ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΚΗ.— **«Περὶ τοῦ μαθηματικοῦ νόμου μεταβολῆς τῶν ῥοπῶν διορθώσεως ἐν τῇ στατικῇ μεθόδῳ Cross»**, *ὑπὸ* ***Ἀχιλλ. Σιμοπούλου*****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

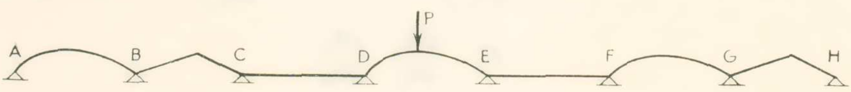
Ἡ ἀπὸ τοῦ ἔτους 1932 γνωστὴ «νέα στατικὴ μέθοδος Cross», ἥτις ἐγενικεύθη σήμερον κατὰ τὴν στατικὴν διερεύνησιν τῶν ὑπερστατικῶν φορέων, προϋποθέτει κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ὑπολογισμοῦ ὅτι ἅπαντες οἱ κόμβοι τοῦ φορέως εἶναι πλήρως πεπακτωμένοι. Ἡ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην λαμβανομένη ἐντατικὴ κατάστασις, τῶν εἰς τοὺς κόμβους πεπακτωμένων ῥάβδων διορθοῦται ἐν συνεχείᾳ διὰ διαδοχικῶν καὶ ἀλλεπαλλήλων ἀποκαθηλώσεων ἑνὸς ἑκάστου τῶν κόμβων τοῦ φορέως, τῶν ὑπολοίπων ὑποτιθεμένων πλήρως πεπακτωμένων.

Κατὰ τὰς διορθώσεις ταύτας ἐμφανίζονται εἰς τὰ ἄκρα τῶν ῥάβδων σειραὶ ῥοπῶν. Περὶ τῶν ῥοπῶν τούτων γνωρίζομεν μὲν ὅτι μεταβάλλονται συνεχῶς ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ δὲν γνωρίζομεν τὸν νόμον, ὅνπερ ἀκολουθεῖ ἡ μεταβολὴ αὐτῶν.

Ἡ παροῦσα ἀνακοίνωσις ἀφορᾷ εἰς τὴν ἐπὶ τοῦ νόμου τῆς μεταβολῆς τῶν ἐν λόγῳ ῥοπῶν διεξαχθεῖσαν ἔρευναν δι' ἧς ἀποδεικνύεται ἰσχύων ὁ διὰ τοῦ ὡς ἕπεται θεωρήματος διατυπούμενος γενικὸς νόμος. *«Ἐν τῇ μεθόδῳ Cross ἡ μεταβολὴ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῶν ῥάβδων ἐμφανιζομένων ῥοπῶν διορθώσεως ἀκολουθεῖ νόμον φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἧς ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν μεταβιβάσεως καὶ εἰδικῆς διανομῆς τῆς φορτιζομένης ῥάβδου».*

Ἀπόδειξις.

Θεωρήσωμεν στατικὸν σύστημα πολλῶν ῥάβδων (σχ. 1) οὗ ζητοῦνται αἱ ῥοπαὶ στηρίξεως M_L, M_R τυχούσης φορτιζομένης ῥάβδου LR αὐτοῦ. Συμβολίζοντες:



Σχῆμα 1.

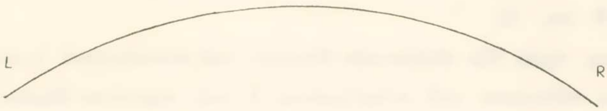
υ_{Lm}, υ_{Rm}: Τοὺς εἰδικοὺς συντελεστὰς διανομῆς τῶν ἄκρων τῆς ῥάβδου LR, ὧν αἱ τιμαὶ εἶναι τοιαῦται, ὥστε κατὰ τὴν διανομὴν μιᾶς ῥοπῆς εἰς τὰ ἄκρα L,R νὰ ὑπεισέρχεται αὐτομάτως καὶ ἡ ἐπιρροὴ ἁπασῶν τῶν πρὸς τὰ $\frac{\text{ἀριστερὰ}}{\text{δεξιὰ}}$ τοῦ $\frac{L}{R}$ συνεπείᾳ τῆς συνεχείας ἀναπτυσσομένων ῥοπῶν στηρίξεως.

γ_L^R, γ_R^L: Τοὺς κλασικοὺς συντελεστὰς μεταβιβάσεως.

