ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Sur une propriété de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement de Laguèrre,** *par Th. Varopoulos**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου.

Je me propose de traiter un problème qui m'a été suggeré par un travail de M. G. Xyroudakis qui va être publié au Bulletin de la Société Mathématique de Grèce; à savoir

1. Posons

$$\sin A + \sin B + \sin C = \lambda$$
$$\cos A + \cos B + \cos C = \mu, \qquad A + B + C = \pi$$

A, B, C, étant les angles d'un triangle; on a

$$\begin{cases} 0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \leqslant \mu \leqslant \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Soit (D) *le rectangle de côtés* λ *et* μ; il se pose la question: «*Le point* $P(\mu, \lambda)$ *remplit-il tout le rectangle?*»

Donnons-nous μ et λ; on a:

$$2 \sin \frac{A+B}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right] = \lambda$$
$$2 \cos \frac{A+B}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right] = \mu - 1\ ;$$

et, en éliminant $\cos \frac{A-B}{2}$ et posant $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = u$,

(1) $$\lambda - (\mu - 1)\,\mathrm{tg}\,u = 2 \sin 2u$$

ou, en posant $\mathrm{tg}\,u = t$,

(2) $$(\mu - 1)\,t^3 - \lambda t^2 + (\mu + 3)\,t - \lambda = 0$$

Cette équation admet comme racines $\cot \frac{A}{2}$, $\cot \frac{B}{2}$, $\cot \frac{C}{2}$, qui sont *reelles* et *positives*.

Le premier membre de (2) doit avoir 3 *variations,* ce qui entraîne

$$\mu \geqslant 1, \quad \lambda \geqslant 0$$

Réciproquement, si (2) admet trois racines réelles et positives, *le triangle existe,* et λ, μ *conviennent.*

En effet, on en déduit les valeurs $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et les relations entre les coefficients et les racines donnent:

* ΘΕΟΔ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ, Περί τινος ἰδιότητος τῆς ὑποκυκλοειδοῦς τριῶν σημείων ἀναχάμψεως τοῦ Laguèrre.

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ou

$$\cot\frac{A+B+C}{2}=0,\qquad A+B+C=\pi$$

2. *Tout revient à exprimer que* (2) *a ses racines réelles.*

Remplaçons μ et λ par x et y; l'équation

$$(2')\qquad (x-1)t^3-y(t^2+1)+(x+3)t=0$$

represente une droite.

L'équation (2) exprime que cette droite passe par $P(\mu,\lambda)$.

Il y a trois droites passant par P, donc l'enveloppe (H) de la famille de droites dependant du paramètre t est une courbe de troisième classe

La pente de la droite est t, donc les trois droites font, avec l'axe des x, les angles:

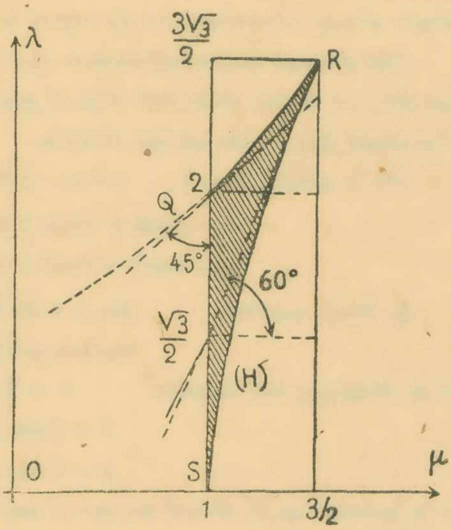
$$\frac{\pi-A}{2},\quad\frac{\pi-B}{2},\quad\frac{\pi-C}{2}$$

dont la somme est constante et égale à π. Cette propriété *caractérise l'hypocycloïde à trois points de rebroussements*[1] *de Laguèrre.*

On place aisement cette courbe en donnant à u des valeurs particulières

$$0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \infty$$

ce qui donne la figure.



Q (1, 2)

R $3/2,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$

S (1, 0)

Pour qu'on puisse mener trois tangentes à la courbe (H) *il faut et il suffit que* P *soit dans la région hachurée, ce qui exige*

$$\lambda\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad \mu\leqslant\frac{3}{2}$$

La figure répond à la question posée, et *à d'autres de même nature, limites de* λ/μ, *de* $\lambda+\mu$ *etc.*

3. Remarque — On obtient aisement l'équation de H en cherchant l'enveloppe de la droite (2′) ou

---

[1] Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de retroussements (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1899, et Œuvres de Laguèrre, t. II, 1905).

$$y-(x-1)\,\mathrm{tg}u=2\sin 2u$$

En adjoignant à cette équation, la derivée par rapport à u

$$-(x-1)=4\cos 2u\cos^2 u$$

et en resolvant en x et y, on a

$$\begin{cases} x=-2\cos 2u-\cos 4u \\ y=\ \ 2\sin 2u-\sin 4u \end{cases}$$

ou, en remplaçant 2u par $\pi-v$

$$(H)\ \begin{cases} x=2\cos v-\cos 2v \\ y=2\sin v+\sin 2v \end{cases}$$

courbe *décrite par un pointe d'une circonference de rayon* 1 *roulant à l'interieure d'une circonférence de rayon* 3.

On obtient immediatement ces équations, sans calculs, en remarquant que (H) *est le lieu de points* $P(\mu, \lambda)$ *pour lesquels le triangle est isocèle*, puisque l'équation (2) a une racine double.

