pour tout $a, b \in R_+$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc puisque
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on a
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $O \in AB+AC$. Mais $O \notin A(B+C)$, car s'il avait lieu le contraire, il y aurait une hypermatrice

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

telle que $X \in B+C$ et encore, telle que $O \in AX$, auquel cas nous aurions

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, comme les hypervecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de l'hyperespace vectoriel $\mathbf{R}^2_+$ sont linéairement indépendants (linéairement strictement libres), on aurait $x_{11} = x_{21} = 0$ et on trouverait de même de manière analogue que $x_{12} = x_{22} = 0$. On aurait donc $X = O$ et par conséquent $B = -C = C$, ce qui n'a pas lieu pour les hypermatrices considérées B et C.

b) Toutefois il est facile de voir que la distributivité a toujours lieu lorsque l'hypermatrice A est une hypermatrice-ligne au premier cas, respectivement une hypermatrice-colonne au second.

Des éléments remarquables de $\mathcal{M}_n$ sont évidemment l'hypermatrice nulle O (élément neutre pour l'addition), qui est un élément bilatéralement absorbant pour la multiplication et l'hypermatrice unité I, qui est un élément bilatéralement neutre et, en même temps, scalaire, pour la multiplication [**4**], [**10**], [**12**], donc élément neutre unique par rapport à elle.

Le fait que à l'ensemble $\mathcal{M}_n$ la distributivité n'est pas en général valable, sauf sous le sens large de la propriété plus haut (b), nous conduit à dilater la notion de superanneau [**12**] en définissant la structure du *superanneau au sens large* ou *hyper-hyperanneau* comme suit :

D é f i n i t i o n 1. Une structure hypercompositionnelle par deux hyperopérations (addition et multiplication) $(S, +, \bullet)$ est dite *hyper-hyperan-*

neau ou *superanneau au sens large* si elle satisfait à tous les axiomes du superanneau sauf la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition au lieu de laquelle on aura

$$x(y+z) \subseteq xy+xz\ ; \quad (y+z)x \subseteq yx+zx$$

pour tout $x, y, z \in S$.

Remarque 3. Tout anneau, ainsi que tout hyperanneau et plus généralement tout superanneau, est un hyper-hyperanneau.

Donc, d'après les précédents, relativement on a :

Proposition 3. *L'ensemble $\mathcal{M}_n$ des hypermatrices carrées d'ordre n organisé en structure par les hyperopérations de l'addition et de la multiplication est un hyper-hyperanneau.*

Remarque 4. Évidemment l'hyper-hyperanneau $\mathcal{M}_n$ est unitaire, non commutatif et il possède de diviseurs du zéro (également comme dans le cas correspondant classique).

Il s'ensuit donc, vu des propriétés de $\mathcal{M}_n$ que, généralisant, nous pouvons définir :

Définition 2. On appelle *algèbre linéaire sur un hypercorps K* ou *K-hyperalgèbre linéaire* un ensemble L qui est un K-hyperespace vectoriel et, en même temps, un hyper-hyperanneau, qui vérifie en plus pour tout $x, y \in L$ et pour tout $\lambda \in K$ la propriété

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y).$$

Une hyperalgèbre linéaire sera dite *exceptionnelle*, si l'hyperespace vectoriel correspondant est exceptionnel. Elle sera dite *unitaire*, si l'hyper-hyperanneau correspondant en est tel.

Remarques 5. a) Toute algèbre linéaire est une hyperalgèbre linéaire.

b) Il est clair que le superanneau de K-hyperpolynômes est aussi une hyperalgèbre linéaire, disons, *stricte*, car on n'a pas ici de superanneau au sens large mais un *propre* superanneau.

D'après les définitions ci-dessus et les précédents on a :

Proposition 4. *L'ensemble $\mathcal{M}_n$ est une hyperalgèbre linéaire, même exceptionnelle et unitaire.*

B'. LES APPLICATIONS HYPERLINÉAIRES ET CERTAINES DE LEURS PROPRIÉTÉS

1. Selon la théorie classique à toute matrice $A = (a_{ij})$ du type $m \times n$ à éléments dans un corps K correspond de manière biunivoque et dans de bases fixées une application linéaire $f : K^n \to K^m$ de l'espace vectoriel K^n dans l'espace vectoriel K^m, exprimée par le système

$$y = Ax$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$. Il est évident que dans la théorie des structures hypercompositionnelles, où K est un hypercorps, le système analogue au précédent est évidemment de la forme

$$y \in Ax .$$

On voit ainsi que dans le cas présent à tout $x \in K^n$ correspond moyennant ce système un sous-ensemble de K^m. En d'autres termes ce système définit une application multivoque

$$f : K^n \to \mathscr{P}(K^m)$$

telle que $f(x) = Ax$ pour tout $x \in K^n$. Pour cette application il est facile de voir que l'on a

$$f(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) \subseteq \lambda (Ax) + \mu (Ay) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

quels que soient $x, y \in K^n$ et $\lambda, \mu \in K$. Nous nous sommes ainsi amenés, vu du cas correspondant classique et de la notion de l'homomorphisme dans la théorie des hypergroupes [**6**], [**10**] (et tenant compte la terminologie introduite pour les hyperstructures), à définir :

D é f i n i t i o n 3. Soient H et H' deux K-hyperespaces vectoriels. On appelle *application hyperlinéaire* ou *homomorphisme* de H dans H' toute application $f : H \to \mathscr{P}(H')$ de H dans $\mathscr{P}(H')$ qui vérifie la propriété

$$f(\lambda x + \mu y) \subseteq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

quels que soient $x, y \in H$ et $\lambda, \mu \in K$.

On voit facilement que toute application hyperlinéaire de l'hyperespace vectoriel H dans l'hyperespace vectoriel H' est un homomorphisme de l'hypergroupe canonique de H dans l'hypergroupe canonique de H'. Suivant la terminologie rapportée aux homomorphismes dans la théorie des hyper-

groupes si une application hyperlinéaire est une application $f : H \to H'$ de H dans H', nous la dirons de même *stricte* et si l'on a $f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$ *forte*. Une application hyperlinéaire qui est à la fois stricte et forte sera dite *normale*, comme p. e. c'est le cas des applications linéaires entre les espaces vectoriels habituels. Mais il existe des applications hyperlinéaires normales entre les hyperespaces vectoriels propres. P. e. si on définit la dérivée d'un hyperpolynôme de la même façon que la dérivée (au sens algébrique) d'un polynôme, l'application qui fait correspondre à tout hyperpolynôme sa dérivée est une application hyperlinéaire normale de $K[x]$ dans $K[x]$.

Remarque 6. De la définition de l'application hyperlinéaire découle facilement que, quels que soient $x \in H$ et $\lambda \in K$ on a

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

car, en général, on a $f(\lambda x) \subseteq \lambda f(x)$, d'où, pour[3] $\lambda = 0$, $f(o) = o$. D'autre part, pour $\lambda \neq 0$, on a $f(\lambda\lambda^{-1} x) \subseteq \lambda f(\lambda^{-1} x)$, donc $f(x) \subseteq \lambda f(\lambda^{-1} x)$ et si on met $\lambda^{-1} = \mu$, $\mu f(x) \subseteq f(\mu x)$. Il en résulte $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Comme conséquence immédiate on a $f(-x) = -f(x)$.

2. Limitons-nous maintenant aux hyperespaces vectoriels exceptionnels de dimension finie et considérons tout d'abord les hyperespaces K^n et K^m et une application hyperlinéaire de K^n dans K^m donnée par la formule $f(x) = Ax$, où A est une K-hypermatrice donnée de type $m \times n$. Dans ce cas l'application f satisfait aux conditions supplémentaires se rapportant aux bases exceptionnelles de K^n. Soit en effet $\{u_j : j = 1, \ldots, n\}$ une telle base. On aura [**1**], [**13**] $u_j = a_j e_j$ avec $a_j \in K$ et où $e_j = (e_1^{(j)}, \ldots, e_n^{(j)})$ est la base canonique de K^n, (c'est-à-dire où $e_j^{(j)} = 1$ et, pour $i \neq j$, $e_i^{(j)} = 0$ — qui évidemment est une base exceptionnelle). Pour cette base il résulte immédiatement de la formule $f(x) = Ax$ que :

i) $f(u_j)$ est un singleton $(j = 1, \ldots, n)$

ii) $f(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) = x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n)$

(3) On écrit $f(o) = o$ au lieu de $\{o\}$, selon la convention générale concernant les hyperstructures d'identifier (s'il n'y a pas le risque de confusion) les singletons $\{a\}$ avec les éléments correspondants [**10**].

Une application hyperlinéaire entre deux hyperespaces vectoriels exceptionnels H et H′ de dimension finie satisfaisante en plus à ces conditions se rapportantes à une base exceptionnelle de H (donc [**1**], [**13**] à n'importe quelle base exceptionnelle de H) s'appelera *exceptionnelle* et telle est p. e. l'application hyperlinéaire ci-dessus définie par l'hypermatrice A.