* **ACHILL. SIMOPOULOS, Mathematisches Gesetz der Konvergenz bei dem statischen Cross'schen Verfahren.**

m_L, m_R : Τὰς συνεπείᾳ τῆς φορτίσεως τῆς ράβδου ἀναπτυσσομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ροπὰς πακτώσεως.

Καὶ συντάσσοντες τὸ διάγραμμα Cross κατὰ τὰ γνωστὰ (Σχ. 2) θὰ προκύψωσι μετὰ τὴν ἄθροισιν τῶν ὅρων ἑκάστης στήλης αἱ ροπαί:



$$
\begin{array}{lccr}
 & m_L & & m_R \\
- & \upsilon_{Lm} m_L & \longrightarrow & -\ \gamma_L^R \upsilon_{Lm} m_L \\
- & \gamma_R^L \upsilon_{Rm} R & \longleftarrow & +\ \upsilon_{Rm} R \\
+ & \upsilon_{Lm} \gamma_R^L \upsilon_{Rm} R & \longrightarrow & +\ \Pi_{LRm} R \\
- & \gamma_R^L \upsilon_{Rm} \Pi_{LRm} R & \longleftarrow & -\ \upsilon_{Rm} \Pi_{LRm} R \\
+ & \upsilon_{Lm} \gamma_R^L \upsilon_{Rm} \Pi_{LRm} R & \longrightarrow & +\ \Pi^2_{LRm} R \\
 & & & -\ \upsilon_{Rm} \Pi^2_{LRm} R \\
\hline
 & M_L^r = & & M_R^l =
\end{array}
$$

Σχῆμα 2.

$$M_L^r = \left(1 - \upsilon_{Lm}\right)\left(m_L - \gamma_R^L \upsilon_{Rm} m_R\right)\left[1 + \Pi_{LRm} + \Pi^2_{LRm} + \ldots + \Pi^{\nu}_{LRm}\right]$$

$$M_R^l = \left(1 - \upsilon_{Rm}\right)\left(m_R - \gamma_L^R \upsilon_{Lm} m_L\right)\left[\text{»} + \text{»} + \text{»} + \ldots + \text{»}\right]$$

Ἀλλὰ εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς ταύτας ἐκφράσεις τὸ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἄθροισμα εἶναι προφανῶς γεωμετρικὴ πρόοδος λόγου: $\Pi_{LRm} = \gamma_L^R \upsilon_{Lm} \gamma_R^L \upsilon_{Rm}$.
Εἶναι δὲ $\Pi_{LRm} < 1$ καθόσον:

$$\gamma_L^R \leq 1,\ \gamma_R^L \leq 1.\ \ \upsilon_{Lm} < 1,\ \upsilon_{Rm} < 1.$$

Συνεπῶς αὕτη παριστᾶ πεπερασμένον ἀριθμὸν καὶ ἴσον πρός: $1/(1 - \Pi_{LRm})$ συναρτήσει τοῦ ὁποίου αἱ ζητούμεναι ροπαὶ στηρίξεως λαμβάνουσι τὰς τιμάς:

$$
\left.
\begin{aligned}
M_L^r &= \left(1 - \upsilon_{Lm}\right) \frac{\left(m_L - \gamma_R^L \upsilon_{Rm} m_R\right)}{\left(1 - \Pi_{LRm}\right)} \\
M_L^l &= \left(1 - \upsilon_{Rm}\right) \frac{\left(m_R - \gamma_L^R \upsilon_{Lm} m_L\right)}{\left(1 - \Pi_{LRm}\right)}
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$

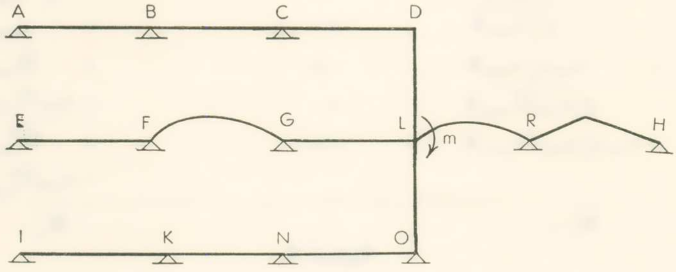
Οἱ τύποι οὗτοι ὡς ἀνεξάρτητοι τῆς θέσεως τῆς ράβδου LR, τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ νόμου μεταβολῆς τῶν διατομῶν αὐτῆς δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσι πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν ροπῶν στηρίξεως οἱουδήποτε κατὰ ράβδον φορτιζομένου φορέως, ἀρκεῖ νὰ εἶναι γνωστά, αἱ ἀρχικαὶ ροπαὶ πακτώσεως, οἱ συντελεσταὶ μεταβιβάσεως καὶ οἱ εἰδικοὶ συντελεσταὶ διανομῆς, υ_{Lm}, υ_{Rm} τῶν ἄκρων τῆς φορτιζομένης ράβδου.

