

# ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΤΑΚΤΟΣ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 22<sup>ης</sup> ΜΑΪΟΥ 1950

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΟΡΛΑΝΔΟΥ

ΕΟΡΤΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΓΕΝΕΘΛΙΟΥ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΟΣ

Συνήλθεν εις δημοσίαν ἑκτακτον συνεδρίαν ἡ ὀλομέλεια τῆς Ἀκαδημίας ἐπὶ τῇ γενεθλίῳ ἡμέρᾳ τοῦ Πλάτωνος (7ῃ Θαργηλιῶνος 472 π. Χ.) κατὰ τὴν ὁποίαν μετὰ σύντομον εἰσηγήσειν τοῦ *Προέδρου* ὠμίλησεν ὁ ἀκαδημαϊκὸς κ. *Παναγιώτης Ζερβὸς* ἔχων ὡς θέμα :

ΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΠΑΡΑ ΠΛΑΤΩΝΙ

Ἡ μεγαλυτέρα ἐπανάστασις εἰς τὴν παιδικὴν ἡλικίαν τῆς Ἐπιστήμης ἔγινε κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔμπρὸς εἰς τὴν διεισδυτικὴν φαντασίαν Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου ἐξεπήδησε, μέσα ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν πρακτικῶν κανόνων τῶν Αἰγυπτίων, ἡ ἀφηρημένη ἔννοια τοῦ μαθηματικοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς.

Ἐπέπρωτο ὁ μόχθος ἑκατοντάδων γενεῶν τῶν Ἀνατολικῶν λαῶν νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὸν Θαλῆν διὰ νὰ φθάσῃ αὐτὸς εἰς τὴν σύλληψιν τῶν ἐννοιῶν τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας, χαρακτηριστικῶς ἀντιπροσωπευτικῶν τῆς ἐννοίας τῆς ἀφηρημένης ἐννοίας· ἐννοίας, ἣτις ἐπρόκειτο ν' ἀνοίξῃ εὐρείας λεωφόρους εἰς τὸν καλασμοὸν τῆς ἐλευθέρου σκέψεως, ἡ ὁποία καὶ μόνη θεμελιοῖ τὴν ἐλευθέραν ζωὴν.

Ἐδῶ τίθεται τὸ ἐρώτημα : διατὶ ὅ,τι ἐσκέφθη καὶ διετύπωσεν ὁ Θαλῆς δὲν τὸ διετύπωσαν καὶ οἱ Αἰγύπτιοι ; Μία ἀπάντησις εἶναι, ὅτι εἰς τὸν ἐλεύθερον ἀέρα τῶν Ἑλληνικῶν πόλεων, ὑπὸ τὸν γαλανὸν τῆς Ἰωνίας οὐρανόν, ἐκεῖ ὅπου ἐπικρατοῦσεν ἡ ἀντίληψις τῆς ὁμάδος ὡς συνόλου ἐλευθέρων ἀτόμων, ὑπῆρχον αἱ κατάλληλοι προϋποθέσεις διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἐπιστημονικῆς φιλοσοφικῆς σκέψεως· ἐνῶ εἰς τὴν Αἴγυπτον αἱ μεγάλαί σκέψεις, αἱ ὁποῖαι ἐνδεχομένως εὐρίσκοντο εἰς λαμπράν καταστάσιν εἰς τὸν νοῦν τοῦ ἀνθρώπου δὲν εἶχον τὴν εὐκαιρίαν νὰ διατυπωθῶν, εἰ μὴ μόνον, ὅταν ἐπρόκειτο νὰ χρησιμοποιηθοῦν εἰς τὴν κατασκευὴν τάφου τοῦ μεγάλου Φαραῶ ἢ εἰς τὴν διοχέτευσιν τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου.

Παρήλθον τὰ ἔτη ἀπέθανεν ὁ Θαλῆς, κατεστράφη ἡ Μίλητος. Παρήρχοντο οἱ αἰῶνες, ἐνῶ ἡ Ἑλληνικὴ ἱστορία ἐπροχώρει μὲ τὸν γοργὸν ρυθμὸν τῶν Ἀθηναϊκῶν τριήρων. Παρήλθον χιλιετηρίδες. Ὁ ἀφρημένος τρόπος συλλήψεως τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν ἀποτελεῖ καὶ σήμερον θεμέλιον τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ἡ δύναμις, ἡ ἀντοχὴ καὶ τὸ ὕψος τῶν λαῶν καὶ τῶν πολιτισμῶν κρίνονται ἀπὸ τὰ σύμβολα, τὰ ὅποια αὐτοὶ στήγουν· σύμβολον τοῦ τεραστίου πολιτισμοῦ τῆς ὑποτεταγμένης ομάδος, τὸν ὅποιον ἐδημιούργησεν ἡ Αἴγυπτος, ἡ πυραμὶς τοῦ Χέοπος.

Οἱ Ἕλληνες ἔστησαν καὶ αὐτοί, μὲ τὴν σειρὰν των, τὰ σύμβολά των. Ἀλλὰ τὰ σύμβολα αὐτὰ παρέμειναν σύμβολα καὶ πρότυπα συγχρόνως.

Αἱ λέξεις «Ἀθῆναι» καὶ «Δημοκρατία» κατήντησαν συνώνυμοι· ὁ Παρθενὸν καὶ ἡ καλλιτεχνικὴ ἰδιοφυΐα. Δημόκριτος, Ἡράκλειτος, Αἰσχύλος, Λεωνίδας, Περικλῆς, Θουκυδίδης, Ἴπποκράτης, Ἐπαμεινώνδας σύμβολον καὶ πρότυπον συγχρόνως, ὁ καθεὶς εἰς τὸν τομέα του, ἰδιοφυΐας, ἀρετῆς.

Αὐταὶ αἱ πρότυποι φυσιογνωμίαι, καθὼς καὶ αἱ πρότυποι πράξεις, ὑπῆρξαν τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς Ἑλληνικῆς ἀρχαιότητος. Ἀντίστοιχον εἶναι τὸ πνεῦμα τοῦ ἔλευθέρου ἀθλητοῦ, ὁ ὅποιος ἠγωνίζετο διὰ τὸν κότινον ὑπὸ τὸ φῶς τοῦ Ἑλληνικοῦ ὀρίζοντος.

Καὶ τίθεται ἤδη τὸ ἐρώτημα.

Κατόπιν τοιούτων ἰδιοφυϊῶν, ποία ἡ συμβολὴ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὴν λάμπριν τοῦ ἀρχαίου Ἑλληνικοῦ πνεύματος;

Ὁ ἱστορικὸς θ' ἀπαντήσῃ — καὶ ὀρθῶς βεβαίως — διὰ τοῦ ἀντερωτήματος.

Ποία θὰ ἦτο ἡ εἰκὼν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος χωρὶς τὰς Ἀθήνας;

Τὶ θὰ ἦτο ὁ πυρὴν Ὀδυσσεΐας καὶ Ἰλιάδος χωρὶς τὸν Ὅμηρον;

Καθὼς βλέπομεν, διὰ τὸν ἱστορικὸν ὁ Πλάτων ὑπῆρξεν ἐκεῖνος, ὁ ὅποιος συνέθεσε τὰς ἐπὶ μέρους ἐπιτυχίας τῶν προτύπων φυσιογνωμιῶν εἰς *πρότυπον σύνολον*.

Τότε ἄλλος ἀπαιτητικὸς θὰ ἐρωτήσῃ.

Καὶ ὁ Ἀριστοτέλης δὲν ἔκαμε τὸ ἴδιον;

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἐπέμβῃ ὁ σύγχρονος μαθηματικός.

Ὁ Ἀριστοτέλης παραμένει πάντοτε ὡς ὁ κατ' ἐξοχὴν «σοφὸς» τῆς ἀρχαιότητος· ὁ Πλάτων δίδει τὴν ἐντύπωσιν ὅτι συμβαδίζει μαζί μας. Ἀλλ' ὅταν μία μέθοδος σκέψεως ἀφήνῃ τὴν ἐντύπωσιν εἰς τοὺς ἐκπροσώπους τῶν ἐπιστημονικῶν ἀνησυχιῶν ἑβδομήκοντα γενεῶν, ἀπὸ τῆς ἐποχῆς της μέχρι σήμερον, ὅτι συμβαδίζει μετ' αὐτῶν, δὲν εἶναι λογικὸν νὰ ὑποθέσῃ τις ὅτι καὶ προβαδίζει ὅλων αὐτῶν;

Κάθε μεγάλη ἀκμή ἐκφράζεται καὶ ὡς στάσις καὶ ὡς κίνησις. Ὑψιστος ἀντιπρόσωπος τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος ὡς κινήσεως ὁ Πλάτων κινήσεως, ἡ ὁποία κατώρθωσε νὰ κινῆ συνεχῶς ἕως σήμερον τὴν ἐπιστημονικὴν φιλοσοφίαν. Καὶ ἄς μὴ λησμονῶμεν ὅτι φιλοσοφία καὶ ἐπιστήμη ἦτο τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ἀρχαίους Ἀθηναίους.