Considérons par la suite deux K-hyperespaces vectoriels exceptionnels H et H′ de dimension respectivement $\dim H = n$ et $\dim H' = m$ et une application hyperlinéaire exceptionnelle $f : H \to \mathscr{P}(H')$. Soient encore deux bases exceptionnelles $\{u_1, \ldots, u_n\}$ et $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ de H et H′ respectivement. Alors pour tout $x \in H$ on aura $x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$, $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$ et selon les précédents

$$f(x) = x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n).$$

Mais les images $f(u_j)$ de u_j étant des singletons de H′ on aura dans H′ pour les éléments correspondants

$$f(u_j) = a_{1j} u'_1 + \ldots + a_{mj} u'_m,$$

où $a_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Il s'ensuit que

$$f(x) = x_1 (a_{11} u'_1 + \ldots + a_{m1} u'_m) + \ldots + x_n (a_{1n} u'_1 + \ldots + a_{mn} u'_m)$$

ou, puisque la base $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ est exceptionnelle,

$$f(x) = (a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n) u'_1 + \ldots + (a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n) u'_m.$$

Donc pour chaque $y \in f(x)$ on aura $y = y_1 u'_1 + \ldots + y_m u'_m$ et par conséquent

$$y_i \in a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$$

c'est-à-dire une «*équation hypermatricielle*» de la forme

$$y \in Ax$$

où $A = (a_{ij})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$.

Des précédents nous concluons les propositions suivantes:

P r o p o s i t i o n 5. *Toute application hyperlinéaire exceptionnelle d'un hyperespace vectoriel exceptionnel H dans un autre de même exceptionnel H′, tous les deux étant de dimension finie, est définie si les images des hyper-*

vecteurs d'une base exceptionnelle de H sont données. En plus ces images sont des singletons de H'.

Proposition 6. *Étant données les K-hyperespaces vectoriels exceptionnels H et H' de* $\dim H = n$ *et* $\dim H' = m$ *il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble* $\mathscr{L}_e(H, H')$ *des applications hyperlinéaires exceptionnelles de H dans H' et de l'ensemble* $\mathscr{M}_{m,n}$ *des K-hypermatrices du type* $m \times n$ *qui les représentent dans des bases exceptionnelles fixées de ces hyperespaces.*

3. Après les notions et les propriétés précédentes il faut examiner quelle peut être généralement la structure de l'ensemble $\mathscr{L}(H, H')$ des applications hyperlinéaires $H \to \mathscr{P}(H')$, où H et H' sont deux K-hyperespaces vectoriels quelconques. On introduit pour cela une hyperopération interne dans $\mathscr{L}(H, H')$ —*addition*— et une opération externe par les éléments de K-*multiplication*- comme suit :

Soit $f, g \in \mathscr{L}(H, H')$. On appelle *somme* $f+g$ de f et g l'ensemble des applications hyperlinéaires $h : H \to \mathscr{P}(H')$ qui sont telles que $h(x) \subseteq f(x)+g(x)$ pour tout $x \in H$. C'est-à-dire

$$f + g = \{h \in \mathscr{L}(H, H') : (\forall x \in H)\ [h(x) \subseteq f(x) + g(x)]\}.$$

La somme ainsi définie n'est jamais vide parcequ'elle contient toujours l'application $h : H \to \mathscr{P}(H')$ telle que $h(x) = f(x) + g(x)$, quelque soit $x \in H$, qui évidemment est hyperlinéaire. D'autre part il existe des applications hyperlinéaires $f, g, h \in \mathscr{L}(H, H')$ telles que $h(x) \subset f(x) + g(x)$, comme on peut le voir par exemple dans le cas où f et g sont des applications hyperlinéaires exceptionnelles entre des K-hyperespaces vectoriels exceptionnels de dimension finie. P. e. si $f, g \in \mathscr{L}_e(H, H')$ sont telles que $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$, où A et B sont des hypermatrices du type $m \times n$ lorsque $\dim H = n$, $\dim H' = m$, alors une $h \in \mathscr{L}_e(H, H')$ telle que son hypermatrice correspondante C soit $\in A+B$, elle est $\in f+g$. En effet, on aura en général $h(x) = Cx \subset (A + B)\, x = Ax + Bx = f(x) + g(x)$ [voir remarque 2b].

Quant au *produit externe* λf, $\lambda \in K$, $f \in \mathscr{L}(H, H')$, celui-ci est défini comme dans le cas classique, c'est-à-dire $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in H$.

On considére aussi l'application nulle — notée 0 — [c'est-à-dire telle que $0(x) = o$] et, pour tout $f \in \mathscr{L}(H, H')$, l'application $-f$ [c'est-à-dire telle que $(-f)(x) = -f(x)$], qui, évidemment, sont hyperlinéaires.

Après les définitions ci-dessus on conclût facilement la proposition :

Proposition 7. *L'ensemble $\mathscr{L}(H, H')$, muni de l'addition des applications hyperlinéaires comme hyperopération et de la multiplication avec comme domaine d'opérateurs l'hypercorps K comme opération externe, est un K-hyperespace vectoriel.*

4. Considérons maintenant que H et H′ sont des K-hyperespaces vectoriels exceptionnels de dimension finie, soit $\dim H = n$ et $\dim H' = m$ et soit $\mathscr{L}_e(H, H')$ l'ensemble des applications hyperlinéaires exceptionnelles de H dans H′. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux hypermatrices de type $m \times n$ ayant les éléments, p. e., $a_{11} = a \neq 0$ et $b_{11} = b \neq 0$ et tous les autres éléments égaux à 0, alors pour les applications $f, g \in \mathscr{L}_e(H, H')$ définies respectivement par les hypermatrices A et B et pour tout $x = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n \in H$ [où $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base exceptionnelle de H], on aura

$$f(x) = Ax = ax_1 u_1' + 0u_2' + \ldots + 0u_m' = ax_1 u_1',$$
$$g(x) = Bx = bx_1 u_1' + 0u_2' + \ldots + 0u_m' = bx_1 u_1'$$

[où $(u_1', \ldots, u_m')$ est une base exceptionnelle de H′]. L'application $h : H \to \mathscr{P}(H')$ telle que $h(x) = f(x) + g(x) = Ax + Bx = \{cx_1 u_1' : c \in a + b\}$ est, comme cela a été citée plus haut, une application hyperlinéaire, donc $h \in \mathscr{L}(H, H')$, mais pas exceptionnelle, car l'image, p. e. de l'hypervecteur u_1 de la base exceptionnelle considérée n'est pas un singleton [on a $h(u_1) = \{cu_1' : c \in a + b\}$, (voir proposition 5)]. Nous concluons ainsi la proposition :

Proposition 8. *Si H et H′ deux hyperespaces vectoriels exceptionnels, on a en général $\mathscr{L}_e(H, H') \subset \mathscr{L}(H, H')$.*

D'autre part on voit que si nous limitons l'addition $f + g$ dans $\mathscr{L}_e(H, H')$, lorsque $f, g \in \mathscr{L}_e(H, H')$, en considérant que $f \dot{+} g \subseteq \mathscr{L}_e(H, H')$, on vérifie facilement que

Proposition 9. *L'ensemble $\mathscr{L}_e(H, H')$ est un hyperespace vectoriel, qui n'est pas en général un sous-hyperespace vectoriel* [**1**], [**13**] *de $\mathscr{L}(H, H')$.*

En ce qui concerne les bases de cet hyperespace on a, vu de la proposition 6, que une telle est constituée par les applications hyperlinéaires exceptionnelles f_{ij}, ayant comme hypermatrices correspondantes E_{ij}, que nous avons cité au commencement, dans des bases exceptionnelles $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(u_1', \ldots, u_m')$ de H et de H′ respectivement. Évidemment on a

$$f_{ij}(u_k) = E_{ij}\, u_k = u_i', \quad \text{si } k = j, \quad \text{et } o, \quad \text{si } k \neq j$$
$$f_{ij}(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) = x_1 f_{ij}(u_1) + \ldots + x_n f_{ij}(u_n)$$

[car $f_{ij}(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) \subseteq x_1 f_{ij}(u_1) + \ldots + x_n f_{ij}(u_n) = x_j f_{ij}(u_j) = x_j u_i'$] ce qui entraîne :

Proposition 10. *L'hyperespace vectoriel $\mathscr{L}_e(H, H')$ est exceptionnel de dimension mn (où $n = \dim H$ et $m = \dim H'$).*

Il s'ensuit, vu de la notion de l'isomorphisme entre les hyperespaces vectoriels exceptionnels [**13**], que

Proposition 11. *Les hyperespaces vectoriels exceptionnels $\mathscr{L}_e(H, H')$ et $\mathscr{M}_{m,n}$ sont isomorphes.*

5. Sauf l'addition $f + g$ et la multiplication externe λf définies dans l'ensemble $\mathscr{L}(H, H')$ comme hyperopération et opération respectivement, on a encore la *composition* ou *multiplication* des applications hyperlinéaires définie comme suit :

Soient H, H′, H″ trois K-hyperespaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(H, H')$ et $g \in \mathscr{L}(H', H'')$ deux applications hyperlinéaires :

$$f : H \to \mathscr{P}(H'), \qquad g : H' \to \mathscr{P}(H'').$$

On appelle *produit* de f et g, notée $g \circ f$ ou gf, l'ensemble des applications hyperlinéaires $h : H \to \mathscr{P}(H'')$ qui sont telles que $h(x) \subseteq g[f(x)]$ pour tout $x \in H$. C'est-à-dire

$$g \circ f = \{h \in \mathscr{L}(H, H'') : (\forall x \in H)\ [h(x) \subseteq g[f(x)]]\}.$$