On a alors: $B=A$, $c=\pi-2A$ et

$$\begin{cases} \lambda=\sin A+\sin B+\sin C=2\sin A+\sin 2A \\ \mu=\cos A+\cos B+\cos C=2\cos A-\cos 2A \end{cases}$$

4. Soit, encore, $\sin A+\sin B+\sin C=\lambda$

$$\cos A+\cos B+\cos C=\mu$$

Si le triangle est isocèle $A=B=u$, $C=\pi-2u$ et

$$\lambda=2\sin u+\sin 2u$$
$$\mu=2\cos u-\cos 2u$$

et le point $P(\mu, \lambda)$ *décrit un arc d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement* (H) $(0\leqslant u\leqslant\pi)$

Si l'on fixe C, on a

$$\lambda=2\cos\frac{C}{2}\,p+\sin C \qquad p=\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\mu=2\sin\frac{C}{2}\,p+\cos C \qquad \sin\frac{C}{2}\leqslant p\leqslant 1$$

Le point $P(\mu, \lambda)$ *décrit un segment de droite qui est tangente à* (H) *au point* $p=1$, $u=\frac{\pi-C}{2}$.

On vérifie que *ce segment balaie l'aire définie plus haut lorsque* C *varie entre* 0 *et* π.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἂν Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου, καὶ τεθῇ

$$\lambda=\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma, \qquad \mu=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

τότε εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ σημεῖον (μ, λ) ὀφείλει νὰ εὑρίσκεται πάντοτε ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου (Δ)

$$1 \leqslant \mu \leqslant {}^3/_2$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

ἤτοι διὰ τρίγωνον (Τ) τυχὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Ρ τοῦ ὀρθογωνίου (Δ).

Τίθεται τὸ ζήτημα ἂν ἰσχύῃ τὸ ἀντίστροφον.

Δηλαδὴ ἂν τὸ σημεῖον Ρ(μ, λ) *καλύπτῃ ὅλον τὸ ὀρθογώνιον* (Δ). Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο *εἶναι ἀρνητική*, ἔχει δὲ σχέσιν μὲ τὴν ὑποκυκλοειδῆ τοῦ Laguèrre, τὴν ἔχουσαν 3 σημεῖα ἀνακάμψεως, καὶ ἥτις χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῆς ἰδιότητος ὅτι αἱ τρεῖς ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείου Ρ, σχηματίζουν μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x τρεῖς γωνίας *ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν.*

Ἡ ὑποκυκλοειδὴς τοῦ Laguèrre ἐπιτρέπει *νὰ καθορισθῇ τὸ μέρος τοῦ ὀρθογωνίου* (Δ), *ὅπερ καλύπτουν τὰ σημεῖα* Ρ(μ, λ).

Ἐὰν R *εἶναι τὸ ἓν σημεῖον ἀνακάμψεως, καὶ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον οὗτινος κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα*:

$$(1,0),\ ({}^3/_2,\ 0),\ \left(1,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ \left({}^3/_2,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \qquad (\Delta)$$

ἐπὶ πλέον, ἂν τοποθετηθῇ ἡ ὑποκυκλοειδὴς τοῦ Laguèrre *ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων :*

$$Q(1,2), \quad R\left({}^3/_2,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad S(1,0), \qquad (H)$$

τότε τὸ μέρος τοῦ ὀρθογωνίου (Δ) *τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ τῶν τόξων* $\widehat{QR}$, $\widehat{SR}$ *τῆς ὑποκυκλοειδοῦς εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον καλύπτεται ὑπὸ τοῦ σημείου* Ρ(μ, λ), *καὶ* ἀπαντᾷ εἰς τὸ τεθὲν ζήτημα.

Ἐάν, συνεπῶς, *τὸ* Ρ(μ, λ) *τοποθετηθῇ ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου* (Δ) *ἀλλὰ ἐκτὸς τοῦ ὡς ἄνω μέρους, τότε τὸ* (μ, λ) *δὲν ἀντιστοιχεῖ εἰς τρίγωνον*.

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΦΩΤΕΙΝΟΥ.—*Ἀναμετρήσεις καὶ σταδιασμοὶ τῶν ἀρχαίων.*

ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.— Αἱ λιπαντικαὶ ἀνάγκαι τῶν ἐδαφῶν τοῦ σίτου εἰς τὴν Ἑλλάδα, *ὑπὸ* ***Δημ. Σ. Κατακουζηνοῦ***· Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Β. Κριμπᾶ.

Διὰ νὰ καθορισθοῦν αἱ λιπαντικαὶ ἀνάγκαι τῶν καλλιεργουμένων διὰ σίτου ἐδαφῶν εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐγκατεστάθησαν κατὰ τὴν περίοδον 1930 - 1940 ὑπὸ τοῦ Κεντρικοῦ Ἐδαφολογικοῦ Ἐργαστηρίου ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τῶν κατὰ τόπους γεωργικῶν ἀρχῶν 424 πειράματα λιπάνσεως κατὰ τὸ κλασσικὸν σύστημα τοῦ Wagner [1]

---

[1] ROEMER, Der Feldversuch; Arbeiten der D. L. G. 1930.—PFEIFFER, Der Exakte Vegetationsversuch 1918.