Καθὼς αἱ ἠθικαὶ ἀξίαι, ὡς σύμβολα τῶν ἠθικῶν ἀναγκῶν ἐνὸς πολιτισμοῦ, ἀποτελοῦν κριτήριον τοῦ ἠθικοῦ ὕψους τοῦ πολιτισμοῦ, οὕτω καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἔννοιαι, ὡς σύμβολα τῶν πνευματικῶν ἀναγκῶν ἐνὸς σταδίου τῆς ἀφηρημένης ἐπιστήμης, ἀποτελοῦν κριτήριον τῆς βαθύτητος τῶν διανοητῶν αὐτοῦ τοῦ σταδίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἐγερθῆ ἡ ἀπορία: Ἀφοῦ ὁ Θαλῆς διετύπωσε τὴν ἀντίληψιν τῆς μαθηματικῆς ἐννοίας, ὅπως αὕτη εἶναι νοητὴ καὶ σήμερον, ποία ὑπῆρξεν ἡ ἐπίδρασις τῶν μεταγενεστέρων ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν;

Ὑφίσταται τεραστία διαφορὰ μεταξὺ τοῦ νὰ ἔχωμεν εἰκόνα μιᾶς ἐννοίας καὶ τοῦ ν' ἀντιλαμβανόμεθα τὴν σημασίαν τῆς ἐννοίας αὐτῆς: τοῦ νὰ εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἐννοίαν αὐτὴν χωρὶς νὰ περιορίσωμεν τὰς λανθανούσας δυναμικότητάς της.

Σημαντικὰ στάδια προόδου τῆς ἀφηρημένης ἐπιστήμης μέχρι σήμερον ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐκείνας ἀκριβῶς τὰς καμπὰς τῆς ἱστορίας, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ἐρευνητὴς ἀπετίνασσε καὶ ἀπὸ ἓνα φραγμὸν τῆς σκέψεως, τὸν ὁποῖον εἶχε θέσει ἀκουσίως της ἢ ἀνθρωπότης, ὅταν εἶχε δώσει ἀνεπαρκῆ ὀρισμὸν μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐννοιῶν.

Ἡ ἐπὶ μέρους προσπάθεια ὀρισμοῦ διαφόρων ἐννοιῶν εἶναι καταδικασμένη νὰ παραμένῃ δεσμία τῆς ἐποχῆς της. Ἡ σημασία τοῦ ἔργου τοῦ Πλάτωνος εἶναι ὅτι ὥρισε τὸν τρόπον ὀρισμοῦ τῆς μαθηματικῆς ἐννοίας, τρόπον, ὁ ὁποῖος ὄχι μόνον ἀφήνει νὰ διαφαίνωνται αἱ ἀξιωματικαὶ ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι κρύπτονται ὑπὸ τοὺς ὀρισμοὺς καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν αὐτὰ αἱ ἴδιαι καὶ ὄχι ἡ «ἀπόλυτος γνῶσις» τὸ θεμέλιον τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἀλλὰ καὶ ἐμφανῶς τονίζει τὴν ὑποθετικότητά των.

Ἴδου ἀπόσπασμα τῆς Πολιτείας. Τὸ διαβάζω μετεφρασμένον. Λέγει ὁ Πλάτων εἰς τὸν Γλαῦκωνα. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχωρίσαμεν μίαν γραμμὴν (σ.τ.μ.: τμήμα γραμμῆς) εἰς δύο ἄνισα τμήματα καὶ ἄς φαντασθῶμεν ὅτι τὸ ἓνα παριστάνει τὸν αἰσθητὸν κόσμον καὶ τὸ ἄλλο τὸν νοητόν. Ἄς χωρίσωμεν πάλιν τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ εἰς δύο ἄλλα τμήματα: τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ παριστάνει τὸ σαφές καὶ τὸ σκοτεινὸν ἐκάστου τῶν δύο αὐτῶν κόσμων. Λοιπόν, Γλαῦκων, θὰ ἔχῃς εἰς τὸ ἓνα τμήμα τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου τὰς εἰκόνας: πρῶτον τὰς σκιὰς, ἔπειτα τὰ φαντάσματα πού ἀναπαριστάνονται μέσα στοῦ νεροῦ καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφα-



νείας τῶν λείων καὶ διαυγῶν συμπαγῶν σωμάτων καὶ ὅλας τὰς ἄλλας ἀναπαραστάσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Τὸ ἄλλο τμῆμα τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου θὰ περιέχῃ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν αὐτὰ αἱ εἰκόνες, π.χ. τὰ ζῶα, τὰ φυτὰ καὶ πάντα τὰ τεχνικὰ ἔργα.

Καὶ ἀφοῦ ὁ Γλαύκων βεβαιώνει τὸν Πλάτωνα, ὅτι κατανοεῖ τὰ λεγόμενα, συνεχίζει ὁ φιλόσοφος. Θέλεις λοιπὸν εἰς αὐτὴν τὴν διαίρεσιν τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου νὰ ὑποκαταστήσωμεν τὴν τοῦ ἀληθοῦς καὶ τοῦ μὴ ἀληθοῦς κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον, δηλαδὴ νὰ εἶναι ἡ δοξασία ὡς πρὸς τὴν γνῶσιν ὅτι ἡ εἰκὼν ὡς πρὸς τὸ ἀντικείμενον;

Συμφωνῶ, ἀπαντᾷ ὁ Γλαύκων.

Τότε, ἄς προχωρήσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ νοητοῦ κόσμου. Ἄς χωρίσωμεν πάλιν εἰς δύο μέρη· διὰ νὰ κατανοήσῃ τὸ ἓνα ἐκ τῶν μερῶν ἡ ψυχὴ ἀναγκάζεται νὰ μεταχειρισθῇ εἰκόνας τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου, τὸν ὁποῖον πρὸ ὀλίγου διηρέσαμεν, χρησιμοποιοῦσα ὑποθέσεις ὅχι διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ἀρχὴν — οὐκ ἐπ' ἀρχὴν — ἀλλὰ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ συμπέρασμα, ἐπὶ τελευτήν. Ἀντιθέτως, διὰ νὰ κατανοήσῃ τὸ δεύτερον τμῆμα τοῦ νοητοῦ κόσμου χωρεῖ ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἐπὶ τὴν ἀρχὴν, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀνάγκην ὑποθέσεως — εἶναι ἀνυπόθετος — χωρὶς νὰ κάμῃ χρῆσιν εἰκόνων, ὡς εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἀλλὰ προχωροῦσα μόνον μετὰ τὰς ἰδέας.

Δὲν ἐννοῶ ἐπαρκῶς, λέγει ὁ Γλαύκων.

Πλάτων. Ὑπομονή· θὰ ἐννοήσῃς μετὰ νέαν ἐξήγησιν. Δὲν ἀγνοεῖς, φαντάζομαι, ὅτι οἱ ἀσχολούμενοι μετὰ τὴν γεωμετρίαν καὶ μετὰ τοὺς ἀριθμοὺς ὑποθέτουν δύο εἶδη ἀριθμῶν, τὸν περιττὸν καὶ τὸν ἄρτιον, τὰ σχήματα, τρία εἶδη γωνιῶν καὶ καθ' ἐξῆς, ἀναλόγως τοῦ ζητουμένου· καὶ ἀφοῦ κάμουν αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις, τὰς θεωροῦν ὡς ἀληθείας εἰς πάντα φανεράς, χωρὶς νὰ δίδουν λόγον οὔτε εἰς αὐτοὺς τοὺς ἰδίους, οὔτε εἰς τοὺς ἄλλους. Ἀναχωροῦντες λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις καταλήγουν δι' ἀλύσεως προτάσεων εἰς συμπέρασμα, τὸ ὁποῖον ἤθελαν νὰ δείξουν.

Μὰ αὐτὸ τὸ γνωρίζω καλά, ἀπαντᾷ ὁ Γλαύκων.