Le produit $g \circ f$ ainsi défini n'est jamais vide, parce qu'il contient toujours l'application $h : H \to \mathscr{P}(H'')$ telle que $h(x) = g[f(x)]$, qui est hyperlinéaire, car

$$h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = g[f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] \subseteq g[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] =$$
$$= \bigcup_{y_1 \in f(x_1),\, y_2 \in f(x_2)} g(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \subseteq \bigcup_{y_1 \in f(x_1),\, y_2 \in f(x_2)} [\lambda_1 g(y_1) + \lambda_2 g(y_2)] =$$
$$= \lambda_1 g[f(x_1)] + \lambda_2 g[f(x_2)] = \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2),$$

quelsque soient $x_1, x_2 \in H$; $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. D'autre part il existe des applications hyperlinéaires $f \in \mathscr{L}(H, H')$, $g \in \mathscr{L}(H', H'')$, $h \in \mathscr{L}(H, H'')$ telles que $h(x) \subset g[f(x)]$, comme on le voit p. e. dans le cas où f et g sont des applications hyperlinéaires exceptionnelles entre des K-hyperespaces vectoriels exceptionnels de dimension finie. P. e. si $f \in \mathscr{L}_e(H, H')$ et $g \in \mathscr{L}_e(H', H'')$ sont telles que $f(x) = Ax$ et $g(y) = By$, où A et B sont des hypermatrices des types $p \times n$ et $m \times p$ respectivement, lorsque $\dim H = n$, $\dim H' = p$, $\dim H'' = m$, alors une $h \in \mathscr{L}_e(H, H'')$ telle que son hypermatrice correspondante C soit $\in A + B$, elle est $\in g \circ f$. En effet on a en général

$$h(x) = Cx \subset (BA)x = B(Ax) = \bigcup_{y \in Ax} By = \bigcup_{y \in f(x)} g(y) = g[f(x)].$$

Au cas où l'on a $H = H' = H''$, évidemment tout couple d'applications hyperlinéaires f et g se compose. Donc la multiplication $g \circ f$ est dans l'ensemble $\mathscr{L}(H, H)$ une seconde hyperopération interne et il est facile de vérifier les propositions :

Proposition 12. *L'ensemble $\mathscr{L}(H, H)$ des applications hyperlinéaires de K-hyperespace vectoriel H dans lui-même, organisé en structure par les hyperopérations de l'addition et de la multiplication des applications hyperlinéaires, est un hyper-hyperanneau unitaire* (où, évidemment, l'élément unité est l'application idéntique de H).

Proposition 13. *L'ensemble $\mathscr{L}(H, H)$, muni de l'addition et de la multiplication des applications hyperlinéaires et de la multiplication externe avec comme domaine d'opérateurs l'hypercorps K, est une hyperalgèbre linéaire unitaire.*

Et si par la suite nous-nous limitons à la considération des hyperespaces H exceptionnels de dimension finie et nous limitons l'addition $f+g$ et la multiplication $f \circ g$ dans $\mathscr{L}_e(H, H)$, lorsque $f, g \in \mathscr{L}_e(H, H)$, en con-

sidérant c'est-à-dire que $f+g \subseteq \mathscr{L}_e(H, H)$ et $f \circ g \subseteq \mathscr{L}_e(H, H)$, on vérifie facilement, vu encore de la proposition 8, que :

Proposition 14. *L'ensemble $\mathscr{L}_e(H, H)$ est une hyperalgèbre linéaire unitaire exceptionnelle, qui n'est pas en général une sous-hyperalgèbre linéaire de $\mathscr{L}(H, H)$* (et où le sens du terme sous-hyperalgèbre est évident).

On voit en effet que, comme dans le cas de l'addition pour $f(x) = Ax$, $g(y) = By$, l'application $h : H \to \mathscr{P}(H)$ telle que $h(x) = (BA)x$ est hyperlinéaire, mais pas exceptionnelle.

Γ'. INTRODUCTION DE L'HYPERGROUPE POLYSYMÉTRIQUE

1. Sauf les structures hypercompositionnelles des hyper-hyperanneaux et des hyperalgèbres linéaires qui ont été introduites moyennant la considération des hypermatrices, une autre structure hypercompositionnelle encore peut être introduite de même par la considération des hypermatrices. Il s'agit de la structure de *l'hypergroupe polysymétrique*, dont l'introduction se réalise par la considération de la structure correspondante au groupe des matrices carrées régulières d'un même ordre. En effet, soit A une hypermatrice carrée d'ordre n et $|A|$ (où $\det A$) son déterminant. L'hypermatrice A est appelée *régulière*, si $0 \notin |A|$, *singulière* ou *irrégulière*, si $\{0\} \subset |A|$ et *fortement singulière* ou *fortement irrégulière*, si $|A| = \{0\}$. (Évidemment l'application hyperlinéaire correspondante à l'hypermatrice A dépend de cette espèce de A, mais l'étude de telles applications et, en général, l'étude détaillée des applications hyperlinéaires est au délà de l'objet du présent travail). Une hypermatrice carrée A d'ordre n est appelée *inversible* s'il existe une hypermatrice A′ au moins telle que $I \in AA' \cap A'A$, où I est l'hypermatrice unitaire d'ordre n. Dans ce cas A′ est une *inverse* de l'hypermatrice A. Évidemment si on a seulement $I \in AA'$, respect. $I \in A'A$, A est *inversible à droite*, respect. *à gauche* et A′ est une *inverse* de A *à droite* ou *à gauche*, selon le cas. Contrairement à la théorie classique où l'une des égalités $I = AA'$ ou $I = A'A$ implique l'autre, dans la théorie présente et pour hypercorps K propre on peut avoir $I \in AA'$ sans avoir $I \in A'A$, comme on le voit à l'exemple suivant des hypermatrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d'ordre 2 à éléments dans l'hypercorps $\mathbf{R}_+$ «à éléments autoopposés» (page 363) où on a

$$I \in AA', \quad I \notin A'A \quad \text{et} \quad I \in A''A, \quad I \notin AA''.$$

L'investigation détaillée du problème de l'inversibilité d'une hypermatrice carrée d'ordre n, ainsi que celui de la stabilité de l'ensemble $\mathscr{M}_n$ de telles hypermatrices par rapport à la multiplication, montre que leurs résolutions exigent le developpement complet d'une grande partie du calcul hypermatriciel — l'analogue du calcul matriciel classique — qui est, même, assez compliqué pour la cause du caractère intrigué des hyperopérations et qui fera l'objet d'autres de nos travaux. Mais nous exposerons ici la résolution pour le cas special de $n = 2$, qui est d'ailleurs nécessaire, considérée comme introductive pour la résolution dans le cas général, qui pour le moment reste ouvert.

2. Pour la résolution des problèmes ci-dessus dans l'ensemble $\mathscr{M}_2$ il faut tout d'abord résoudre le système des «K-équations hyperlinéaires»

$$\begin{aligned} b_1 &\in a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ b_2 &\in a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

ou, en forme hypermatricielle

$$b \in Ax \tag{2}$$

où évidemment $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = (b_1, b_2)^T$, $x = (x_1, x_2)^T$.

Nous distinguons les cas :

i) $|A| = \{0\}$, c'est-à-dire A est fortement singulière.

Nous remarquons tout d'abord que *pour qu'une K-hypermatrice d'ordre 2 A, dont l'hypercorps K est propre, soit fortement singulière, il faut et il suffit que l'une de ses lignes ou de ses colonnes soit nulle* (parce que dans un hypercorps propre on n'a jamais $a - a = 0$, car dans ce cas $a \in K$ serait un scalaire et, par conséquent, K ne serait pas propre [**6**], [**10**], [**12**]). On trouve facilement que l'*on a aucune solution, si* $0 \notin |A_1| \cap |A_2|$, *ou une infinité de solutions, si* $0 \in |A_1| \cap |A_2|$, où évidemment $|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.
Si K n'est pas propre, on a les mêmes, selon la théorie classique.

ii) $|A| \neq \{0\}$, sans exclure le cas $0 \in |A|$. Évidemment si $0 \in |A|$, l'hypercorps K est propre ou, s'il n'en est tel, $0 \notin |A|$.

ii$_1$) Soit tout d'abord $b \neq o$. Alors de (1) on a

$$a_{12}\, x_2 \in b_1 - a_{11}\, x_1 \quad \text{et} \quad a_{22}\, x_2 \in b_2 - a_{21}\, x_1 \tag{3}$$

d'où

$$(a_{12}\, a_{22} - a_{12}\, a_{22})\, x_2 \subseteq (b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}) - (a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\, x_1\,,$$

donc

$$0 \in |A_1| - |A|\, x_1 \tag{4}$$

et également

$$0 \in |A_2| - |A|\, x_2 \tag{4'}$$

Donc il existe des éléments $a_1 \in |A_1|$, $a_2 \in |A_2|$ et a', $a'' \in |A|$ tels que $(x_1, x_2) = \left(\frac{a_1}{a'}, \frac{a_2}{a''}\right) \in \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$, où, si $X \subseteq K$; $Y \subseteq K$, $\frac{X}{Y}$ signifie l'ensemble $\left\{\frac{x}{y} : (x, y) \in X \times Y,\ (y \neq 0,\ \text{si}\ 0 \in Y)\right\}$. On a abouti ainsi à une condition nécessaire pour qu'un couple $(x_1, x_2) \in K^2$ soit une solution de (1) et qui peut s'exprimer comme suit :

Si S_b est l'ensemble des solutions de (1), alors

$$S_b \subseteq \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}\,. \tag{5}$$

Remarques 7. a) Il faut remarquer que, en général, tout couple $(x_1, x_2) \in \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$ n'est pas une solution de (1), comme on peut le constater à l'exemple suivant [à coefficients dans $\mathbf{R}_+$ (page 363)]

$$\begin{matrix} 4 \in x_1 + 2x_2 \\ 1 \in 3x_1 + 5x_2 \end{matrix},$$

où $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = [1,11]$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = [18,22]$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = [11,13]$,

et où, p. e., le couple

$$(x_1, x_2) = (18,13) = \left(\frac{18}{1}, \frac{13}{1}\right) \in \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$$

n'est pas une solution, car $4 \notin 18 + 2.13 = [8,44]$.

b) Il est évident qu'une solution $\left(\frac{a_1}{a'}, \frac{a_2}{a''}\right) \in \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$ peut être écrite sous de formes $\left(\frac{a_1^*}{a^*}, \frac{a_2^{**}}{a^{**}}\right)$ telles que $\left(\frac{a_1^*}{a^*}, \frac{a_2^{**}}{a^{**}}\right) \notin \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$ $\left[\text{p. e. au système numérique ci-dessus la solution } (2,1) = \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right) \notin \right.$ $\left. \notin \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}, \text{ tandis que } (2,1) = \left(\frac{20}{10}, \frac{11}{11}\right) \in \frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}\right]$. Pour cela dans la suite on considéra qu'une solution $(x_1, x_2) \in S_b$ soit toujours écrite sous de forme appartenante à $\frac{|A_1|}{|A|} \times \frac{|A_2|}{|A|}$ et, par conséquent, on aura toujours la relation (5) au sens ensembliste.