Περὶ τοῦ εἰδικοῦ συντελεστοῦ διανομῆς.

Ἡ τιμὴ τοῦ εἰδικοῦ συντελεστοῦ διανομῆς δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εὐκόλως βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ εἰδικοῦ συντελεστοῦ διανομῆς τοῦ ἄκρου L τῆς ράβδου LR (σχ. 3).

Συμφώνως πρὸς τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν τοῦ συντελεστοῦ διανομῆς οὗτος θὰ ὑπολογισθῇ διὰ πάκτωσιν τοῦ στηρίγματος R καὶ στρεπτὴν ἕδρασιν ἁπάντων τῶν ἀριστερᾷ τούτου στηριγμάτων.



Σχῆμα 3.

Ἐφαρμόζοντες ροπὴν m (Σχ. 3) εἰς τὸν κόμβον L καὶ συντάσσοντες τὸ διάγραμμα Cross, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι οἱ εἰδικοὶ συντελεσταὶ διανομῆς τῶν ἀριστερᾷ τοῦ L κόμβων εἶναι γνωστοί, λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τῆς εἰς τὸ ἄκρον L ἀναπτυσσομένης ροπῆς:

$$M_L = m\left(1 - \frac{\upsilon_L^r}{1-(\Pi_{DLm}+\Pi_{GLm}+\Pi_{OLm})}\right)$$

Ἀλλ' ὁ ἐν τῇ σχέσει ταύτῃ ἀφαιρετέος ἐκφράζει τὸν ζητούμενον εἰδικὸν συντελεστὴν διανομῆς ἤτοι:

$$\upsilon_{Lm} = \frac{\upsilon_L^r}{1-(\Pi_{DLm}+\Pi_{GLm}+\Pi_{OLm})} \tag{2}$$

Ἔνθα: $\Pi_{DLm} = \upsilon_{Dm}\gamma_L^D \upsilon_L^o \gamma_D^L$, $\Pi_{GLm} = \upsilon_{Gm}\gamma_L^G \upsilon_L^l \gamma_G^L$, $\Pi_{OLm} = \upsilon_{Om}^o \gamma_L^o \upsilon_L^u \gamma_O^L$.—

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰ γινόμενα Π τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτοῖς περιεχομένων εἰδικῶν συντελεστῶν διανομῆς θὰ λάβωμεν:

$$\Pi_{DLm} = \frac{\Pi_{DL}}{1-\Pi_{DCm}}, \quad \Pi_{GLm} = \frac{\Pi_{GL}}{1-\Pi_{FG}}, \quad \Pi_{OLm} = \frac{\Pi_{OL}}{1-\Pi_{NOm}}$$

Ἐπίσης:

$$\Pi_{DCm} = \frac{\Pi_{DC}}{1-\Pi_{BC}}, \quad \Pi_{NOm} = \frac{\Pi_{NO}}{1-\Pi_{KN}}$$

Ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς ἑνὸς ἑκάστου εἰδικοῦ συντελεστοῦ διανομῆς (υ_m) ἀνάγεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τοιούτου τοῦ προηγουμένου κόμβου.

Συνεπῶς διὰ προοδευτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (2) ἀπὸ τῆς ἀρχῆς εἰς τὸ τέλος τοῦ φορέως δύνανται νὰ ὑπολογισθῶσιν οἱ εἰδικοὶ συντελεσταὶ διανομῆς (υ_m) τῶν πρὸς τὰ δεξιᾷ τῶν κόμβων ἄκρων τῶν ἀνοιγμάτων, ἀντιθέτως δὲ τῶν πρὸς τὰ ἀριστερᾷ ἄκρων.