Ἐπομένως, συνεχίζει ὁ Πλάτων, γνωρίζεις ἐπίσης ὅτι μεταχειρίζονται σχήματα, τὰ ὁποῖα βλέπομεν, καὶ κάμουν τοὺς συλλογισμοὺς των ἐπ' αὐτῶν, ἐνῶ αἱ σκέψεις των δὲν ἀναφέρονται εἰς αὐτά, ἀλλ' εἰς ἄλλα σχήματα, τὰ ὁποῖα παριστάνονται ἀπὸ τὰ ὄρατά. Οἱ συλλογισμοὶ των δὲν γίνονται ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ἢ τῆς διαγωνίου, τὰ ὁποῖα χαράσσουν, ἀλλ' ἐπὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς διαγωνίου ποὺ ἔχουν εἰς τὸν νοῦν των. Οἱ γεωμέτραι τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα γράφουν, τὰ μεταχειρίζονται λοιπὸν ὡς εἰκόνας ἐκείνων, τὰ ὁποῖα μόνον διὰ τῆς διανοίας εἶναι δυνατὸν νὰ ἴδουν.

Γλαύκων. Ἐληθῆ λέγεις.

Πλάτων. Αὐτὰ τὰ σχήματα λοιπόν, τὰ διὰ τῆς διανοίας μόνον συλλαμβανόμενα διὰ τὴν συλλάβην ἢ ψυχὴ εἶναι ἠναγκασμένη νὰ χρησιμοποιήσῃ ὑποθέσεις, ὅχι διὰ τὴν φθάσῃ εἰς τὴν πρώτην ἀρχήν, διότι δὲν δύναται νὰ χωρήσῃ πέραν τῶν ὑποθέσεων — οὐ δύναται τῶν ὑποθέσεων ἀνωτέρω ἐκβαίνειν, ἀλλὰ μεταχειρίζεται εἰκόνας (δηλαδή, τὰ αἰσθητὰ καὶ ἐπίγεια πράγματα), ἐκλέγουσα ἐκείνας, αἵτινες σχετικῶς πρὸς τὰ (νοητὰ) ἀντικείμενα (τὰ ὁποῖα ἀπεικονίζουσι) φαίνονται ἐναργέστερα. (Πολιτείας στ. XX - XXIb).

Ἐπόθεσε ἀνθρώπους, λέγει ὁ Πλάτων, δεσμίους εἰς σπήλαιον ἀπὸ τῆς παιδικῆς τῶν ἡλικίας καὶ μὴ δυναμένους νὰ βλέπουν παρὰ μόνον ἔμπρός. (Περιγράφει κατόπιν ὁ Πλάτων, πῶς αὐτοὶ οἱ ἄνθρωποι ὑπὸ τὸ φῶς πυρᾶς, μακρὰν καὶ ὀπισθεν καιομένης, διακρίνουσι μόνον τὰς σκιὰς τῶν ἀντικειμένων). Ὄταν ἀπαλλαγῆ, ὁ ἐν τῷ σπηλαίῳ ἄνθρωπος τῶν δεσμῶν, ἐξέρχεται τοῦ σπηλαίου καὶ ἀνέροχεται εἰς τὰ μέρη, τὰ ὁποῖα φωτίζει ὁ ἥλιος. Καὶ ἐκεῖ, ἀδυνατῶν νὰ ἀντικρύσῃ τὰ ζῶα, τὰ φυτὰ καὶ τὸν ἥλιον, βλέπει μετὰ τὰς σκιὰς μέσα εἰς τὸ ὕδωρ τὰς εἰκόνας καὶ τὰς σκιὰς τῶν αἰσθητῶν, ἀντὶ τὴν ἴδην αὐτὰ τὰ αἰσθητὰ ὕστερον βλέπει τὰ αἰσθητὰ. Μικρὸν κατὰ μικρὸν, ἀφοῦ ἴδῃ κατὰ τὴν νύκτα καὶ τοὺς ἀστέρας καὶ τὴν σελήνην, δύναται νὰ ἀτενίσῃ πρὸς τὸν ἥλιον. (Πολιτ. Ζ, I - IIb).

Ὄττω καὶ ὁ διαλεκτικὸς κατ' ἀρχὰς μόνον τὰς σκιὰς τῶν ὄντων δύναται νὰ βλέπῃ, ἔπειτα δὲ μικρὸν κατὰ μικρὸν δύναται νὰ προχωρήσῃ καὶ εἰς τὴν ἰδέαν τοῦ ἀγαθοῦ.

Ἡ γεωμετρία καὶ αἱ συναφεῖς πρὸς αὐτὴν ἐπιστῆμαι ἀναζητοῦν τὴν ἀλήθειαν, τὸ ὄν. Ἄλλ' ὅμως εἶναι ἀδύνατον εἰς αὐτὰς νὰ τὸ κατανοήσουσι, ἀλλὰ μόνον ὡσὰν ὄνειρον εἶναι δι' αὐτὰς, (ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι ὑποχρεωμένοι νὰ χρησιμοποιήσουσι τὰ δεδομένα τῶν αἰσθήσεων, διότι δὲν δύναται νὰ τὰ ὑπερπηδήσουσι). Διότι ὅταν δὲν γνωρίζωμεν, ποῦ νὰ βασίσωμεν τὰ ἀξιώματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐκκινούμεν καὶ ὅταν τὰ συμπεράσματα καὶ αἱ ἐνδιάμεσοι προτάσεις δὲν βασίζονται παρὰ ἐπὶ παρομοίων ἀξιωμάτων, πῶς εἶναι δυνατόν δι' ἐνὸς δικτύου ὑποθέσεων νὰ δημιουργηθῆ τελεία γνώσις; Αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον (Πολιτ. Ζ' XIIIc).

Καθὼς βλέπομεν, ἐνῶ ὁ Πλάτων ἐκκινεῖ ἀπὸ τὴν διαφορὰν μεταξὺ σχήματος, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου γίνονται οἱ συλλογισμοὶ τοῦ μαθηματικοῦ καὶ σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται αὐτοί, ἀκριβῶς καθὼς κάμνει ὁ Descartes εἰς τὸ Discours de la Méthode, προχωρεῖ πολὺ περισσότερον ἀπὸ τὸν Descartes ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τῆς σημασίας τῆς ὑποθέσεως· ἀμφισβητεῖ τὸ ἀπόλυτον τῶν εἰς τὰ τέλεια πρότυπα ἀναφερομένων «ἀφ' ἑαυτῶν φανερῶν» προτάσεων.

Τὸ κείμενον εἶναι τόσον σαφές, ὥστε νὰ νομίζουσι ὅλοι ὅτι τὸ ἐννοοῦν τελείως. Ἄλλὰ τὸ «νομίζω ὅτι ἐννοῶ τελείως» εἶναι ὁ ἀσπονδότερος ἐχθρὸς τοῦ «προσπαθῶ νὰ προσεγγίσω τὴν ἀλήθειαν», τὸ ὁποῖον καὶ μόνον προάγει τὴν ἐπιστήμην.

Καθὼς βλέπετε ἀπὸ τὸ κείμενον δὲν ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων περὶ μαθηματικῶν ἀληθειῶν «ἀφ' ἑαυτῶν φανερῶν», ἀλλὰ περὶ ὑποθέσεων, τὰς ὁποίας κάμνουσι οἱ μαθηματικοί.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἃς μοῦ ἐπιτραπῆ ν' ἀναφέρω περικοπὴν ἀπὸ ἄλλο κείμενον, ὅχι τοῦ Πλάτωνος αὐτὴν τὴν φορᾶν. «*1<sup>ο</sup> ἐπιτόλαιον παρατηρητὴν* ἢ ἐπιστημονικὴ ἀλήθεια εἶναι ἐκτὸς ἀμφισβητήσεως. Ἡ λογικὴ τῆς ἐπιστήμης εἶναι ἀλάθητος καὶ ἂν οἱ σοφοὶ ἀπατῶνται ἐνίοτε, τοῦτο συμβαίνει, διότι παρεγνώρισαν τοὺς κανόνας τῆς. Αἱ μαθηματικαὶ ἀλήθειαι προκύπτουσι ἀπὸ μικρὸν ἀριθμὸν προτάσεων προφανῶν δι' ἀλύσεως αὐστηρῶν συλλογισμῶν· ἐπιβάλλονται ὅχι μόνον εἰς ἡμᾶς, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν φύσιν. Δεσμεύουσι, οὕτως εἰπεῖν, τὸν Δημιουργὸν τοῦ παντὸς καὶ τοῦ ἀφήνουσι μόνον τὴν ἐπιλογὴν μεταξὺ ὀλίγων σχετικῶς λύσεων. Θὰ ἤρχουσι τότε μερικὰ πειράματα, διὰ νὰ διαπιστώσωμεν ποίαν ἐκλογὴν ἔκαμεν.

Ἐκαστὸν πείραμα θὰ ἐξαχθῆ πλῆθος συμπερασμάτων διὰ σειρᾶς μαθηματικῶν ἀπαγωγικῶν συλλογισμῶν καὶ τοιουτοτρόπως μὲ καθε πείραμα θὰ γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν τοῦ σύμπαντος.

Ἴδου ποία εἶναι διὰ πολλοὺς ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιστημονικῆς βεβαιότητος.