Relativement à la remarque (6a) on a la propriété :

Pour tout $x_1 \in \frac{|A_1|}{|A|}$ $\left(\textit{respec. } x_2 \in \frac{|A_2|}{|A|}\right)$ *il existe au moins un* $x_2 \in \frac{|A_2|}{|A|}$ $\left(\textit{respec. } x_1 \in \frac{|A_1|}{|A|}\right)$ *tel que le couple* (x_1, x_2) *soit une solution de (1).*

Soit en effet $x_1 = \frac{a_1}{a} \in \frac{|A_1|}{|A|}$ (entendu $a \neq 0$, si $0 \in |A|$). Alors s'il existe un $x_2 \in K$ tel que le couple (x_1, x_2) soit une solution de (1), les ensembles $a_{22}(b_1 - a_{11}x_1)$ et $a_{12}(b_2 - a_{21}x_1)$ auraient une intersection non vide. Donc il faut et il suffit que l'on ait $a_{22}(b_1 - a_{11}x_1) \cap a_{12}(b_2 - a_{21}x_1) \neq \varnothing$, d'où $(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) \cap (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \frac{a_1}{a} \neq \varnothing$, c'est-à-dire

$$|A_1| \cap |A| \frac{a_1}{a} \neq \varnothing,$$

ce qui est valable, puisque $a \in |A|$ et $a_1 \in |A_1|$.

Deux éléments $x_1, x_2 \in K$ dont le couple (x_1, x_2) est une solution de (1) seront appelés *conjoints* [pour le système (1)]. Évidemment pour un élément $x_1 \in K$ (respec. $x_2 \in K$) il n'existe pas toujours un élément *conjoint à lui* [c'est-à-dire tel que le couple (x_1, x_2) soit une solution de (1)] sauf si, et seulement si, peut être mîs, selon les précédents, sous de forme $\frac{a_1}{a'} \in \frac{|A_1|}{|A|}$ $\left(\text{respec. pour } x_2 = \frac{a_2}{a''} \in \frac{|A_2|}{|A|}\right)$. Un tel élément sera dit *acceptable* [pour le système (1)]. Relativement il est évident que pour tout $x_1 \in K$ acceptable

il existe, en général, plus qu'un conjoints correspondants. [En effet tous ses conjoints résultent de (3) et ils se trouvent par la relation

$$a_{12}\, a_{22}\, x_2 \in (a_{22}\, b_1 - a_{11}\, a_{22}\, x_1) \cap (a_{12}\, b_2 - a_{12}\, a_{21}\, x_1)\,,$$

à laquelle l'intersection (évidemment non vide), en général, n'est pas un singleton].

De la formule (5), il résulte que si $|A| = \{a\}$, $a \neq 0$, on a

$$S_b \subseteq \frac{1}{a}\,(|A_1| \times |A_2|) = \frac{1}{|A|}\,(|A_1| \times |A_2|).$$

La propriété est encore valable même lorsque le déterminant $|A|$ n'est pas un singleton, comme ceci se rend évident par le lemme suivant :

L e m m e 1. *Si* $(x_1, x_2) = \left(\frac{a_1'}{a'}, \frac{a_2'}{a''}\right) \in S_b$, *alors il existe au moins un* $a \in |A|$ *tel que*

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{a}\,(a_1, a_2) \tag{6}$$

avec $a_1 \in |A_1|$ *et* $a_2 \in |A_2|$,

D é m o n s t r a t i o n. Évidemment pour toute solution (x_1, x_2) de (1) on a

$$b_1\, b_2 \in a_{11}\, b_2\, x_1 + a_{12}\, b_2\, x_2\,, \quad b_2\, b_1 \in a_{21}\, b_1\, x_1 + a_{22}\, b_1\, x_2$$

d'où

$$0 \in (a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1)\, x_1 - (a_{22}\, b_1 - a_{12}\, b_2)\, x_2\,,$$

c'est-à-dire

$$0 \in |A_2|\, x_1 - |A_1|\, x_2 \tag{7}$$

une seconde c o n d i t i o n n é c e s s a i r e pour que le couple (x_1, x_2) soit une solution de (1). Par conséquent il existe des éléments $a_1'' \in |A_1|$ et $a_2'' \in |A_2|$ tels que

$$a_1''\, x_2 = a_2''\, x_1\,. \tag{8}$$

On remarque dans la suite que, si pour la solution donnée $\left(\frac{a_1'}{a'}, \frac{a_2'}{a''}\right)$, les seuls éléments a_1'', a_2'' vérifiant (7) sont a_1' et a_2' [comme p. e. c'est le cas (mais pas le seul) lorsque $|A_1|$ et $|A_2|$ sont des singletons], alors il résulte que $a' = a'' = a$ et le lemme est vrai. Supposons donc qu'il y en a encore

d'autres. Alors si $a_1'' = \lambda a_1'$ et $a_2'' = \mu a_2'$, où $\lambda, \mu \in K$ et au moins un $\neq 1$, on aura $(x_1, x_2) = \left(\frac{\lambda a_1'}{\lambda a'}, \frac{\mu a_2'}{\mu a''}\right)$, lorsque de (8) il résulte $\lambda a' = \mu a'' = a$ et par conséquent $(x_1, x_2) = \frac{1}{a}(a_1, a_2)$, où $a_1 = a_1''$, $a_2 = a_2''$, donc $a_1 \in |A_1|$ et $a_2 \in |A_2|$.

Pour achever la démonstration il faut montrer encore que $a \in |A|$. Mais comme $\frac{1}{a}(a_1, a_2)$ est une solution de (1), il résulte que (a_1, a_2) est une solution de

$$\begin{aligned} ab_1 &\in a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ ab_2 &\in a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{aligned} \tag{9}$$

dont toutes les solutions se trouvent dans l'ensemble $\left(\frac{a|A_1|}{|A|}, \frac{a|A_2|}{|A|}\right)$. Il s'ensuit donc, pour qu'une solution soit dans $|A_1| \times |A_2|$ il faut et il suffit que $a \in |A|$.

L'expression (6) de la solution (x_1, x_2) de (1) est son *expression distinguée* et il est possible qu'elle n'en soit pas la seule (si p. e. il existe $a_1^* \in |A_1|$, $a_2^* \in |A_2|$ et $a^* \in |A|$ tels que $a_1^* = \rho a_1$, $a_2^* = \rho a_2$, $a^* = \rho a$; $\rho \in K$).

ii$_2$) Soit maintenant $b = o$ — *système homogène.* Alors $|A_1| = |A_2| = \{0\}$ et le système (1) accepte évidemment, comme à la théorie classique, ou bien seulement la solution nulle $(x = o)$, si $0 \notin |A|$, ou bien de solutions en nombre infini, si $0 \in |A|$.

Tous les précédents nous amenent à la proposition suivante :

P r o p o s i t i o n 15. *Soit le K-système hyperlinéaire (1) et A son hypermatrice. Alors*

i) *Si A est fortement singulière, le système (1) ou bien n'accepte pas de solutions, si* $0 \notin |A_1| \cap |A_2|$, *ou bien accepte une infinité de solutions, si* $0 \in |A_1| \cap |A_2|$.

ii) *Si A n'est pas fortement singulière, alors*

ii$_1$) *si* $b \neq o$ *et* S_b *est l'ensemble de solutions de (1), on a*

$$S_b \subseteq \frac{1}{|A|}(|A_1| \times |A_2|) \tag{10}$$

ii$_2$) *si* $b = o$, *le système (1) accepte ou bien la solution nulle seule, si* $0 \notin |A|$, *ou bien une infinité de solutions, si* $0 \in |A|$.

Remarques 8. a) Il faut signaler la grande différence du cas (ii$_1$) entre les K-systèmes (1) ayant l'hypercorps K propre ou non propre. Ainsi

1′) Si K est non propre, donc K corps-cas classique- la relation (10) exprime la solution unique du système (1).

2′) Si K est propre, (10) donne, en général, plus qu'une solution [sauf de cas spéciaux d'hypercorps K et de cas spéciaux de quelque de leurs K-systèmes [4]. Une infinité, si K est, p. e., l'hypercorps $\mathbf{R}_+$ cité auparavant (page 363). Voir la proposition 16 qui suit].

b) L'exemple de la remarque 7a) montre que l'on n'a ni maintenant, en général, l'égalité $S_b = \frac{1}{|A|}(|A_1| \times |A_2|)$.

