ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ 4ΗΣ ΑΠΡΙΛΙΟΥ 1985

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΛΟΥΚΑ ΜΟΥΣΟΥΛΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur les surfaces représentatives des fonctions de deux variables d'une classe spéciale,** par *Othon Pylarinos* *.

RÉSUMÉ : est donné dans le N° 1.

1. Dans cet article — qui a pour object la recherche des propriétés dont jouissent les surfaces réelles non planes de l'espace euclidien habituel E^3, les points de chacune desquelles, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes Oxyz trirectangulaire, choisi comme système de référence dans l'espace E^3, admettent des coordonnées x, y, z dont, au moins, une — soit la coordonnée z — est une fonction des deux autres x, y satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du second ordre:

$$(1,1)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 j\right\}-2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,j+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 j\right\}=0$$

pour une certaine valeur réelle du coefficient unique j qui y figure, quelle que soit la valeur réelle du coefficient j — sont établis des théorèmes concernant quelques — unes de ces propriétés.

A cet effet — dans ce qui va suivre — compte tenu que à chaque valeur réelle du coefficient j, considéré comme paramètre, correspond un ensemble de surfaces précitées: l'ensemble des surfaces réprésentatives, par rapport au système de référence Oxyz, des fonctions réelles de deux variables — des

---

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παριστωσῶν τὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν μιᾶς εἰδικῆς κατηγορίας.**

variables x, y dans le cas envisagé — qui, satisfaisant à l'équation (1,1) pour cette valeur de j, sont des fonctions appartenant à la classe spéciale en question — ces surfaces sont appellées, pour abréger, *surfaces* S_{Rj}, l'indice j désignant la valeur du paramètre que l'équation (1,1) renferme, à laquelle correspond la surface S_{Rj}. En outre le plan du système de référence Oxyz, qui correspond aux deux des coordonnées x, y, z, par rapport à ce système, des points d'une surface S_{Rj}, fonction desquelles satisfaisant à l'équation de la forme (1,1), est la troisième, est appelé *plan de base* de la surface et le domaine du plan de base, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S_{Rj}, est appelé *domaine* σ_{Rj}, de son plan de base. Cela posé, il est d'abord établi, après un exposé préliminaire, un théorème qui exprime une condition géomètrique nécessaire et suffisante afin qu'une surface réelle de E^3 soit une surface S_{Rj} qui-ayant un plan déterminé pour plan de base — correspond en outre à une valeur donnée de l'indice j et il est ensuite démontré que:

a.— A chaque surface S_{Rj} est attachée une congruence rectiligne de RIBAUCOUR. Les génératrices de cette congruence sont les droites parallèles aux normales à la surface S_{Rj}, menées par les points de la "surface moyenne" de la congruence, la génératrice issue de chaque point de cette surface étant parallèle à la normale à la surface S_{Rj} en son point situé sur la normale menée par ce point au plan de base de la surface S_{Rj}. La surface moyenne de la congruence attachée à une surface S_{Rj}, si la valeur j_o de l'indice j, à laquelle correspond la surface S_{Rj}, est $= 0$, coïncide avec le domaine σ_{Rj} du plan de base de cette surface, tandis que, si j_o est un nombre réel $\neq 0$, est une surface S_{Rj} qui-ayant le même plan de base avec la surface S_{Rj} à laquelle est attachée la congruence — correspond à la valeur $\frac{1}{j_o}$ de l'indice j. Dans ce dernier cas chacune de ces deux surfaces S_{Rj} est la surface moynenne de la congruence de RIBAUCOUR attachée à l'autre. En outre la "surface génératrice" de la congruence de RIBAUCOUR attachée à une surface S_{Rj} est également une surface S_{Rj} définie à une homothétie et un deplacement parallèle près et ces deux surfaces S_{Rj}, qui — ayant le même plan de base — correspondent de plus à la même valeur de l'indice j, sont chacune la surface génératrice de la congruence de RIBAUCOUR attachée à l'autre et:

b.— A chaque surface S_{Rj} sont attachées deux "surfaces minima" qui — étant en général distinctes — se confondent et coïncident avec le domaine

σ_{Rj} du plan de base de la surface S_{Rj}, si la valeur j_o de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} est $= 0$ et ne sont réelles que si j_o est un nombre réel $\geqslant 0$. Les deux surfaces minima attachées à la même surface S_{Rj} sont applicables, l'une sur l'autre, dans le cas où elles sont distinctes et, dans la représentation de la surface S_{Rj} sur chaçune d'elles (distinctes ou coïncidantes), dans laquelle les couples de leurs points homologues déterminent des droites normales au plan de base de la surface S_{Rj}, au réseau des lignes asymptotiques de cette surface correspond sur la surface minima un réseau orthogonal qui est le réseau de ses lignes asymptotiques dans le cas où ces deux surfaces minima sont distinctes. Par ailleurs, en joignant à une surface minima réelle non plane S un plan (π) arbitrairement choisi, on peut associer à chaque nombre réel $m \neq -1$ une surface S_{Rj} qui — ayant le plan (π) comme plan de base — correspond à la valeur $\frac{1}{(1+m)^2}$ de l'indice j. La surface minima S est l'une des deux surfaces minima attachées à cette surface S_{Rj}.

