ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Eine Bemerkung über die von dem Zentralisator bestimmten Abbildung,** *von Ph. Vassiliou* *.

§ 1. Es ist wohlbekannt, dass die von dem Zentralisator einer Gruppe G bestimmte eindeutige Abbildung des Verbands M aller Untergruppen in sich von G, einen speziellen Fall der von G. Birkhoff definierten Polarität [1] bildet — eine sogenannte Galoissche Korrespondenz — sobald man unter der einschlägigen Relation zwischen zweier beliebigen Elementen der Gruppe ihre Kommutativität bezüglich der Gruppenoperation versteht.

Das bei dieser Zuordnung ζ Bild $\zeta X'$ einer Untergruppe X' von G erklärt sich folgenderweise: Man definiert zuerst, mittels des Kommutators $(A, B) = ABA^{-1} B^{-1}$ zweier Elementen von G, diese Elemente A, B als «konjugiert» wenn $(A, B) = E$ ist, wo E das Einheitselement von G bezeichnet. Die zu einem A konjugierten Elemente von G bilden eine Untergruppe von G. Der zu einer beliebigen Untergruppe X' von G entsprechende Zentralisator $\zeta X'$ ist der mengentheoretische Durchschnitt aller, nach der obigen Weise, den Elementen von X' zugeordneten Untergruppen.

Insbesondere, der Zentralisator ζG der ganzen Gruppe G ist gleich ihrem Zentrum O und der Zentralisator ζO von O ist G. Diese Zuordnung ζ ist eine (eineindeutige) involutorische Abbildung der Menge $N = \zeta M$ auf sich, welche die für ihre Elemente existierende partielle Relation des Enthaltenseins umkehrt.

Indem man nun mit $X, Y, \ldots$ beliebige Elemente von N, mit $X \cap Y$ den Durchschnitt von X, Y (welcher wieder ein Element von N ist) bezeichnet und als Vereinigung $X \cup Y$ das kleinste in N vorhandene Element, welches X und Y enthält, definiert so erhält man, dass die Vereinigung und der Durchschnitt zweier Elementen von N gehen durch ζ in den Durchschnitt bzw. die Vereinigung ihrer Bilder $\zeta X, \zeta Y$ über und dass N mit den Operationen $\cup$, $\cap$ wieder einen Verband bildet.

---

* Φ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, Ἐπὶ ἀπεικονίσεως τινὸς συμπλέγματος εἰς ἑαυτό.

1. G. Birkhoff, Lattice Theory, Rev. edit. 1948, Amer. Math. Coll. Publ. Vol. XXV, S. 54 - 58.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist zu beweisen dass, ausgenommen den abelschen Fall, der Verband N nie eine Boolesche Algebra sein kann, wenn man ζX als das zu X komplementäre Element betrachtet.

§ 2. Die Menge N braucht nicht, ohne weiteres, eine Boolesche Algebra zu sein. Um eine notwendige und hinreichende Bedingung aufzustellen dafür, dass N eine Boolesche Algebra sei, benutzen wir einen Satz von E. V. Huntington [1], gemäss dem

«Irgendeiner Verband, der ein Nullelement o besitzt, ist eine Boolesche Algebra, sobald in ihm jedes Element x (mindestens) einen Komplement $\tilde{x}$ hat und zwar so, dass für jede komplementäre Zuordnung $x \to \tilde{x}$, die Relation $y \subseteqq \tilde{x}$ aus $x \cap y = o$ schliessen lässt.»

Man bemerkt nun, dass wenn in unserem Verband N, in welchem das Zentrum O das Nullelement ist, neben der Bedingung

(2. 1) «Aus $X \cap Y = O$ folgt $X \subseteqq \zeta Y$, für jedes Paar $X, Y \in N$»,

auch die Umkehrung davon gilt, d. h.

(2. 2) «Aus $X \subseteqq \zeta Y$ folgt $X \cap Y = O$, für jedes Paar $X, Y \in N$»,

dann sind alle Voraussetzungen des Huntingtonsatzes erfüllt und N eine Boolesche Algebra sein muss.

Es gilt nämlich der

Satz. Aus der Voraussetzung

(2. 3) $$X \cap Y = O \iff X \subseteqq \zeta Y \qquad \text{für } X, Y \in N$$

folgt, dass ζX eine komplementäre Zuordnung in N ist und zwar identisch mit jeder komplementären Zuordnung ξX, welche (2. 3) erfüllt.

In der Tat; es ist $\zeta X \subseteqq \zeta X$ und daraus folgt, dass $X \cap \zeta X = O$, wenn man in (2. 2) ζX statt X und X statt Y setzt.

Aus der involutorischen Eigenschaft von ζ folgt weiter, dass

$$\zeta X \cup \zeta^2 X = \zeta X \cup X = X \cup \zeta X = \zeta O = G \text{ ist.}$$

ζX ist also eine komplementäre Zuordnung in N.

Eine zweite komplementäre Zuordnung ξX in N, welche auch die Bedingung (2. 3) erfüllt, müsste mit ζX identisch sein. Denn aus der

---

1. E. V. Huntington, Sets of independent postulates for the algebra of logic, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), S. 288 - 309.

komplementären Eigenschaft von ξX, für jedes $X \in N$, würde folgen

$$X \cap \xi X = \xi X \cap X = O$$

und daraus, wegen (2. 3),

$$\xi X \subseteqq \zeta X.$$

Andererseits, weil auch

$$X \cap \zeta X = \zeta X \cap X = O \text{ ist,}$$

würde, aus der für ξX erfüllten Bedingung wie oben,

$$\zeta X \subseteqq \xi X \text{ folgen.}$$

Es müsste also $\xi X = \zeta X$ identisch gelten.