Relativement au cas ii$_2$) de la proposition précédente on a encore la proposition :

Proposition 16. *Pour tout* $a \in |A|$, $a \neq 0$, *si* $0 \in |A|$, *il existe au moins une solution* (x_1, x_2) *de (1) telle que* $(x_1, x_2) \in \frac{1}{a}(|A_1| \times |A_2|)$, qui peut être considéré pour les K-systèmes hyperlinéaires comme la proposition correspondante à la règle de Cramer de la théorie classique.

Démonstration : En effet, pour tout $a \in |A|$ ($a \neq 0$, si $0 \in |A|$) le système (9) posséde évidemment de solutions $(y_1, y_2) \in |A_1| \times |A_2|$, donc le système (1) des solutions $(x_1, x_2) \in \frac{1}{a}(|A_1| \times |A_2|)$.

---

(4) Un tel hypercorps est p.e. l'ensemble $\mathbf{R}_+$ muni de la multiplication habituelle comme opération et de l'addition suivante comme hyperopération [**10**], [**11**] :

$$x + y = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{si } x \neq y \\ [0, x] & , \text{ si } x = y \end{cases}$$

Alors les K-systèmes

$$\begin{matrix} 2 \in x + y \\ 6 \in x + 2y \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} 3 \in x + y \\ 6 \in x + 2y \end{matrix}$$

possédent une seule solution le premier [la solution (3,3)] et une infinité de solutions le second $\left(\text{où } S_b = \frac{1}{2}([0,6] \times 6) = [0,3] \times 3\right)$.

3. Après la résolution des systèmes des K-équations hyperlinéaires d'ordre 2 nous pouvons avancer à la résolution du problème de l'inversibilité des K-hypermatrices carrées du même ordre, et comme on va voir toute hypermatrice non fortement singulière possède au moins une (hypermatrice) inverse (de chaque coté et bilatérale).

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, de l'équation hypermatricielle

$$I \in AX \tag{11}$$

nous nous amenons aux K-systèmes hyperlinéaires

$$\begin{matrix} 1 \in a_{11}\, x_{11} + a_{12}\, x_{21} \\ 0 \in a_{21}\, x_{11} + a_{22}\, x_{21} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \in a_{11}\, x_{12} + a_{12}\, x_{22} \\ 1 \in a_{21}\, x_{12} + a_{22}\, x_{22} \end{matrix}$$

dont les solutions, selon les précédents, sont

$$\begin{matrix} (x_{11}, x_{21}) = \dfrac{1}{a'}\,(a_{22}, -a_{21}),\ a' \in |A| \\ (x_{12}, x_{22}) = \dfrac{1}{a''}\,(-a_{12}, a_{11}),\ a'' \in |A| \end{matrix} \qquad (a', a'' \neq 0, \text{ si } 0 \in |A|).$$

Donc on a, comme une solution de (11),

$$X_A^d = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a'} & \dfrac{-a_{12}}{a''} \\ \dfrac{-a_{21}}{a'} & \dfrac{a_{11}}{a''} \end{bmatrix} \tag{12}$$

et il est facile de vérifier que toute hypermatrice de cette forme est, en effet, une solution de (11). C'est donc une *inverse à droite* de A et par conséquent l'ensemble $\mathscr{D}_A$ de telles inverses est

$$\mathscr{D}_A = \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a'} & \dfrac{-a_{12}}{a''} \\ \dfrac{-a_{21}}{a'} & \dfrac{a_{11}}{a''} \end{bmatrix} : a', a'' \in |A|\ (a', a'' \neq 0, \text{ si } 0 \in |A|) \right\}$$

De même de l'équation hypermatricielle

$$I \in XA \tag{13}$$

nous prenons, comme précédemment, les systèmes

$$\begin{matrix} 1 \in a_{11}\, x_{11} + a_{21}\, x_{12} \\ 0 \in a_{12}\, x_{11} + a_{22} x_{12} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} 0 \in a_{11}\, x_{21} + a_{21}\, x_{22} \\ 1 \in a_{12}\, x_{21} + a_{22}\, x_{22} \end{matrix}$$

dont les solutions sont

$$\begin{matrix} (x_{11}, x_{12}) = \dfrac{1}{a'}\,(a_{22}, -a_{12}),\ a' \in |A| \\ (x_{21}, x_{22}) = \dfrac{1}{a''}\,(-a_{21}, a_{11}),\ a'' \in |A| \end{matrix} \qquad (a', a'' \neq 0,\ \text{si}\ 0 \in |A|)$$

Ainsi une solution de (13) est

$$X_A^g = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a'} & \dfrac{-a_{12}}{a'} \\ \dfrac{-a_{21}}{a''} & \dfrac{a_{11}}{a''} \end{bmatrix} \tag{14}$$

et il est facile de vérifier que seulement des hypermatrices de cette forme sont des solutions de (13). Toute telle hypermatrice est, donc, une *inverse à gauche* de A, dont, par conséquent, l'ensemble $\mathscr{G}_A$ est

$$\mathscr{G}_A = \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{a'} & \dfrac{-a_{12}}{a'} \\ \dfrac{-a_{21}}{a''} & \dfrac{a_{11}}{a''} \end{bmatrix} : a', a'' \in |A|,\ (a', a'' \neq 0,\ \text{si}\ 0 \in |A|) \right\}.$$

Il en résulte donc que, si dans les formules de $\mathscr{D}_A$ et de $\mathscr{G}_A$ on a $a' = a'' = a$, les inverses correspondantes unilatérales de A deviennent des *inverses bilatérales* (ou, simplement, *inverses*) ou *symétriques* d'elle, dont, par conséquent le type est

$$X_A^b = X_A = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{15}$$

et leur ensemble $\mathscr{B}_A$ ou, de préférence, S (A), est appelé *le symétrique* de A. Donc on a

$$S(A) = \left\{ \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} : a \in |A],\ (a \neq 0,\ \text{si}\ 0 \in |A|) \right\}. \tag{16}$$

Nous concluons donc la proposition

P r o p o s i t i o n 17. *Toute hypermatrice A d'ordre 2 non fortement singulière possède des inverses unilatérales et bilatérales, dont les ensembles sont* $\mathscr{D}_A$, $\mathscr{G}_A$ *et* $S(A)$.

Il en résulte encore la

P r o p o s i t i o n 18. *Si* $|A|$ *est un singleton* $(\neq \{0\})$, *l'hypermatrice A possède une seule hyrermatrice symétrique, et ceci a lieu seulement dans ce cas.*

R e m a r q u e 9. À la théorie classique, comme on le sait, si A et B sont deux matrices régulières, alors $A \neq B$ équivaut à $A^{-1} \neq B^{-1}$. Cette propriété n'a pas lieu, en général, dans le cas présent, où l'on peut avoir $A \neq B$ et $A' = B'$, avec $A' \in S(A)$, $B' \in S(B)$, c'est-à-dire les relations $A \neq B$ et $S(A) \cap S(B) \neq \varnothing$ — et à fortiori $\mathscr{D}_A \cap \mathscr{D}_B \neq \varnothing$ et $\mathscr{G}_A \cap \mathscr{G}_B \neq \varnothing$ — — peut être compatibles, comme on peut le resumer de la démonstration précédente.

Relativement à la remarque ci-dessus on a la proposition :

P r o p o s i t i o n 19. *Soient* $A, B \in \mathscr{M}_2$ *non fortement singulières. Alors on a* $S(A) \cap S(B) \neq \varnothing$ *si, et seulement si,* $B = \lambda A$, *où* $\lambda = \frac{a}{a'}$ *avec* $a, a' \in |A|$ $(a' \neq 0,$ *si* $0 \in |A|)$.

D é m o n s t r a t i o n : Si $S(A) \cap S(B) \neq \varnothing$, il y aura, vu de (16), $a \in |A|$, $b \in |B|$ tels que $A' = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} = B'$, d'où il résulte $b_{ij} = \frac{b}{a} a_{ij} = \lambda a_{ij}$, donc $B = \lambda A$. Alors on aura $|B| = |\lambda A| = \lambda^2 |A|$ et $S(B) = S(\lambda A) = \left\{ \frac{\lambda}{\lambda^2 a'} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} : a' \in |A| \right\}$ et puisque $A' = B'$ il y aura un $a' \in |A|$ tel que $\frac{1}{\lambda a'} = \frac{1}{a}$ d'où il vient $\lambda = \frac{a}{a'}$. Le reciproque d'après le dernier raisonnement découle facilement.

4. Après le fait que toute hypermatrice carrée d'ordre 2 non fortement singulière est inversible il faut examiner la stabilité de leur ensemble par rapport à la multiplication. Pour cela, considérons une telle hypermatrice

A et demandons tout d'abord s'il existe une hypermatrice X de même non fortement singulière et telle que l'ensemble AX contient une hypermatrice B fortement singulière. On distingue deux cas : $0 \in |A|$ et $0 \notin |A|$.