Οὕτως ἰσχύει ὁ ὡς ἕπεται γενικὸς τύπος:

$$\upsilon_{Lm} = \frac{\upsilon^r_L}{\left(1 - \sum \frac{\Pi_{Li}}{1 - \frac{\Pi_{Li}}{1 - \dots}}\right)}$$

(i: κόμβοι ἀριστερᾷ τοῦ L)

ὑπολογισμοῦ τῶν εἰδικῶν συντελεστῶν διανομῆς.

ZUSAMMENFASSUNG

Das seit 1932 in technischen Schriftum bekannt gewordene Cross'schen Verfahren das sich in der Statik der statisch unbestimmten Systemen rasch eingebürgert hat, setzt zunächst alle Knotenpunkte als vollkommen festgehalten voraus. Das so entstehende Momentenbild der belasteten, an den Knoten eingespannten Felder wird dann dadurch verbessert, dass immer nur ein Knoten losgelassen wird, während alle übrigen festgehalten bleiben.

Dieses Vorgehen hat zur Folge auf der Ermittlung einer Reihe von Teilmomenten, deren Summe das wirkliche Moment ergeben. Damit die Summe aus den Teilmomenten wirklich das richtige Moment ergibt ist es notwendig, dass die sich ergebende Reihe aus den Einzelkorrektursmomente konvergiert.

Die vorliegende mathematische Untersuchung, führte zur folgenden Lehrsatz:

"Die Korrektursmomente bei dem Cross'schen Verfahren stellen die Glieder einer geometrischen fallenden Reihe dar derer Quotient eine Funktion der Übertragungs-und speziellen Verteilungsfaktoren ist„.

Nehmen wir ein statisches System (Abb. 1) dessen Stab LR belastet ist. Nennt man:

v_{Lm}, v_{Rm}: Die spezielle Verteilungskoeffizienten.

γ^R_L, γ_R : Die Übertragungskoeffizienten des Stabes LR.

m_L, m_R : Die «volle Einspannmomente» infolge der Belastung des Stabes LR. (Bild 2 Zeile 1).

nach der ganze Ausgleich ergeben sich:

$$M_L^v = (1 - v_{Lm})(m_L - \gamma_R^L v_{Rm} m_R)\left[1 + \Pi_{LRm} + \Pi_{LRm}^2 + \ldots + \Pi_{LRm}^v\right]$$

$$M_R^2 = (1 - v_{Rm})(m_R - v_{Lm}\gamma_L^R m_L)\left[\text{»} + \text{»} + \text{»} + \ldots + \text{»}\right]$$

Es ist ersichtlich dass sich diese Gleichungen fallende geometrische Reihen immer darstellen da:

$$\Pi_{LRm} = v_{Lm}\gamma_L^R v_{Rm}\gamma_R^L < 1$$

Es wird damit für $n \to \infty$.

$$M_L^r = (1 - v_{Lm})\frac{(m_L - \gamma_R^L v_{Rm} m_R)}{(1 - \Pi_{LRm})}, \quad M_R^l = (1 - v_{Rm})\frac{(m_R - \gamma_L^R v_{Lm} m_L)}{(1 - \Pi_{LRm})} \qquad (1)$$

Gemäss den obigen Formeln können wir, nach vorherigen Bestimmung der v_{Lm}, v_{Rm}, γ_L^R, γ_R^L und m_L, m_R, die Stutzmomente irgendwelchen stabweise belasteten statischen Systemes zu berechnen.

Der spezielle Verteilungskoeffizient.

Die Werte der speziellen Verteilungskoeffizienten kann man leicht, auf Grund der obigen Lehrsatz zu berechnen.

Lässt man an den Knoten L ein Moment m wirken, und setzt man auch voraus, dass die speziellen Verteilungsfaktoren der nachbarknoten D, G und O bekannt sind, bekommt man nach der ganze Ausgleich;

$$M_L = m\left(1 - \frac{v_L^r}{1 - \Pi_{LRm}}\right) \qquad (2)$$

Es ist ersichtlich, dass das Bruch in diesem geschlossenen analytischen Ausdruck den Wert des speziellen Verteilungskoeffizientes darstellt.

Aus dem analytischen Ausdruck des Producktes Π geht hervor dass die Formel (2) eine Rekursionsformel ist der lautet:

$$\upsilon_{Lm} = \frac{v_L^r}{\left(1 - \sum \frac{\Pi_{Li}}{1 - \frac{\Pi_{Ll}}{1 - \ldots}}\right)} \qquad (3)$$