Ὅταν ὅμως οἱ σοφοὶ ἐσκέφθησαν περισσότερον, διέκριναν τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κατέχει ἡ ὑπόθεσις. Εἶδον ὅτι ὁ μαθηματικὸς καὶ ὁ πειραματιστὴς δὲν θὰ ἠδύναντο νὰ παραμερίσουσι τὴν ὑπόθεσιν». Ἡ δευτέρα αὐτῆ περικοπὴ, τὴν ὁποίαν σᾶς ἀνέγνωσα, μοῦ δίδει τὴν ἐντύπωσιν, ὅτι ἀποτελεῖ δευτέραν ἐκδοσιν τῆς πρώτης ἐκείνης περικοπῆς τοῦ Πλάτωνος. Ἡ δευτέρα αὐτῆ ἐκδοσις ὅμως ἐχρειάσθη νὰ περάσουσι δύο χιλιάδες τριακόσια ἔτη διὰ νὰ γίνῃ· καὶ ἐγένετο ἀπὸ τὸν Henri Poincaré, τὸν μεγαλύτερον μαθηματικὸν τῆς τελευταίας ἐβδομηκονταετίας.

Τὰ δύο τόσον ἀντίθετα πνεύματα τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Poincaré, ἀντιπροσωπεύοντα τὰς συνισταμένας τοῦ Ἑλληνικοῦ καὶ τοῦ Εὐρωπαϊκοῦ πνεύματος ἀντιστοίχως, συναντῶνται διὰ μέσου τῶν χιλιετηρίδων εἰς τὴν κοινὴν ἀντίληψιν τῆς σημασίας τῆς ἐπιστημονικῆς ὑποθέσεως· καὶ δὲν ἦτο δυνατὸν παρὰ νὰ εἶναι κοινὴ ἢ ἀντίληψις, διότι κοινὸν γνώρισμα καὶ τῶν δύο ἦτο ἡ ἰκανότης νὰ κάμνουσι ἀνατομίαν τῆς ἐπιστήμης, καθὼς ὁ Σωκράτης ἔκαμεν ἀνατομίαν τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως.



Ἄλλοι μαθηματικοὶ ἀνεκάλυψαν αὐτοὶ ἀπεκάλυψαν.

Ἀπηυθύνοντο ἀμφοτέρω καὶ εἰς τὰς ρίζας καὶ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ἐπιστήμης συγχρόνως, διότι διέκριναν ὅτι ὅλη ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη εἶναι ἀλληλουχία μετασχηματισμῶν. Ὑπὸ τὰ ἐπὶ μέρους θεωρήματα διέκριναν τὰς μορφὰς καὶ ὑπ' αὐτὰς τὴν καταπλήσσοσαν ἐνότητα τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἡ ὁποία, ὅταν ἀπεκαλύπτετο ἀπὸ αὐτοῦ, ἐπλημμύριζε τὴν ἐπιστήμην· καὶ δὲν ἤξευρε τότε κανεὶς τί νὰ θαυμάσῃ περισσότερον· τὸ μεγαλειῶδες τῆς ἀπλότητος ἢ τὴν ἀπλότητα τοῦ μεγαλειώδους;

Καὶ μὴ ἀρκούμενοι καὶ εἰς τοῦτο, ἄπληστοι εἰς τὴν ἐρευνητικὴν μαρτίαν τῶν, ἐπεζήτησαν νὰ καταδείξουν ὅτι καὶ δὲν ἔπρεπε νὰ καταπλαγῶμεν ἀπὸ τὴν ἐνότητα αὐτὴν, διότι εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἐνότητος τοῦ τρόπου συλλήψεως τῶν ἐννοιῶν καὶ σχηματισμοῦ τῶν ὑποθέσεων.

Ὁ Πλάτων ὀρίζει τὸν κύκλον ὡς ἑξῆς: Κύκλος εἶναι τὸ σχῆμα, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀποστάσεις τῶν πλεόν ἀπομαμακρυσμένων σημείων του, τῶν περιφερειακῶν, ἀπὸ ἓν καὶ μόνον ἐσωτερικὸν σημεῖον, τὸ κέντρον, εἶναι αἱ αὐταί, ἀνεξαρτήτως τῆς διευθύνσεως τοῦ περιφερειακοῦ σημείου ὡς πρὸς τὸ κέντρον. Ὁ ὀρισμὸς κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀντιπροσωπεύει κρίσιν, ἡ ὁποία γίνεται ἐπὶ τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον βλέπομεν διὰ τῶν ὀφθαλμῶν μας καὶ τὸ ὁποῖον ἐπομένως εἶναι ἀντικείμενον αἰσθητόν, ἀλλ' ὅμως ἀναφέρεται εἰς σχῆμα διὰ τῆς διανοίας συλλαμβανόμενον, εἰς διανοητικὸν σχηματισμόν. Αὐτὸς ὁ διανοητικὸς σχηματισμὸς δὲν εἶναι ποτὲ δυνατὸν ἔξ αὐτοῦ τοῦ τρόπου τῆς δημιουργίας του νὰ καταστῇ διὰ τῶν ὀφθαλμῶν ὄρατός· μᾶς τὸν δίδει μόνον ἡ ἐνόρασις, ἡ διαίσθησις.

Αὐτὸ τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὸν σχηματισμὸν αὐτὸν εἶναι ὁ ὀρισμὸς του, αἰώνιος καὶ σταθερός. Αὐτὸ τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον μόνον διὰ τῆς διανοίας συλλαμβάνεται, καλεῖ ὁ Πλάτων *ιδέα*. (Ἐδῶ ὡς πρὸς τοὺς μαθηματικοὺς ὀρισμοὺς ἔχομεν ταυτότητα ἀντιλήψεων Πλάτωνος καὶ Descartes). Μεταξὺ τῶν ιδεῶν καὶ τῶν αἰσθητῶν ἀντικειμένων, ἀτελῶν ὁμοιωμάτων τῶν ιδεῶν, ὑφίσταται ἐνδιάμεσος σταθμός. Εἶναι τὰ Μαθηματικά. Τὰ Μαθηματικά, τὰ ἐπὶ πάντα τείνοντα, κατὰ τὸν Πλάτωνα. Λέγει περὶ τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὴν Πολιτείαν «τὸ κοινὸν μάθημα, ᾧ πᾶσαι προσχρῶνται τέχναι τε καὶ διάνοιαι καὶ ἐπιστῆμαι, ὃ καὶ παντὶ ἐν πρώτοις ἀνάγκη μανθάνειν· τὸ ἐν καὶ τὰ δύο καὶ τὰ τρία διαγιγνώσκειν· λέγω δὲ αὐτὸ ἐν κεφαλαίῳ ἀριθμὸν τε καὶ λογισμὸν (Πολιτ. Ζ VIc).

Ἐπανέρχομαι εἰς τὸν κύκλον. Ὁ κύκλος π.χ. κέντρον K καὶ ἀκτῖνος P, τὸν ὁποῖον χαράσσομεν, εἶναι ἀντικείμενον, ἀνῆκον εἰς τὸν αἰσθητὸν κόσμον·

αίσθητὸν ἀντικείμενον· ὁ κύκλος K καὶ ἀκτῖνος P, εἰς τὸν ὁποῖον ἀναφέρομεν τοὺς ἐπὶ τοῦ χαραχθέντος συλλογισμούς μα<sub>2</sub> εἶναι ἀντικείμενον τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Τέλος ὁ κύκλος, ἀνεξαρτήτως κέντρου καὶ ἀκτῖνος, ὡς διανοητικὸς σχηματισμός, εἶναι *ιδέα*, ἀνήκει εἰς τὸν νοητὸν κόσμον.

Καθὼς βλέπομεν, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σχήματος, ὡς ἀντικειμένου τῆς μαθηματικῆς σκέψεως καὶ τῆς ιδέας τοῦ σχήματος, εἶναι ὅτι, ἐνῶ ἡ *ιδέα* τοῦ κύκλου εἶναι *μία*, οἱ κύκλοι, ὡς ἀντικείμενα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, εἶναι ἄπειροι.

Πολὺ πλέον θεμελιώδης εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ σχήματος, ὡς ἀντικειμένου τῆς φύσεως, αἰσθητοῦ ἀντικειμένου καὶ ὡς ἀντικειμένου τῆς μαθηματικῆς σκέψεως· διαφορὰ πηγάζουσα ἀπὸ τὴν ἀνάγκην ν<sup>ο</sup> ἀφαιρεθοῦν μία, δύο ἢ καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις. Αὐτὸς ἀκριβῶς ὑπῆρξεν ὁ φραγμός, τὸν ὁποῖον δὲν ἠδυνήθη ποτὲ νὰ ὑπερπηδήσῃ ἡ Αἰγυπτιακὴ σκέψις.