Soit $0 \in |A|$ et considérons comme hypermatrice B l'hypermatrice nulle. On aura donc $O \in AX$ et le problème se réduit à la résolution de systèmes homogènes que, selon la proposition 15 ii_2) possèdent de solutions différentes de la solution nulle. Il existe donc des hypermatrices X non fortement singulières telles que $O \in AX$ et ce fait montre que *l'ensemble des hypermatrices carrées d'ordre 2 qui ne sont pas fortement singulières, n'est pas stable pour la multiplication.*

Soit ensuite $0 \notin |A|$. Nous nous limitons ainsi à l'ensemble $\mathscr{R}_2$ des K-hypermatrices régulières d'ordre 2. Nous remarquons tout d' abord que, évidemment et plus généralement que au cas § 2i, *pour qu'une hypermatrice A d'ordre 2 soit singulière il faut et il suf)it que ses lignes (donc, aussi, ses colonnes ou inversement) soient des hypervecteurs de K^2 linéairement dépendants.* Il s'ensuit que *pour que* A *soit régulière il faut et il suffit que ses lignes (donc de même ses colonnes) soient des hypervecteurs linéairement indépendants.* Donc, vu de la proposition 15 ii_2, *il faut et il suffit qne le système homogène* $0 \in AX$ *ait uniquement la solution nulle.*

Après les remarques ci-dessus considérons deux hypermatrices $A, B \in \mathscr{R}_2$ et soit $C \in AB$ et supposons que $0 \in |C|$. Alors l'hypermatrice C, étant singulière, aura ses colonnes linéairement dépendantes et le système homogène $o \in Cx$ aura une certaine solution $x \neq o$. Ensuite on aura $o \in (AB)x = A(Bx)$, donc il y aura un $y \in Bx$ tel que $o \in Ay$, d'où il résulte que $y = o$, car A est régulière. Donc $o \in Bx$ et $x \neq o$. Il s'ensuit que B est singulière, ce qui est faux. Donc $o \notin |C|$ et $AB \subseteq \mathscr{R}_2$. Mais rien n'exclut l'existence dans le produit AB d'une hypermatrice singulière D mais non fortement singulière, comme on le voit si nous considerons p.e. les hypermatrices regulières $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ à éléments dans l'hypercorps déjà considéré $\mathbf{R}_+$ (voir p. 363), dont le produit est

$$AB = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a \in 1.1 + 1.2 = [1,3], & c \in 1.1 + 2.2 = [3,5] \\ b \in 1.2 + 1.1 = [1,3] & d \in 1.2 + 2.1 = [o,4] \end{matrix} \right\}$$

et il contient des hypermatrices singulières, comme p.e. l'hypermatrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Si donc $\mathscr{T}_2$ l'ensemble des hypermatrices singulières mais non

fortement telles d'ordre 2, nous concluons pour l'ensemble $\mathscr{R} \cup \mathscr{T}_2 = \mathscr{C}_2$ la proposition suivante :

Proposition 20. *L'ensemble $\mathscr{C}_2$ de K-hypermatrices non fortement singulières d'ordre 2 est stable par rapport à la multiplication $A*B = AB \cap \mathscr{C}_2$.*

5. La multiplication A*B dans $\mathscr{C}_2$ est associative. En effet [5] quellesque soient $A, B, C \in \mathscr{C}_2$ on a

$$A*(B*C) = \bigcup_{D \in B*C} A*D = \bigcup_{D \in B*C} (AD \cap \mathscr{C}_2) = (\bigcup_{D \in B*C} AD) \cap \mathscr{C}_2 = A(B*C) \cap \mathscr{C}_2 =$$
$$= A(BC \cap \mathscr{C}_2) \cap \mathscr{C}_2,$$

qui après une simple investigation se trouve qu'il est égal à $A(BC) \cap \mathscr{C}_2$. C'est-à-dire on a $A*(B*C) = ABC \cap \mathscr{C}_2$ et, de même, $(A*B)*C = ABC \cap \mathscr{C}_2$. D'autre part de la stabilité de l'ensemble $\mathscr{C}_2$ par rapport à la multiplication A*B, de l'associativité de cette multiplication, de l'existence de l'élément unité I et de l'inversibilité dans $\mathscr{C}_2$ il résulte que quelque soit $A \in \mathscr{C}_2$, on a

$$A * \mathscr{C}_2 = \mathscr{C} * A = \mathscr{C}_2$$

Car, en effet, de la stabilité on a $\mathscr{C} * A \subseteq \mathscr{C}_2$. D'autre part pour tout $B \in \mathscr{C}_2$ et pour tout $A' \in S(A)$ on a $B \in (A*A')*B = A*(A'*B) \subseteq A*\mathscr{C}_2$, donc $\mathscr{C} \subseteq A * \mathscr{C}_2$. Il s'ensuit donc la

Proposition 21. *L'ensemble $\mathscr{C}_2$ est par rapport à la multiplication A*B un hypergroupe complétement régulier au sens de Fr. Marty* [**5**]. (mais plus large que ceux qui ont été considéré de lui, pour la cause de l'existence des plusieurs symétriques).

Il existe donc, quels que soient $A, B \in \mathscr{C}_2$, les quotients (à droite et à gauche) $\begin{smallmatrix} B \\ A| \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} B \\ |A \end{smallmatrix}$ [**5**] que, comme il est visible, nous pouvons les préciser par la résolution des équations hypermatricielles $B \in AX$ et $B \in YA$ respectivement (en suprimant évidemment les hypermatrices fortement singulières qui peut être y exister). Relativement nous remarquons que :

---

(5) Comme il est connu, l'hyperopération ab d'un hypergroupoide H s'étend à l'ensemble $\mathscr{P}(H)$ de ses sous-ensembles comme suit: $AB = \bigcup_{(a,b)\ A \times B} ab (\subseteq H)$, pour tout $A, B \subseteq H$; $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$.

i) Toutes les hypermatrices X vérifiants $B \in AX$ résultent de la résolution des deux systèmes

$$\begin{matrix} b_{11} \in a_{11}\, x_{11} + a_{12}\, x_{21} \\ b_{21} \in a_{21}\, x_{11} + a_{22}\, x_{21} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} b_{12} \in a_{11}\, x_{12} + a_{12}\, x_{22} \\ b_{22} \in a_{21}\, x_{12} + a_{22}\, x_{22} \end{matrix}$$

ou, sous de forme hypermatricielle,,

$$b_1 \in A x_1 \quad \text{et} \quad b_2 \in A x_2 .$$

Donc, d'après la proposition $15ii_2$, on a

$$x_1 \in \frac{1}{|A|} (|A_1| \times |A_2|) \quad \text{et} \quad x_2 \in \frac{1}{|A|} (|A_1'| \times |A_2'|)$$

et, par conséquent, les hypermatrices demandées sont de la forme

$$X = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{a} & \frac{a_1'}{a'} \\ \frac{a_2}{a} & \frac{a_2'}{a'} \end{bmatrix} \tag{17}$$

avec $a, a' \in |A|$, $(a_1, a_2) \in |A_1| \times |A_2|$, $(a_1', a_2') \in |A_1'| \times |A_2'|$, où les couples sont respectivement conjoints (page 13). D'autre part, une quelconque $A' \in S(A)$ est donnée par (15) et on trouve, après de calculs, que

$$S(A)\, B = \left\{ \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a_1 & a_1' \\ a_2 & a_2' \end{pmatrix} : a \in |A|, (a_1, a_2) \in |A_1| \times |A_2|, (a_1', a_2') \in |A_1'| \times |A_2'| \right\} \tag{18}$$

En comparant (17) et (18) on conclût que :

a) Il existe des hypermatrices $Q_1 \in \mathscr{C}_2$ vérifiants $B \in AX$ pour lesquelles il existe $A' \in S(A)$ telles que $Q_1 \in A'^* B$. Toutes ces hypermatrices sont de la forme (17) avec $a = a'$.

b) 'A toute hypermatrice $A' \in S(A)$, correspondent des hypermatrices $Q_1 \in A'^t B$ de la forme (17), c'est-à-dire avec $a = a'$ et avec de couples (a_1, a_2), (a_1', a_2') convenables, qui sont des solutions de $B \in AX$. Il en résulte donc que

$$(\forall A' \in S(A))\ (\exists Q_1 \in A'^* B) \left[Q_1 \in \frac{B}{A]} \right],$$

d'où il vient que, évidemment,

$$Q_1 \in \frac{B}{A|} \not\Rightarrow (\exists A' \in S(A))\,[Q_1 \in A'^*B],$$

tandis que, par contre, il résulte que

$$(\forall (A,Q_1) \in \mathscr{R}_2^2)\,(\forall A' \in S(A))\,(\exists B \in A^*Q_1)\,[Q_1 \in A'^*B]$$

ii) De même pour l'équation hypermatricielle $B \in YA$ nous considérons les systèmes

$$\begin{matrix} b_{11} \in a_{11}y_{11} + a_{21}y_{12} \\ b_{12} \in a_{12}y_{11} + a_{22}y_{12} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} b_{21} \in a_{11}y_{21} + a_{21}y_{22} \\ b_{22} \in a_{12}y_{21} + a_{22}y_{22} \end{matrix}$$

et en les résolvant nous trouvons que les hypermatrices Y demandées sont de la forme

$$Y = \begin{bmatrix} \dfrac{a_1^*}{a^*} & \dfrac{a_2^*}{a^*} \\[2ex] \dfrac{a_1'^*}{a'^*} & \dfrac{a_2'^*}{a'^*} \end{bmatrix} \tag{19}$$

pour tout $a^*, a'^* \in |A|$, $(a_1^*, a_2^*) \in |A_1^*| \times |A_2^*|$, $(a_1'^*, a_2'^*) \in |A_1'^*| \times |A_2'^*|$, où, de même, les couples respectives sont conjoints. D'autre part, on trouve comme précédemment après de calculs, que

$$BS(A) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ a \end{matrix} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* \\ a_1'^* & a_2'^* \end{pmatrix} : a \in |A|,\ (a_1^*, a_2^*) \in |A_1^*| \times |A_2^*|, \right. \\ \left. (a_1'^*, a_2'^*) \in |A_1'^*| \times |A_2'^*| \right\} \tag{20}$$

et par comparaison avec (19) on a de conclusions analogues des précédentes. C'est-à-dire, finalement, $(\forall A' \in S(A))\,(\exists Q_2 \in B^*A')\left[Q_2 \in \begin{matrix} B \\ |A \end{matrix}\right]$ etc.