§ 3. Die als hinreichende erwiesene Bedingung (2. 3) dafür, dass N eine Boolesche Algebra sei, mit ζX als komplementäres Element zu X, ist aber auch notwendig.

Denn, aus der Voraussetzung dass N eine Boolesche Algebra und ζX das zu X komplementäre Element ist, folgt

$$X \cap \zeta X = O, \qquad X \cup \zeta X = G$$

also, wegen des in N herrschenden Distributivgesetzes,

$$X = X \cap (Y \cup \zeta Y) = X \cap Y \cup X \cap \zeta Y$$

und so, aus $X \cap Y = O$ folgt $X \subseteqq \zeta Y$.

Umgekehrt, aus $X \subseteqq \zeta Y$ folgt $X \cap \zeta Y = X$, und so

$$X \cap Y = (X \cap \zeta Y) \cap Y = X \cap (\zeta Y \cap Y) = X \cap (Y \cap \zeta Y) = X \cap O = O.$$

§ 4. Man bemerkt nun, dass für eine zyklische Untergruppe Z' von G folgende Relationen gelten

$$Z = \zeta Z' \supseteqq Z', \qquad W = \zeta Z \supseteqq Z',$$

aus denen unmittelbar folgt, dass

$$Z \cap W \supseteqq Z'. \tag{4. 1}$$

Im Anschluss an §§ 2, 3, sei nun N eine Boolesche Algebra, $G \neq O$ und Z' durch ein solches Element von G erzeugt welches nicht im Zentrum O von G enthalten ist. Nach einer mündlichen Hinweis von M. Krasner, hätte man dann, gemäss der im obigen Satz aufgestellten Bedingung,

$$W = \zeta Z \Rightarrow Z \cap W = O. \tag{4. 2}$$

In Verbindung mit (4. 1), die Relation (4. 2) lässt aber schliessen, dass $Z' \subseteqq O$ ist, im Gegensatz zu unserer Konstruktion.

Im Fall also, dass N eine Boolesche Algebra sein soll, muss $G = O$ sein; mit anderen Worten, die Gruppe G muss eine abelsche Gruppe sein. N besteht dann aus dem einzigen Element O und ist, trivialerweise, eine Boolesche Algebra.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ ὑπὸ τῆς οὕτω καλουμένης *κεντροποιούσης*, συμπλέγματος G, ὁριζομένη μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ζ τοῦ *δικτυωτοῦ* M τῶν ὑποσυμπλεγμάτων τοῦ G εἰς ἑαυτὰ ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, μερικὴν περίπτωσιν τῆς ὑπὸ τοῦ G Birkhoff θεωρηθείσης *πολώσεως*. Εἶναι, ὅπως λέγομεν, μία ἀντιστοιχία Galois, ὅταν ὡς διμελὴς σχέσις μεταξὺ δύο τυχόντων στοιχείων τοῦ G λαμβάνεται ἡ ἀντιμεταθετικότης αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τοῦ συμπλέγματος.

Ἡ κατὰ τὴν ἐν λόγῳ ἀντιστοιχίαν ζ εἰκὼν ὑποσυμπλέγματός τινος εἶναι ἡ συνολοθεωρητικὴ *ἀλληλοτομὴ* ὅλων τῶν ὑποσυμπλεγμάτων τὰ ὁποῖα μορφώνομεν, ὅταν διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ δοθέντος ὑποσυμπλέγματος θεωρήσωμεν ἐκεῖνα τὰ ὑποσυμπλέγματα τὰ ἀποτελούμενα ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ G τὰ ἀντιμετατιθέμενα μὲ τὸ στοιχεῖον ἐκεῖνο.

Ἡ ἀπεικόνισις ζ εἶναι *ἐνελικτικὴ* τοῦ συνόλου $N = \zeta M$ ἐφ' ἑαυτό, ἀντιστρέφουσα τὴν μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ N (ὑποσυμπλεγμάτων) ὑφισταμένην μερικὴν σχέσιν τοῦ *περιέχεσθαι*. Ἰδιαιτέρως ἡ ζ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

Μὲ τὴν ἀλληλοτομὴν τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου N ἀνὰ δύο καὶ μὲ *συνένωμα* δύο στοιχείων αὐτοῦ τὸ ὑπάρχον ἐλάχιστον στοιχεῖον τοῦ N, τὸ περιέχον αὐτά, τὸ σύνολον N ἀποτελεῖ ἐπίσης δικτυωτόν.

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ἡ, ἐπὶ τῇ βάσει ἀναγκαίας καὶ ἱκανῆς συνθήκης ἵνα τὸ N εἶναι Ἄλγεβρα Boole, ὅταν αἱ διὰ τῆς ἀπεικονίσεως ζ εἰκόνες τῶν στοιχείων του εἶναι τὰ *συμπληρωματικὰ* στοιχεῖα τῶν οἰκείων ἀρχετύπων, εὕρεσις τοῦ ἐξαγομένου ὅτι, ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως ἀβελιανοῦ συμπλέγματος G, τὸ δικτυωτὸν N οὐδέποτε εἶναι Ἄλγεβρα Boole.