Ἐδῶ καὶ ἡ ἐπανάστασις τὴν ὁποίαν ἀνέφερα εἰς τὴν ἀρχήν, ὅτι ἐσημείωσεν ἡ μαθηματικὴ δημιουργία Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου.

Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ Πυθαγόρειοι, ἀξιοποιοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν αὐτὴν τῶν διαστάσεων, εἶχον ἐξασφαλίσαι τὴν ἐπιβίωσιν τῆς ιδέας αὐτῆς. Ἄλλ<sup>ο</sup> ὁ Πλάτων ὑπῆρξεν ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος τὴν διετύπωσε μὲ διαύγειαν καὶ πληρότητα, δίδων κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον θεμέλιον εἰς τὴν μέχρι σήμερον γεωμετρικὴν ἔρευναν.

Τὸ τί ἀκριβῶς προσέφερον ὁ Πλάτων εἰς τὴν ἐλάττωσιν τῶν διαστάσεων, καθὼς καὶ ὁ βαθμὸς τῆς δυσκολίας ποὺ συνήντα ἐκάστοτε, φαίνεται ἀπὸ τοὺς ἀλληλοδιαδόχους ὁρισμούς τῆς εὐθείας γραμμῆς, τοὺς ὁποίους ἔδωκε.

Δὲν εἶναι ἐκπληκτικὴ ἡ δυσκολία, τὴν ὁποίαν συνήντησεν ὁ Πλάτων εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας, ἐφ' ὅσον τὸν αὐτὸν βαθμὸν δυσκολίας συναντῶμεν καὶ ἡμεῖς σήμερον.

Ὅριζι τὸ σχῆμα ὁ Πλάτων ὡς τὸ ἐπίπεδον ἢ τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ «πέρας» τοῦ στερεοῦ.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖ κατὰ τὴν γνώμην μου θρίαμβον τῆς Πλατωνικῆς σκέψεως. Ὅχι μόνον, διότι ἐπιτυγχάνει ἀφαίρεσιν τῆς διαστάσεως κατὰ τρόπον καθαρῶς ἀφηρημένον, ἀλλὰ κυρίως, διότι διακρίνει τὴν ἐπιφάνειαν ὡς «ἓνα ὀρικὸν περιβλήμα» τοῦ στερεοῦ καὶ εἰσάγεται τοιοῦτοτρόπως ἡ ἔννοια τοῦ ὀρίου, ἔννοια ἀλληλένδετος μὲ τὰς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου καὶ τῆς συνεχείας. Ἐνῶ δὲ ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας ὑπὸ ἐμβρυώδη μορφήν προκαλεῖται εἰς πάντα ἄνθρωπον, ἐξελίχθη ἐν τούτοις βραδύτατα, ὁ βαθμὸς δὲ ἐξελίξεώς της εἰς κάθε ἐποχὴν ἀποτελεῖ κριτήριον τῆς προόδου τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψεως κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην.



Ἐχρησιάσθη πολὺν καιρὸν ὁ ἀνθρώπινος νοῦς διὰ νὰ διακρίνη ὅτι, ἐνῶ ὅπου ἔχομεν ὄριον δὲν ἔχομεν κατ' ἀνάγκην καὶ συνέχειαν, ἐν τούτοις, ὅπου ἔχομεν συνέχειαν, ἔχομεν καὶ ὄριον.

Καὶ τίθεται ἤδη τὸ ἐρώτημα: «Εἶχεν ὁ Πλάτων ἀντίληψιν τῆς συνεχείας, ὅπως ἐχρησιμοποίησεν αὐτὴν εἰς τὰ Μαθηματικά ὁ Ἀπειροστικός Λογισμὸς τοῦ Νεύτωνος καὶ τοῦ Leibnitz;» Τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀποκτᾷ μείζονα σημασίαν, διότι ἴχνη αὐτῆς τῆς ἀντιλήψεως εὐρίσκονται εἰς τὴν σκέψιν τοῦ Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου καὶ τοῦ Εὐκλείδου, ὅταν ἀποδεικνύουν, ὅτι αἱ ἰσοῦσες πυραμίδες, αἱ ἔχουσαι ἰσοδυνάμους βάσεις, ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον· κυρίως δέ, διότι εἶναι ἱστορικὸν γεγονός, ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης εἶχε σαφῆ ἀντίληψιν τῆς συνεχείας καὶ ἐφήρμοζεν αὐτὴν διὰ ν' ἀποδεικνύη θεωρήματά του.

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ τεθὲν ἐρώτημα θὰ ἦτο ἀμφίβολος κατὰ τὴν ἐποχὴν τοῦ Νεύτωνος καὶ τοῦ Leibnitz. Ἦρχιζε τότε ἡ ἡρωϊκὴ ἐποχὴ τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν, καθ' ἣν αἱ ἰδιοφυΐαι τῶν Εὐρωπαϊῶν ἐρευνητῶν συνεσώρευον ἀνακαλύψεις ἐπὶ ἀνακαλύψεων, αἱ ὁποῖαι μετέβαλλον τὴν ὄψιν τῶν μαθηματικῶν. Ἐποχὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ στάδιον μεταξὺ Θαλοῦ καὶ Πλάτωνος, τῆς ἐπιστήμης τῶν ἀρχαίων Ἀλλ' εἰς τοὺς ἀρχαίους εἶχεν ἔλθει ὁ Πλάτων διὰ νὰ δώσῃ ἐνότητα εἰς τὴν ἐπιστήμην καὶ νὰ ἐδραιώσῃ τὰ μαθηματικὰ φιλοσοφικῶς. Ἡ διαύγεια καὶ ὁ εἰρμὸς τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἦσαν κυρίως καρπὸς τῆς ἐργασίας τοῦ Πλάτωνος. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἦλθε καὶ εἰς τὴν Εὐρωπαϊκὴν Ἐπιστήμην κάποτε ἡ ἐποχὴ τῶν Ἀριθμητιστῶν<sup>1</sup> καὶ τῶν Συνολιστῶν, οἱ ὁποῖοι προσεπάθησαν νὰ ἐπιτύχουν νέαν διατύπωσιν τῶν βάσεων τῆς Ἀναλύσεως οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ ἀνακτήσῃ τὴν Εὐκλείδειον σαφήνειαν. Ἀπηυθύνθησαν καὶ πάλιν τότε οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν βασιλίσαν τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, τὴν Ἀριθμητικὴν, καὶ μάλιστα εἰς τὰς πρώτας ἐννοίας της. Καὶ ἀφοῦ τὰς ἐξήτασαν μέσα εἰς τὸ πλαίσιον τῶν ἐκθαμβωτικῶν ἀνακαλύψεων, τὰς ὁποίας εἶχε συσσωρεύσει ἡ ἄπληστος ἀναζήτησις τῶν ἐρευνητῶν, ἐδημιούργησαν τὸν νέον ὀρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ὁ Dedekind<sup>2</sup>, τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων ὁ G. Cantor. Ἐχρησιάσθη νὰ περάσῃ καιρὸς, ὅχι πολὺς εὐτυχῶς, διὰ νὰ τοὺς κατανοήσουν, ὅπως

<sup>1</sup> Ἐδῶ ἐγκυεῖται ἡ τεραστία σημασία τοῦ ἔργου τῶν Cauchy καὶ Weierstrass εἰς τὴν «ἀριθμοποίησιν» τῆς Ἀναλύσεως καθὼς καὶ ἡ τῶν ἰδεῶν τοῦ Kronecker. Πρέπει ἀκόμη ν' ἀναφερθῇ ἐδῶ ἡ μεγάλη συμβολὴ τοῦ συγγράμματος τοῦ Jules Tannery, «Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle» εἰς τὴν διάδοσιν τῶν ἰδεῶν αὐτῶν.

<sup>2</sup> Πρέπει ἐδῶ νὰ ἀναφερθῇ ὅτι εἰς τὴν Γαλλίαν ὁ Charles Merary εἶχε πρὶν ἀπὸ τὸν Dedekind δώσει ὀρισμὸν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ ἀνάλογον τοῦ πρώτου ὀρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ἀργότερα ὁ G. Cantor, ἥτοι ὡς ὀρίου ἀκολουθίας.

συμβαίνει συνήθως με τὰς θεωρίας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦν ἀπὸ τὸν ἄνθρωπον νὰ μεταβάλλῃ τὸν τρόπον σκέψεως. Ὅτι ὅμως ἐφάνη ἴσως εἰς τοὺς πολλοὺς ὡς μία ἀπαίτησις τῆς λογικῆς μερικῶν μαθηματικῶν, γρήγορα ἀπέδωκε πλουσίους καρπούς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συναρτήσεων. Ἡ δύναμις τῶν μεγαλοφυῶν ἐρευνητῶν ἔγκειται ἀκριβῶς εἰς τὸ ὅτι ἀπὸ τὰς ἐφευρέσεις των προβάλλουν ἰδέαι διὰ νέας θεωρίας, τὰς ὁποίας δυνατὸν αὐτοὶ καὶ νὰ μὴ εἶχον κατὰ νοῦν.