Nous concluons donc la proposition très considerable suivante :

P r o p o s i t i o n 22. *L'hypergroupe complètement régulier $(\mathscr{C}_2,^*)$ vérifie en plus la propriété :*

$$(\forall (A,B) \in \mathscr{C}_2^2)\,(\forall (A',A'') \in S^2(A))\,(\exists (Q_1,Q_2) \in A'^*BxB^*A'')[B \in A^*Q_1 \cap Q_2^*A]$$

Il en résulte que, en général, quels que soient A,B,C dans $\mathscr{C}_2$

$$C \in A^*B \not\Rightarrow (\exists (A', B') \in S(A) \times S(B))\ [B \in A'^*C \vee A \in C^*B']$$

tandis que, par contre, pour tout $A,B \in \mathscr{C}_2$,

$$(\forall (A', B') \in S(A) \times S(B))\ (\exists (C_1, C_2) \in A^*B \times A^*B)\ [B \in A'^*C_1 \wedge A \in C_2^*B']$$

Si on écrit de manière analytique les propriétés exprimées par la proposition précédente on a la proposition équivalente :

P r o p o s i t i o n 22'. *Soient $A,B,C \in \mathscr{C}_2$. Alors*

1. $A^*B \subseteq \mathscr{C}_2$
2. $(A^*B)^*C = A^*(B^*C)$
3. $I^*A = A^*I = A$ *(I l'hypermatrice-unité de $\mathscr{C}_2$)*
4. $(\forall A \in \mathscr{C}_2)\ (\exists A' \in \mathscr{C}_2)\ [I \in A^*A' \cap A'^*A]$
   et soit $S(A)$ le symétrique de A
5. $(\forall (A', A'') \in S^2(A))\ (\exists (Q_1, Q_2) \in A'^*B \mathrm{x} B^*A'')\ [B \in A^*Q_1 \cap Q_2^*A]$

6. De la proposition précédente résulte que l'ensemble $\mathscr{C}_2$ est un hypergroupe d'un type special qui introduit la notion de *l'hypergroupe polysymétrique* dont la définition est comme suit :

D é f i n i t i o n 4. Un ensemble H organisé par une hyperopération s'appelle *hypergroupe polysymétrique*, si son hyperopération notée multiplicativement satisfait aux axiomes suivants :

P_1 : $(xy)\ z = x\ (yz)$ pour tout $x,y,\ z \in H$.

P_2 : Il existe un $e \in H$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $ex = xe = x$ (l'élément e évidemment unique, est appelé *l'unité* de H).

P_3 : Pour tout $x \in H$ il existe un $x' \in H$ au moins tel que $e \in xx' \cap x'x$. Tout tel élément sera appelé *symétrique* ou *inverse* de x et l'ensemble de tels x' sera dit *le symétrique* de x et il sera noté S (x). Il en résulte que pour tout x,y,z on a l'implication

$$z \in xy \Rightarrow (\forall z' \in S(z))\ (\exists (x', y') \in S(x) \times S(y))\ [x' \in yz' \wedge y' \in z'x]$$

P_4: Pour tout $x, z \in H$, et pour tout $(x', x'') \in S^2(x)$, il existe $y_1 \in x'z$ et $y_2 \in zx''$ tels que $z \in xy_1 \cap y_2x$,
d'où il vient que, en général, quels que soient $x, y, z \in H$,

$$z \in xy \not\Rightarrow (\exists (x', y') \in S(x) \times S(y))\ [y \in x'z \vee x \in zy']$$

et que, par contre pour tout $x, y \in H$

$$(\forall (x', y') \in S(x) \times S(y))\ (\exists (z_1, z_2) \in xy \times xy)\ [y \in x'z_1 \wedge x \in z_2y']$$

Remarques 10. a) H est non vide (puisque $e \in H$).

b) Comme auparavant pour $\mathscr{C}_2$, on montre que pour tout $x \in H$, on a $xH = Hx = H$, qui avec P_1 justifie la caractérisation de la structure $(H, .)$ comme hypergroupe. Il en résulte donc que $xy \neq \varnothing$ quels que soient $x, y \in H$.

c) Tout groupe, ainsi que tout polygroupe [**2**], est un hypergroupe polysymétrique. De même tout hypergroupe canonique est aussi un hypergroupe polysymétrique, même commutatif. Ces hypergroupes polysymétriques sont *non propre*. Un hypergroupe polysymétrique H est appelé *propre* s'il existe un $x \in H$ au moins possèdant plus qu' un inverse.

d) Tout hypergroupe polysymétrique est un hypergroupe complètement régulier.

Après la définition ci-dessus nous pouvons formuler la proposition 22′ comme suit :

Proposition 23. *L'ensemble $\mathscr{C}_2$ des hypermatrices non fortement singulières d'ordre 2 est par rapport à la multiplication $A*B$ $(A, B \in \mathscr{C}_2)$ un hypergroupe polysymétrique propre.*

7. Si un hypergroupe polysymétrique H est commutatif, son hyperopération sera notée, comme d'habitude, additivement, son élément neutre sera noté 0 et il sera appelé *zéro* de H et les inverses des éléments de H seront leurs *opposés*. Donc les axiomes de sa définition évidemment sont :

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $(\exists 0 \in H)\ (\forall x \in H)\ [0 + x = x]$
4. $(\forall x \in H)\ (\exists x' \in H)\ [0 \in x + x']$

Pour le symétrique de x on a $S(x) = \{x' \in H : 0 \in x + x'\}$

5. $(\forall (x,z) \in H^2)\ (\forall x' \in S(x)\ (\exists y \in x' + z)\ [z \in x + y]$
qui, en général, entraîne que, quels que soient x,y,z dans H

$$z \in x + y \not\Rightarrow (\exists x' \in S(x))\ [y \in z + x']$$

tandis que, contrairement, pour tout $x, y \in H$

$$(\forall x' \in S(x))\ (\exists z \in x + y)\ [y \in z + x']$$

E x e m p l e s : 1°. Un simple exemple d'hypergroupe polysymétrique commutatif propre résulte à partir d'un ensemble quelconque, non vide, H, si on sépare un n'importe quel élément $a \in H$ en l'appelant *zéro* et en le représentant 0, et en suite, si on considére une partition de H,

$$H = H_1 \cup \{a\} \cup H_2 = H_- \cup \{0\} \cup H_+ \ (H_1 = H_-,\ H_2 = H_+).$$

Alors l'hyperopération $x + y$ définie sur H comme suit $x + y = H_+$, si $x, y \in H_+$; H_-, si $x, y \in H_-$; H, si $x \in H_+$ et $y \in H_-$, ou si $x \in H_-$ et $y \in H_+$; x, si $y = 0$,y, si $x = 0$ fait H un hypergroupe polysymétrique commutatif. La vérification des axiomes se réalise sans difficultés et évidemment on a $S(x) = H$, si $x \in H_+$, et H_+, si $x \in H_-$; $S(0) = (0)$.

On voit ainsi que les ensembles numériques, totalement ordonnés, Z,Q,R (ou, encore, d'autres anneaux ou corps totalement ordonnés) donnent des hypergroupes polysymétriques commutatifs propres avec comme addition $x + y$ l'hyperopération définie comme ci-dessus à partir de leur partition symétrique. On voit même que la multiplication habituelle sur eux est distributive par rapport à l'addition $x + y$, ce qui, par conséquent, amène à l'introduction évidente de la notion de *l'hyperanneau polysymétrique.*

2°. D'autres exemples d'hypergroupes polysymétriques commutatifs et, en suite, d'hyperanneaux polysymétriques offrent aussi les divers anneaux et corps numériques H, si on définit sur H l'hyperopération $x + y$ comme suit

$$x + y = H, \text{ si } 0 \neq x \neq y \neq 0, \text{ et } x + y = x, \text{ si } x = y, \text{ ou si } y = 0.$$

La vérification des axiomes de l'hypergroupe polysymétrique commutatif découle facilement et on a $S(x) = H \,..\, \{0, x\}$, si $x \neq 0$ et $S(0) = 0$.

R e m a r q u e 11. Une autre espèce d'hypergroupe polysymétrique commutatif a étè introduite (par J. Mittas) dans le travail *«Hypergroupes et hyperanneaux polysymétriques»* [**8**]. Pour distinguer ces deux espèces

d'hypergroupes polysymétriques, on va appeler, s'il y a le cas, *hypergroupe polysymétrique de première espèce*, l'hypergroupe polysymétrique au sens de [**8**] et *hypergroupe polysymétrique de seconde espèce*, l'hypergroupe polysymétrique commutatif au sens du présent travail.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στὴν παροῦσα ἐργασία καὶ μὲ ἀφετηρία τὶς ἤδη γνωστὲς ὑπερσυνθετικὲς δομὲς τῆς ὑπερομάδας [**5**], [**6**], [**10**], τοῦ ὑπερδακτυλίου καὶ ὑπερσώματος [**3**], [**7**], [**11**] καὶ τοῦ ὑπερδιανυσματικοῦ χώρου [**1**], [**12**], [**13**] καὶ μὲ τὴν προοπτικὴ παραπέρα ἐφαρμογῶν ὁρίζονται καὶ μελετῶνται ὡς ἕνα βαθμὸ ἡ ὑπερσυνθετικὴ δομὴ ἡ ἀντίστοιχη πρὸς τὴν κλασσικὴ γραμμικὴ ἄλγεβρα καθὼς ἐπίσης καὶ ἀπεικονίσεις μεταξὺ ὑπερδιανυσματικῶν χώρων ἀντίστοιχες πρὸς τὶς γραμμικὲς μεταξὺ διανυσματικῶν χώρων τῆς κλασσικῆς θεωρίας. Εἰσάγεται ἐπίσης καὶ ἡ ἔννοια τῆς πολυσυμμετρικῆς ὑπερομάδας, δηλαδὴ μιᾶς ὑπερομάδας εἰδικῆς μορφῆς, ἡ ὁποία εἶναι πλήρως ὁμαλὴ κατὰ τὴν ἔννοια τοῦ Fr. Marty [**5**], ἀλλὰ πιὸ γενικὴ ἀπὸ τὶς θεωρηθεῖσες ἀπ' αὐτόν, λόγω τῆς ὑπάρξεως ἐν γένει περισσότερων ἀπὸ ἕνα συμμετρικῶν τῶν στοιχείων της.

