ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — Ἐλεύθεραι πλευρικαὶ ταλαντώσεις ἁπλῆς ῥάβδου ὑπὸ πλαστικὴν ἐξαίτησιν, Μέρος II., ὑπὸ ***Δ. Γ. Μαγείρου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

Εἰς προηγουμένην ἀνακοίνωσιν [1] ἐδόθη καὶ ἐμελετήθη λύσις τοῦ συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[f(u'')\right]'' = c\ddot{u}, \\ u(o,t) = u(\pi,t) = u''(o,t) = u''(\pi,t) = o \\ u(x,o) = \varphi_1(x), \quad \dot{u}(x,o) = \varphi_2(x). \end{array}\right. \tag{1}$$

Ἡ λύσις εἶναι τῆς μορφῆς:

$$u(x,t) = \sum_{m=i}^{\infty} v_m(t) \cdot \sin mx, \tag{2}$$

ὅπου ἡ συνάρτησις $v_m(t)$ δίδεται ὑπὸ τύπου (13).

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν εἰδικεύονται τὰ εὑρεθέντα γενικὰ ἀποτελέσματα εἰς περίπτωσιν ἀνταποκρινομένην πρὸς τὰ φυσικὰ δεδομένα ἐξ ὧν τὸ σύστημα (1) προέκυψε. Λαμβάνεται:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha) & \varphi_1(x) = o, \\ \beta) & \varphi_2(x) = a_o \sin x, \\ \gamma) & M = f(u'') = M_o \sum_{r=i} (-1)^{r-1} \frac{\mu^r}{r!} (u'')^r, \end{array}\right. \tag{3}$$

ὅπου $r = 1,2,3,\ldots$ καὶ μ θετικὸν καὶ μὲ διαστάσεις μήκους.

Ἡ σειρὰ (3γ) συγκλίνει διὰ πᾶν u'' καὶ παριστᾷ καμπύλην μὲ ἀσύμπτωτον $M = M_o$ εἰς ἄξονας (M, u''). Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι παρομοία τῆς διδομένης πειραματικῶς εἰς τὴν «Πλαστικότητα».

Ἐδῶ ἔχομεν: $\quad P_r = (-1)^{r-1} \frac{M_o \mu^r}{r!}, \quad \overset{(o)}{v}_m(t) = a_o t.$

Ἡ συνάρτησις $\overset{(i)}{v}_m(t)$ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{(i)}{v}_m(t) = a_o t + \frac{1}{c}\frac{2}{\pi} M_o m^2 \sum_{r=1} (-1)^r \frac{\mu^r}{r!} \int_o^t dt \int_o^t \left[\sum_{n_1,\ldots n_r}^{1\ldots\infty} n^2_1 \ldots n^2_r \cdot \right. \\ \left. \overset{(i-1)}{v}_{n_1}(t) \ldots \overset{(i-1)}{v}_{n_r}(t) \cdot \int_o^\pi \sin n_1 x \ldots \sin n_r x \cdot \sin mx \, dx \right] dt, \\ i, m = 1,2,3,\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

---

* D. G. MAGIROS, **Lateral free vibrations of simple prismatic bar in plasticity.** Part II.

[1] Βλ. σελ. 16 κ. ἑξ. τοῦ παρόντος τόμου.

Εἰς τὴν (4) ὁ ὅρος $a_o t$ λαμβάνεται μόνον διὰ $m=1$, ἐφ' ὅσον ἐκ τῶν (3α), (3β), προκύπτει:

$$\gamma_m = o \ , \quad \delta_m = \begin{cases} \alpha_o \ , & \text{ἐὰν } m=1 \\ o \ , & \text{ἐὰν } m \neq 1. \end{cases}$$

Ἡ ὁμοιόμορφος σύγκλισις, ἡ μοναδικότης καὶ ἡ εὐστάθεια τῆς λύσεως δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν ἐνταῦθα, ἀλλὰ θὰ δοθῇ τύπος προσεγγίσεως τῆς λύσεως δι' εὑρέσεως τῆς πρώτης, δευτέρας καὶ καθεξῆς, προσεγγίσεως τῆς (4). Τῆς σειρᾶς (3,γ) λαμβάνοντες ἕνα, τὸν πρῶτον, ὅρον μόνον, θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς συναρτήσεως $\overset{(i)}{v}_m(t)$, θεωρουμένης ὡς ἀθροίσματος ὅρων. Λαμβάνοντες τῆς (3γ) τοὺς δύο πρώτους ὅρους, εὑρίσκομεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς $\overset{(i)}{v}_m(t)$, τοῦ πρώτου ὄντος ἤδη γνωστοῦ. Θὰ ὁμιλῶμεν οὕτω περὶ πρώτης προσεγγίσεως ἢ περὶ δευτέρας καὶ καθεξῆς, τῆς συναρτήσεως $\overset{(i)}{v}_m(t)$, ἀντιστοίχως δὲ καὶ τῆς λύσεως (2).

Πρώτη προσέγγισις.

Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς (3γ), $r=1$, εἶναι:

$$M = m_o \mu u'' , \tag{5}$$

ὁπότε ἔχομεν τὴν γραμμικὴν σχέσιν ῥοπῆς-καμπυλότητος, δηλαδὴ τὴν περίπτωσιν τῆς «Ἐλαστικότητος».

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\int_o^\pi \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ , & \text{ἐὰν } m = n \neq o \\ o \ , & \text{ἐὰν } m \neq n \, , \end{cases}$$

ἡ (4) γίνεται:

$$\overset{(i)}{v}_m(t) = -\frac{1}{c} \mu M_o m^4 \int_o^t dt \int_o^t \overset{(i-1)}{v}_m(t) \, dt , \qquad i, \ m = 1,2,3,\ldots , \tag{6}$$

παραλειπομένου τοῦ ὅρου $a_o t$, ὁ ὁποῖος ὅμως λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα.

Ἡ μέθοδος τῶν «διαδοχικῶν προσεγγίσεων», ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τῆς (6), ἐὰν ἀρχίζῃ ἀπὸ τοῦ $\overset{(o)}{v}_m(t) = a_o t$, διὰ τυχὸν σταθερὸν m, δίδει:

$$\overset{(i)}{v}_m(t) = (-1)^i a_o \left(\frac{1}{c} \mu M_o m^4 \right)^i \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} \qquad i = 1,2,3,\ldots , \tag{7}$$

καὶ ἡ λύσις (2) τοῦ συστήματος (1) εἰς τὴν πρώτην της προσέγγισιν εἶναι:

$$\bar{u}_1(x,t)=a_o\left[t\,\sin x+\sum_{i=0}\sum_{m=1}(-1)^i\left(\frac{1}{c}\,\mu M_o m^4\right)^i\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)\,!}\ \sin mx\right] \tag{8}$$

$$i=0,1,2,2,\ldots$$

$$m=1,2,3,\ldots$$

Δευτέρα προσέγγισις.

Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς (3γ), $r=2$, εἶναι:

$$M=\mu M_o u''-\frac{1}{2}\,\mu^2 M_o(u'')^2 \tag{9}$$

Λαμβάνοντες μόνον τὸν δεύτερον ὅρον τῆς (9) καὶ ἐργαζόμενοι καταλλήλως εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τῆς $\overset{(i)}{v}_m(t)$, καὶ ἑπομένως τὸν δεύτερον ὅρον $\bar{u}_2$ (x,t) τῆς λύσεως.

Ἐκ τῆς (4) διὰ $r=2$, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν $n_1=n_2=m$, καθὼς καὶ ὅτι:

$$\int_o^{\pi}\sin^3 mx\,dx=\begin{cases}\dfrac{4}{3m}, & \text{ἐὰν}\quad m=1,3,5,\ldots\\ o, & \text{ἐὰν}\quad m=2,4,6,\ldots,\end{cases}$$

ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων, εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & \overset{(i)}{v}_m(t)=\left[\dfrac{4\mu^2 M_o m^6}{3c}\right]^{x_i}\left[\dfrac{a^2{}_o}{3.4}\right]^{y_i}\left[\dfrac{1}{9.10}\right]^{z_i}\cdots\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{v_i-2}{2}-1\right)\left(\dfrac{v_i-2}{2}\right)}\right]^2\\ & \qquad\qquad\left[\dfrac{1}{(v_i-1)\,v_i}\right]t^{v_i}\\ \beta) & x_i=1+2+2^2+\ldots+2^{i-1},\\ \gamma) & y_i=2^{i-1},\\ \delta) & z_i=2^{i-2},\\ \varepsilon) & v_i=2+2^2+\ldots+2^{i-1}+2^{i+1},\\ & i=1,2,3,\ldots\\ & m=1,3,5,\ldots\end{array}\right\} \tag{10}$$

Ὁ δεύτερος ὅρος $\bar{u}_2(x,t)$ τῆς λύσεως εὑρίσκεται ἐκ τῆς (10,α), καθ' ὃν τρόπον εὑρέθη ὁ ὅρος τῆς $\bar{u}_1(x,t)$ ἐκ τῆς (7).

Οὕτως ἡ δευτέρα προσέγγισις τῆς λύσεως εἶναι:

$$u_2(x,t)=\bar{u}_1(x,t)+\bar{u}_2(x,t). \tag{11}$$

Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν προσεγγίσεις ἀνωτέρας τῆς δευτέρας.

SUMMARY

Here we apply the general theory of the preveous paper, part I, in a particular case by taking into account the physical data. Our interest is to give the first, second, and so on, approximations of the solution, by computing its first, second, and so on, terms. We take as initial data: $\varphi_1(x)=o$, $\varphi_2(x)=\alpha_o \sin x$, and the bending moment-carvature curve given by:

$$M=f(u'')=M_o\sum_{r=1}(-1)^{r\;1}\frac{\mu^r}{r\,!}(u'')^r$$

The first approximation of the solution is given by (8) the second by (11).