Ἡ ἀφρημένη σκέψις τῶν Dedekind καὶ Cantor εἶχε δώσει τὴν χαρακτηριστικὴν βολὴν εἰς ἐκείνους ἀπὸ τοὺς ἐπιστήμονας, οἱ ὁποῖοι ἦσαν ὁπαδοὶ τοῦ «πρακτικῶς σκοπίμου». Συγχρόνως ὅμως ἐπραγματοποιεῖτο, κατὰ ἓνα τρόπον, καὶ ἡ ἰδέα τοῦ Πλάτωνος, ἡ ἐνοποίησης τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀσυμμέτρου. Καὶ ἐδίδετο καὶ ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐὰν ὁ Πλάτων εἶχεν ἀντίληψιν τῆς συνεχείας μεγαλοπρεπῶς καταφατικῆ· ἀλλὰ μετὰ τὴν παρατήρησιν ὅτι, ἐνῶ τοῦ Νεύτωνος πρόγονος ὑπῆρξεν ὁ Ἀρχιμήδης, ὁ Πλάτων εἶχεν ἀπογόνους του τοὺς Συνολιστάς.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὀφείλομεν νὰ δώσωμεν μερικὰς ἐξηγήσεις ἐπὶ τοῦ πῶς, ὅπου διακρίνομεν μαθηματικὴν συνέχειαν, ὑπεισέρχεται ἀπρόσκλητος ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς. Ἄς λάβωμεν πρῶτον ἓνα παράδειγμα. Ἐστω σύστημα Καρτεσιανῶν συντεταγμένων  $OX, OY$ , ὅπου ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν ὀρίσει τὴν μονότιμον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ ρητῶν ἀριθμῶν καὶ σημείων (ρητῶν συντεταγμένων) τοῦ ἐπιπέδου  $XOY$ . Ἄς θεωρήσωμεν τότε τετράγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εἶναι ἐξ αὐτῶν τῶν σημείων καὶ τὸν εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένον κύκλον. Ἡ τομὴ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου δὲν ἔχει ρητὰς συντεταγμένας. Ἐστω λοιπὸν ὅτι παραδεχόμεθα μόνον τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς. Τότε ἐπὶ τῇ βάσει πάντοτε τῶν ὀρισμῶν τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, θὰ ἔπρεπε νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ διαγώνιος αὐτὴ δὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον συγκρούεται πρὸς τὴν ἐποπτεῖαν. Ἐδῶ προσέκρουσαν οἱ Πυθαγόρειοι εὐθὺς μόλις ἀπέδειξαν τὸ ἀσύμμετρον μερικῶν μεγεθῶν. Ἀφ' ἐνὸς δὲν ἠθέλαν ν' ἀπορρίψουν τὴν ἐποπτεῖαν. Ἀφ' ἐτέρου τὸ ἀπέδωκαν, καθὼς φαίνεται, εἰς ἀδυναμίαν τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἐπροτίμησαν νὰ ῥίψουν τὸ βάρος εἰς τὴν ἐδραίωσιν τῆς χρησιμοποίησεως τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καὶ ὄχι τὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Ἐδημιούργησαν λοιπὸν τὸ σύνολον ἐκεῖνο τῶν ἀξιωμάτων, τῶν αἰτημάτων καὶ τῶν ὀρισμῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται καὶ ἡ περίφημος θεωρία τῶν Ἀναλογιῶν τοῦ 5ου βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὴν θεμελίωσιν αὐτὴν εἶχον ἐμπνευσθῆ ἀπὸ τὴν ἐποπτεῖαν τοῦ χώρου καὶ δι' αὐτῆς τὴν ἐδικαιολογοῦσαν. Ἡ ἀξία τοῦ γεωμετρικοῦ αὐτοῦ οἰκοδομήματος καταφαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ ὅτι, ἐνῶ οἱ πρῶτοι θεμελιωταὶ του εἶχαν



δρομηθῆ ἀπὸ τὴν  $\frac{1}{2}$  καὶ ἄλλους ὁρισμένους ἀσυμμέτρους, αὕτη ἐφαρμόζεται γενικῶς ἐπὶ δύο εὐθ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ὑπόκεινται κατ' ἀνάγκην εἰς τὸν περιορισμὸν νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν ἀριθμὸς σύμμετρος.

Ἡ κατεύθυνσις αὕτη τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς σκέψεως κατέστησε δυνατὴν τὴν δημιουργίαν τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, διὰ τῶν ὁποίων ἐκληρονομήθη εἰς τοὺς Εὐρωπαϊκοὺς λαοὺς ἡ ἀποδεικτικὴ ἀκρίβεια καὶ ἡ σαφὴς διατύπωσις μαζὶ μὲ ἓνα σημαντικὸν ἀξιωματικὸν οἰκοδόμημα. Ὁρθῶς ἐχαρακτήρισθη ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία ὡς ἡ πρώτη ἐπιστημονικὴ θεωρία. Ἐχομεν ἤδη τονίσει, πόσον μέγα μέρος τῆς ἐργασίας αὐτῆς ὀφείλεται εἰς τὸν Πλάτωνα.

Οἱ ἀρχαῖοι Ἑλληνες, ὡς ἀνήσχυα πνεύματα, δὲν ἱκανοποιήθησαν πλήρως ἀπὸ τὴν *παράκαμψιν* αὐτὴν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. Τὸ χάσμα εἰς τὴν ἀμφιμονότιμον ἀντιστοιχίαν τμημάτων εὐθείας καὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἦτο ἐξαιρετικὰ ἀντιπαθὲς εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλληνικὴν λογικὴν. Ἀπεκάλεσαν τὴν  $\frac{1}{2}$  καὶ τὴν  $\frac{1}{3}$  «ἀλόγους» ἀριθμοὺς καὶ αὐτά, ἐνῶ οἱ ταπεινοὶ θεράποντες τῆς Λογιστικῆς προσεπάθουν νὰ προσεγγίσουν τοὺς ἀσυμμέτρους, ὅσον τοὺς ἐνδιέφερε πρακτικῶς μὲ ρητοὺς ἀριθμοὺς, ἅμιοιροι ἴσως τῆς ἐπιστημονικῆς ἐπαναστάσεως εἰς τὴν ὑποίαν ἔμελλον νὰ συντείνουσαν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἐπενέβη ὁ Πλάτων. «*Θεωρῶν ἔργλημα κατὰ τῆς πολιτείας τὸ νὰ μὴ γνωρίζῃ ἢ νεολαία τοὺς ἀσυμμέτρους*» λέγει εἰς τοὺς Νόμους.

Δὲν ἱκανοποίησε τὸν Πλάτωνα τὸ σύστημα τῶν ρητῶν μόνον ἐφ' ὅσον δὲν εἶχε δυνηθῆ δι' αὐτῶν νὰ ἐκφράσῃ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἀπευθυνθεὶς λοιπὸν εἰς τὴν ρίζαν τοῦ κακοῦ κατεσκεύασεν ἄλλο, εὐρύτερον ἀριθμητικὸν σύστημα, τοὺς «ἰδεατοὺς ἀριθμοὺς».

Αἱ πληροφορίες μας δι' αὐτοὺς οὔτε πλήρεις εἶναι, οὔτε πάντοτε σαφεῖς. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι παραπλεύρως τοῦ κοινοῦ ἀριθμοῦ ἔνα ἐτοποθέτει τὸν ἰδεατὸν ἀριθμὸν *Ἔνα*, ὁ ὁποῖος θὰ εἶχε τὴν ιδιότητα «*διαιρούμενος ἐπ' ἄπειρον διὰ δύο νὰ παραμένῃ ἀναλλοίωτος*». Τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς ὥριζεν ὁ Πλάτων καὶ διὰ τὸν ἰδεατὸν ἀριθμὸν *Δύο*.

Τί ἡννόει ὁ Πλάτων διὰ τῶν ἰδεατῶν ἀριθμῶν του;

Ὁ Γάλλος καθηγητὴς Rey διετύπωσε κατὰ τὸ 1939 εἰς τὸ ὥραϊον βιβλίον του τὴν ἐξῆς γνώμην: «Αἱ συνεχεῖς διαιρέσεις τοῦ *Ἔνα* διὰ τοῦ δύο ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διαδοχικὰ πηλίκια  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ ».