Στὴν πραγματοποιηθεῖσα ὅπως πιὸ πάνω γενίκευση ὁδήγησε ἡ θεώρηση ἀρχικὰ μὲν τοῦ συνόλου K[x] τῶν ὑπερπολυωνύμων τῆς μεταβλητῆς x μὲ συντελεστὲς ἀπὸ ἕνα ἀντιμεταθετικὸ ὑπερσῶμα K (τὸ ὁποῖο σύνολο ἀποτελεῖ, ὅπως εἶναι γνωστὸ [**12**], [**13**] ἕναν ὑπερδιανυσματικὸ χῶρο καὶ ταυτόχρονα ἕναν σουπερδακτύλιο), καὶ στὴ συνέχεια τῶν K-ὑπερμητρῶν (σύμφωνα μὲ τὴν καθιερωθεῖσα γιὰ τὶς ὑπερσυνθετικὲς δομὲς ὁρολογία), δηλαδὴ μητρῶν μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ K, τὸ σύνολο $\mathscr{M}_{m,n}$ τῶν ὁποίων τοῦ τύπου $m \times n$ ἀποτελεῖ, ὅπως ἀποδεικνύεται, ἕναν ἐξαιρετικὸ ὑπερδιανυσματικὸ χῶρο [**1**], [**13**]. Ἡ θεώρηση εἰδικότερα τοῦ συνόλου $\mathscr{M}_n$ τῶν τετραγωνικῶν ὑπερμητρῶν n τάξεως ὁδηγεῖ στοὺς ὁρισμοὺς τῶν ὑπερσυνθετικῶν δομῶν τοῦ ὑπερ-ὑπερδακτυλίου καὶ τῆς K-γραμμικῆς ὑπεράλγεβρας, ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι τὸ σύνολο $\mathscr{M}_n$ εἶναι ὑπερ-ὑπερδακτύλιος καὶ ταυτόχρονα μιὰ μοναδιαία γραμμικὴ ὑπεράλγεβρα καὶ μάλιστα ἐξαιρετικὴ (ἐπειδὴ ὁ ἀντίστοιχος ὑπερδιανυσματικὸς χῶρος εἶναι ἐξαιρετικός). Ὁρίσθηκαν ἐπίσης οἱ ὑπεργραμμικὲς ἀπεικονίσεις μεταξὺ ὑπερδιανυσματικῶν χώρων H καὶ H′, τὸ σύνολο $\mathscr{L}(H, H')$ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ ἐπίσης ὑπερδιανυσματικὸ χῶρο καὶ γιὰ $H \equiv H'$ μοναδιαία γραμμικὴ ὑπεράλγεβρα. Προκειμένου μάλιστα γιὰ μιὰ εἰδικὴ κατηγορία ὑπεργραμμικῶν

ἀπεικονίσεων μεταξὺ ἐξαιρετικῶν ὑπερδιανυσματικῶν χώρων πεπερασμένης διαστάσεως, οἱ ὁποῖες ἐπαληθεύουν δύο ἐπὶ πλέον συνθῆκες καὶ οἱ ὁποῖες ἀπεικονίσεις λέγονται ἐ ξ α ι ρ ε τ ι κ έ ς, τὸ σύνολό τους $\mathscr{L}_e(H, H') \subset \mathscr{L}(H, H')$ ἀποτελεῖ ἐξαιρετικὸ ὑπερδιανυσματικὸ χῶρο —χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι καὶ ὑπο-ὑπερδιανυσματικὸς ὑπόχωρος τοῦ $\mathscr{L}(H, H')$— καὶ γιὰ $H \equiv H'$ μοναδιαία ἐξαιρετικὴ γραμμικὴ ὑπεράλγεβρα. Ἡ ἰδιότητα τέλος τῶν ὁμαλῶν μητρῶν κάθε τάξεως νὰ ἀποτελοῦν πολλαπλασιαστικὴ ὁμάδα, ὁδήγησε στὴν μελέτη ἀντίστοιχου θέματος γιὰ μιὰ εἰδικὴ κατηγορία ὑπερμητρῶν, τὶς μὴ ἰσχυρῶς ἀνώμαλες ὑπερμῆτρες, δηλαδὴ γιὰ τὸ σύνολο τῶν τετραγωνικῶν μητρῶν μιᾶς τάξεως μὲ ἐξαίρεση τὶς ὑπερμῆτρες μὲ ὁρίζουσα ἴση μὲ τὸ μονοστοιχειακὸ σύνολο $\{0\}$. Ἡ λεπτομερὴς ὅμως διερεύνηση τοῦ προβλήματος τῆς ἀντιστρεψιμότητας μιᾶς τέτοιας τετραγωνικῆς μήτρας n τάξεως καθὼς καὶ ἐκεῖνο τῆς κλειστότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ συνόλου $\mathscr{C}_n$ τῶν ὑπερμητρῶν τῆς κατηγορίας αὐτῆς ἔδειξε ὅτι ἡ ἐπίλυσή τους ἀπαιτεῖ τὴν πλήρη ἀνάπτυξη ἑνὸς μεγάλου μέρους τοῦ λογισμοῦ ὑπερμητρῶν, ἀναλόγου πρὸς τὸν ἀντίστοιχο λογισμὸ μητρῶν, ὁ ὁποῖος ὅμως εἶναι ἀρκετὰ περίπλοκος, λόγω ἀκριβῶς τοῦ περίπλοκου καὶ ἰδιόρρυθμου χαρακτήρα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ὑπερπράξεως καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ὁρίζουσα $|A|$ μιᾶς ὑπερμήτρας A δὲν εἶναι ἐν γένει μονοστοιχειακὸ σύνολο καὶ θὰ ἀποτελέσει ἀντικείμενο ἄλλης ἐργασίας. Τὰ προβλήματα ὅμως αὐτὰ ἐπιλύθηκαν πλήρως γιὰ τὴν περίπτωση $n = 2$ καὶ ἀποδείχθηκε ὅτι κάθε μὴ ἰσχυρῶς ἀνώμαλη ὑπερμῆτρα ἔχει ἐν γένει ἄπειρες ἀντίστροφες μονόπλευρες καὶ ἀμφίπλευρες σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὲ ς καὶ στὴ συνέχεια ὅτι τὸ σύνολό τους $\mathscr{C}_2$ ἀποτελεῖ ὑπερομάδα εἰδικῆς μορφῆς, τὴν ὁποία ὀνομάσαμε π ο λ υ-σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὴ καὶ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς πολυομάδας [**2**] καί, στὴν ἀντιμεταθετικὴ περίπτωση, τῆς κανονικῆς ὑπερομάδας [**6**], [**10**].

REFÉRÉNCES

1. S. I o u l i d i s, Hyperespaces Vectoriels Exceptionnels. Mathematica Balkanica, Beograd, 1982. (T. 12 ὑπὸ δημοσίευση).
2. ——, Polygroupes et certaines de leurs propriétés. Ὑπὸ δημοσίευση στὸ Δελτίο τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας.
3. M. K r a s n e r, Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0. Actes du colloque d'Algèbre supérieure C. B.R.M., Bruxelles, 1956.
4. ——, Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement de groupes. Mathematica Balkanica, t. 3, p. 229 - 280, Beograd 1973.

5. Fr. Marty, Sur une généralisation de la notion de groupe. Actes du 8me Congrés des Mathématiciens Scandinaves, p. 45 - 49, Stockholm, 1934.

6. J. Mittas, Sur une classe d'hypergroupes commutatifs. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, p. 485 - 488, 29 Septembre 1969, Serie A.

7. ——, Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 269, p. 623 - 626, 13 Octobre 1969, Serie A.

8. ——, Hypergroupes et hyperanneaux polysymétriques. C. R. Acad. Sc , Paris, t. 271, p. 920 - 923, 9 Novembre 1970, Serie A.

9. ——, Certains hypercorps et hyperanneaux définis à partir de corps et anneaux ordonnés. Bull. Math. de la Soc. Math. de la R. S. de Roumanie, T. 15(63), n° 3, 1971.

10. ——, Hypergroupes canoniques. Mathematica Balkanica, t. 2. Beograd, 1972.

11. ——, Sur les hyperanneaux et les hypercorps. Mathematica Balkanica, t. 3. Beograd, 1973.

12. ——, Sur certaines classes des structures hypercompositionnelles. Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἔτος 1973, τόμος 48, Ἀθήνα 1974.

13. ——, Espaces Vectoriels sur un Hypercorps-Introduction des Hyperespaces Affines et Euclidiens. Mathematica Balkanica, t. 5. Beograd, 1975.