Ἄλλὰ τότε τί νόημα ἔχει τὸ ὅτι ἡ *Μονὰς* κατορθώνει νὰ παραμένῃ ἀναλλοίωτος; ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς φθινοῦσης αὐτῆς γεωμετρικῆς προόδου ἔχει ὄριον τὸν 1».

Ἐὰν δεχθῶμεν τὴν γνώμην τοῦ Rey, διακρίνομεν ὅτι αἱ ἀθῶαι προσεγ-



γίσεις ασυμμέτρων ὑπὸ τῶν ταπεινῶν θεραπόντων τῆς Λογιστικῆς ἔγιναν ἐργαλεῖον τρομερὸν εἰς χεῖρας τοῦ Πλάτωνος. Διακρίνομεν δηλαδὴ τότε ὅτι ὁ Πλάτων ἤγγισεν ἓνα ἀπὸ τοὺς τρόπους μὲ τοὺς ὁποίους ὀρίζει ἡ Μαθηματικὴ Ἀνάλυσις ασυμμέτρους ἀριθμοὺς (γενικῶς ἀριθμοὺς) ὡς ὄριον ἀθροίσματος τῶν ὄρων, συγκλινούσης ἀριθμητικῆς σειρᾶς, μὲ ρητοὺς ὄρους).

«*Ἡ βαθύτης τοῦ Πλάτωνος ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἀπῆρτησεν ἀκριβῶς ὡς οἱ σημερινοὶ ἐρευνῆται εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ ὀρισμοῦ τοῦ ασυμμέτρου*», λέγει ὁ Rey.

Ἄλλ' αὐτὸ εἶναι γενικὸν γνώρισμα τῆς Πλατωνικῆς σκέψεως.

Εἰς τὴν γνώμην τοῦ Rey ἠμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ μία ἐκ πρώτης ὄψεως σοβαρὰ ἀντίρρησης, τὸ ὅτι ὁ Πλάτων ἀναφέρει μόνον τὸν Ἔνα καὶ τὸν Ἄνο ὡς ἰδεατοὺς ἀριθμοὺς. Ἡ ἀντίρρησης αὕτη ἐξασθενεῖ ὅμως, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἂν καὶ ἐγνώριζον οἱ σύγχρονοι τοῦ Πλάτωνος πολλοὺς ασυμμέτρους, ἐπέμενον ἰδιαίτερος ἐπὶ τῆς  $\frac{1}{2}$  καὶ τῆς  $\frac{1}{3}$ .

Μοῦ φαίνεται τόσον ὠραία ἡ ἐρμηνεία αὐτῆ τοῦ Rey, ὥστε νὰ θέλω νὰ πιστεύω ὅτι εἶναι καὶ ἡ ὀρθή. Ἄς μὴ λησμονῶμεν ὅμως ὅτι τὰ βάρη τῆς Πλατωνικῆς σκέψεως δὲν ἐξαντλοῦνται ἀπὸ τὰς ἐρμηνείας μιᾶς ἐποχῆς.

Ἡ ἐπὶ τοῦ θέματος τῶν ασυμμέτρων ἐπιμονὴ τοῦ Πλάτωνος φαίνεται καθαρὰ καὶ εἰς τὸν «Θεαίτητον» ὅπου θεωρεῖ ὡς ασυμμέτρους ἀριθμοὺς ὄχι πλέον ὀρισμένους, πεπερασμένους πλήθους ἀριθμούς, ἀλλ' ὅλας γενικῶς τὰς τετραγωνικάς ρίζας τῶν μὴ τελείων τετραγώνων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Εἶναι ἐν τούτοις πολὺ μεγαλυτέρας σημασίας ὁ εἰς τὸν Πλάτωνα ὑπὸ τοῦ Rey ἀποδιδόμενος ὀρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ὀρίου ἀθροίσματος τῶν ὄρων συγκλινούσης ἀριθμητικῆς σειρᾶς, διότι τοιαῦτα ὄρια εἶναι καὶ οἱ ὑπερβατικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ Liouville, τοιοῦτον ὄριον εἶναι καὶ ὁ ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς  $e$ , ὡς τοιοῦτον ὄριον δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὁ ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς  $\Pi$ . Εἶναι ἡ συγκλίνουσα σειρά ἰσχυρότατον μέσον διὰ τὸν ὀρισμὸν ὀρισμένων ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν. Τονίζομεν δὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ὀρισμοῦ εἰδικῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς ἀποδείξεως, γενικῶς, τῆς ὑπάρξεως ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν, διότι αὐτὴν τὴν τελευταίαν τὴν ἐξάγουν ἀμέσως ὡς ἐξῆς· ἀποδεικνύεται ἀφ' ἐνὸς μὲν ὅτι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (συμπεπληρωμένων τῶν ρητῶν μὲ τοὺς ασυμμέτρους ὀρισμένους ὡς τομὰς Dedekind) δὲν εἶναι ἀριθμήσιμον καὶ ἐξ ἄλλου ὅτι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ρίζαι ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, — δηλαδὴ εἶναι μὴ ὑπερβατικοὶ — εἶναι ἀριθμήσιμον· ἄρα ὑπάρχουν κατ' ἀνάγκην ὑπερβατικοὶ ἀριθμοί, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων προσδίδει ἀκριβῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν τὸ μὴ ἀριθμήσιμον αὐτοῦ. (Ἐὰν ἐδῶ ἠκολουθοῦμεν τὴν ἀρχὴν τῆς πλειοψηφίας γενικευμένην, ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ

κάμωμεν με ἀπειρίας ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς τάξεως ἀπειρίας, ἀριθμήσιμος συνεχής. . . . θὰ ἐλέγομεν ὅτι ὁ ὑπερβατικός ἀριθμὸς εἶναι ὁ συνήθης καὶ ὁ ρητὸς ὁ ἀσυνήθης).

Ἡ ἐπιμονὴ τοῦ Πλάτωνος ἐπὶ τῆς ἀνάγκης δημιουργίας ἀριθμητικοῦ συστήματος περιέχοντος καὶ τοὺς ἀσυμμέτρους δὲν εἶχεν ἴσως ἀνάλογον συνέχειαν εἰς τὴν ἐποχὴν τῆς. Ἄλλ' εὐρέθησαν, καθὼς ἤδη εἴπομεν, οἱ Ἀριθμητισταὶ καὶ οἱ Συνολισταὶ τοῦ 19ου καὶ τοῦ 20ου αἰῶνος, οἱ ὅποιοι συνέχισαν τὸ ἔργον τοῦ Ἀραζητητοῦ Πλάτωνος (θὰ ἐπροτιμοῦσα αὐτὸν τὸν τίτλον διὰ τὸν Πλάτωνα ἀπὸ τὸν τοῦ *Μιδασκάλου*). Καὶ ἐπὶ τοῦ ἔργου αὐτῶν ἐβασίσθη ὁ πλήρης διαχωρισμὸς τῆς ἐννοίας τῆς μαθηματικῆς συνεχείας ἀπὸ τὴν φυσικὴν συνέχειαν. Καὶ ἄς μὴ νομίσωμεν ὅτι ἐφθάσαμεν εἰς τὸ τέλος. Τὰ μεγάλα κέρδη τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἀπὸ τὸν διαχωρισμὸν αὐτὸν θ' ἀποκτηθοῦν, ὅταν οἱ μαθηματικοὶ συνηθίσουν ὄχι μόνον νὰ ἐκφράζωνται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μαθηματικῆς συνεχείας, ἀλλὰ καὶ νὰ σκέπτονται ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς, ἐλεύθεροι ἀπὸ τὴν ἐποπτεΐαν.

Πέρουσιν ὠμιλήσαμεν διὰ τὴν συστηματικὴν ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου ἀποδείξεως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπρόκειτο ν' ἀποτελέσουν τὸν πυρῆνα τῆς Εὐκλείδειου γεωμετρίας. Ἀνεφέραμεν ἀκόμη ὅτι ὁ Πλάτων προσέθεσε τὴν σύνθεσιν εἰς τὴν ἀνάλυσιν, ὥστε νὰ ἐξασφαλίσῃ τὸ ἀντιστρεπτὸν τῶν συλλογισμῶν. Ἐπίσης ὅτι ὑπῆρξεν ὁ κατ' ἐξοχὴν μελετητὴς καὶ χειριστὴς τῶν γεωμετρικῶν τόπων (εἰς τὰς ἀρχαίας Ἀθήνας). Ἀποτελοῦν καὶ αὐτὰ παραπλεύρως εἰς τὸ ἔργον του διὰ τὸν ὄρισμὸν τοῦ ἀσυμμέτρου καὶ γενικῶς τοῦ ἀριθμοῦ τεκμήριον τῶν ἐπιστημονικῶν διαφερόντων του, τὰ ὁποῖα πάλιν ἀποτελοῦν κριτήριον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐπιστημονικῶν ἀνησυχιῶν του. Διὰ τὸν Πλάτωνα ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ἡ περίφημος ἔκφρασις τοῦ Henri Poincaré «οἱ Ἕλληνες, οἱ μεγαλύτεροι καλλιτέχναι πὸν ὑπῆρξαν ποτέ...» (ὅπου «καλλιτέχναι» ἐννοεῖ ὁ Poincaré τοὺς δημιουργοὺς τῆς Ἐπιστήμης, ἐκείνους οἱ ὅποιοι αἰσθάνονται τὴν μυστικὴν ὠραιότητα τῶν μαθηματικῶν μορφῶν καὶ μεθόδων, τὴν ἐσωτερικὴν ὑφὴν τῶν μαθηματικῶν, ἐκείνους διὰ τοὺς ὁποίους ἡ διάνοια ἔχει γίνεῃ τετάρτη αἴσθησις, πρώτη θὰ ἔλεγα καλύτερα).

Οἱ Ἕλληνες εἶχον τὴν δύναμιν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν ἐντελῶς εἰδικῶν προβλημάτων νὰ ρίπτουν ἐντελῶς γενικὰς ιδέας, νὰ δημιουργοῦν γενικὰς μεθόδους. Ἀρκοῦσεν εἰς τὸ καταπληκτικὸν αἰσθητήριόν των τὸ εἰδικὸν παράδειγμα διὰ νὰ ἀντιληφθοῦν τὴν οὐσίαν τοῦ γενικοῦ προβλήματος. Δι' αὐτὸ αἱ ιδέαι των ἐπέζησαν αὐτῶν.

Πρέπει ὅμως νὰ τονισθῇ ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ὀρθὴ συμφώνως μετὰ τὰς ἀντιλήψεις τοῦ 20ου αἰῶνος ἀντίληψις τῆς σημασίας τῶν ὑποθέσεων, αἱ ὁποῖαι



κρύπτονται ὀπισθεν τοῦ ἀξιωματικοῦ οἰκοδομήματος τῶν μαθηματικῶν δὲν ἀποτελεῖ πῆδημα τῆς σκέψεως διὰ μέσου τῶν αἰῶνων, ἀλλὰ διὰ μέσου τῶν *χιλιετηρίδων*. Εἶναι *ἀσύλληπτον*.

Θὰ ἤθελα ὅμως πρὶν τελειώσω νὰ ἐπανέλθω εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Ἰδεῶν, ἐκεῖ ὅπου τονίζεται ὅτι εἰς τὴν Φύσιν δὲν βλέπομεν παρὰ *μετασχηματισμοὺς* τῶν ἀναλλοιώτων μορφῶν τοῦ νοητοῦ κόσμου. Ἀναγνωρίζεται σήμερον ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀποτελεῖ *βασικὴν* ἔννοιαν διὰ τὴν Ἐπιστήμην. Αὕτη προοδεύει τότε, ὅταν κατορθοῦται νὰ μεταβαίνωμεν ἀπὸ μιᾶς μορφῆς εἰς μίαν ἄλλην, θεωρουμένην προηγουμένως τελειῶς διάφορον τῆς πρώτης, δι' ἑνὸς καταλλήλου μετασχηματισμοῦ. Βλέπομεν λοιπὸν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Ἰδεῶν μεγάλης τελειότητος φιλοσοφικὴν θεωρίαν μετασχηματισμῶν.

Ὁ Πλάτων, καθὼς βλέπομεν, ἐφιλοσοφοῦσεν ὡς μαθηματικός, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰ μαθηματικά του παρέμενε φιλόσοφος. Ἀπ' ἐδῶ ὁρμώμενος θὰ ἠδύνατό τις νὰ εἶπῃ ὅτι διησθάνετο ὁ Πλάτων, ὅτι τότε θὰ ἐπροχώρουν πολὺ εἰς βάθος τὰ μαθηματικά, ὅταν εἴτε οἱ μαθηματικοὶ ἐφιλοσόφουν, εἴτε οἱ φιλόσοφοι ἐγίνοντο συγχρόνως καὶ μαθηματικοί. ἀκριβῶς καθὼς ὁ ἴδιος εἶχεν εἶπει ὅτι τότε θὰ εὐτυχῆσῃ ὁ κόσμος, ὅταν εἴτε οἱ βασιλεῖς φιλοσοφήσουν ἢ οἱ φιλόσοφοι γίνοντο βασιλεῖς. Τὴν διαίσθησιν αὐτὴν τοῦ Πλάτωνος δὲν διέψευσαν κατὰ τὴν Ἀναγέννησιν οὔτε ὁ René Descartes, οὔτε ὁ Leibnitz, οὔτε ὁ Pascal, οὔτε ὁ Newton. Εἰς δὲ τὴν νεωτέραν σκέψιν ἔγινε κανὼν.

Ἄς μὴ λημονῶμεν ὅτι ὁ Πλάτων ζητεῖ *δεκαετείς* σπουδὰς τῶν μελλόντων ἡγετῶν εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά πρὶν ἢ εἰσελθοῦν εἰς τὴν διαλεκτικὴν· διότι διέβλεπεν ὅτι ἡ ἐλευθερία τοῦ λόγου ἀξιοποιεῖται τότε, ὅταν ὁ ἄνθρωπος ἔχῃ ἀποκτήσει ἐλευθερίαν τῆς σκέψεως, τὴν ὁποίαν πάλιν δίδει μόνον ἡ συνεχῆς *ἀνύψωσις* τῆς διανοίας. Ὁ ἐκλεκτισμὸς καὶ τὰ οἰκοδομήματα παραλλήλων σκέψεων δὲν ὠφελοῦν πολὺ. Ἀπαιτεῖται ἀδιάκοπος οἰκοδόμησις *διατεταγμένων* σκέψεων ὁλονὲν καὶ γενικωτέρων, καὶ βαθυτέρων, διαρκῆς ἀνάτασις, ἀδιάκοπος ἀποτίναξις τῶν ἐκ τῆς συνηθείας φραγμῶν τῆς ἐπιστημονικῆς σκέψεως.

Ἐὰν εἰς πολλοὺς αὐτὰ φαίνωνται σήμερον «θεωρητικαὶ σκέψεις»· αὐτὸ σημαίνει ἀπλῶς ὅτι τὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνος προβαδίζει κατὰ πολλὰς ἑκατοντάδας — χιλιάδας ἴσως — ἑτῶν τοῦ πνεύματος τῶν σημερινῶν κοινωνιῶν. Ἀλλὰ θὰ ἔλθῃ κατ' ἀνάγκην μὲ τὴν ἐξέλιξιν τῆς σκέψεως κάποτε ἡ ἡμέρα, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἐπικρατήσουν αἱ ἐκπαιδευτικαὶ ἰδέαι τοῦ Πλάτωνος. Καὶ ἡ πνευματικὴ αὐτὴ ἀνάτασις θὰ εἶναι ἡ προετοιμασία διὰ τὴν ψυχικὴν ἀνάτασιν ποὺ ἐζήτησεν ὁ Χριστός. Διότι καὶ ὁ ρόλος τῆς διδασκαλίας Σωκράτους-Πλάτωνος, προετοιμασία τῆς Εὐαγγελικῆς Ἐπαναστάσεως ὑπῆρξεν.



Κάποτε θ' αντιληφθῆ ἡ ἀνθρωπότης ὅτι ὁ βαθύτερος «πνευματικός ρεαλισμός» εἶναι ὁ τοῦ Πλάτωνος ἀκριβῶς, καθὼς ὁ βαθύτερος «ψυχικός ρεαλισμός» εἶναι ὁ τοῦ Εὐαγγελίου. Καὶ θὰ συνδέση ἀναποσπástως αὐτοὺς τοὺς δύο, ὅπως ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος συνεδέθησαν ἀναποσπástως εἰς τὸ χοροχρονικὸν continuum. Καὶ τότε θὰ εὐτυχήσῃ ἡ ἀνθρωπότης, διότι καὶ οἱ βασιλεῖς θὰ φιλοσοφοῦν καὶ οἱ φιλόσοφοι θὰ βασιλεύουν.

Ἐὰν ἤμην ρήτωρ θὰ ἐτελείωνα τὴν ὁμιλίαν μου εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον. Ἄλλ' ἐπειδὴ εἶμαι μόνον μαθηματικός, προτιμῶ νὰ τελειώσω μὲ τὴν ἀπάντησιν τὴν ὁποίαν ἔδωκεν ὁ Πλάτων, ὅταν τὸν ἠρώτησαν, κατὰ τί διαφέρει ὁ ἄνθρωπος ἀπὸ τὸ ζῷον; «Διότι γνωρίζει ν' ἀριθμῆ» εἶπεν ὁ Πλάτων.