Il est enfin démontré que, si deux des trois coordonnées x, y, z des points d'une surface réelle non plane S de E^3, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz, sont chacune une fonction des deux autres satisfaisant toutes les deux à une équation aux dérivées partielles de la forme (1,1) pour la même valeur j_o du coefficient unique j qui figure dans cette équation et que j_o soit un nombre réel $\neq -1$, la troisième coordonnée des points de S est nécessairement une fonction des deux autres satisfaisant également à une équation de la forme (1,1) pour la valeur $\frac{2}{1+j_o}$ du coefficient j. En outre, compte tenu que cette propriété de la troisième coordonnée des points de S, si j_o est $= +1$, est une conséquence du fait que, dans ce cas, S est une surface minima, la forme, qu'une fonction réelle z(x, y) doit avoir, est déterminée, afin que les deux premières des coordonnées x, y, z des points de la surface représentative d'une fonction réelle des variables x, y de cette forme, par rapport au système de référence considéré Oxyz, jouissent de la propriété précitée pour une valeur réelle $\neq \pm 1$ du coefficient j.

Rappels et préliminaires

2.— Soit:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_o\, x(u, \upsilon) + \mathbf{y}_o\, y(u, \upsilon) + \mathbf{z}_o\, z(u, \upsilon) \equiv \mathbf{r}(u, \upsilon) \tag{2,1}$$

l'équation vectorielle, par rapport au système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz choisi comme système de référence dans l'espace E^3, de la portion d'une surface réelle non plane de E^3, qui — étant dépourvue de points singuliers — est "la surface S" à laquelle se rapportent les considérations qui vont suivre.

Le second membre $\mathbf{r}(u, \upsilon)$ de l'équation (2,1) est une fonction vectorielle réelle des variables u, ʋ, aux couples des valeurs réelles desquelles dans deux intervalles déterminés, correspondent les points de la surface S, les vecteurs $\mathbf{x}_o$, $\mathbf{y}_o$, $\mathbf{z}_o$ — qui y figurent — étant les vecteurs unitaires qui déterminent respectivement le sens positif sur les directions des axes Ox, Oy, Ox du système de référence Oxyz et cette fonction ainsi que toute autre fonction vectorielle ou scalaire des u, ʋ, qui figure dans les pages suivantes, sont, par hypothèse, des fonctions de classe C^k $(k \geqslant 3)$ dans les intervalles considérés.

Si l'on suppose de plus que, grâce au choix convenable des coordonnées curvilignes u, ʋ sur la surface S, les courbes υ = Cte, u = Cte tracées sur S soient ses "lignes de courbure" et que l'on désigne par E, F, G et L, M, N les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de S, on aura:

$$F \equiv 0, \quad M \equiv 0, \tag{2,2}$$

puisque, dans ce cas, le réseau formé par les courbes υ = Ct, u = Cte tracées sur S est à la fois orthogonal et conjugué,

En outre, d'après cette supposition, les vecteurs:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon}, \quad \mathbf{l}_o = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2{}^* \tag{2,3}$$

auxquels sont respectivement parallèles, au point courant P (u, ʋ) de S, les

---

* Les notations $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ désignent les produits vectoriel et scalaire respectivement des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$.

tangentes aux lignes de courbure $\upsilon = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ de S issues de ce point et la normale à S en ce même point, sont des vecteurs unitaires, puisque on a $E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)^2$, $G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon}\right)^2$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \equiv 0$, qui en chaque point de S forment un système trirectangle et dans cet ordre direct.

Les dérivées du premier ordre par rapport à u et à υ des vecteurs unitaires (2, 3) pour les valeurs des u, υ, auxquelles correspond le point courant P(u, υ) de S, d'après des formules connues [2, p. 157], peuvent s'écrire sous la forme:

$$(2,4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial u} = \left\{ k_{g_1} \mathbf{e}_2 + k_1 \mathbf{l}_o \right\} \sqrt{E}, \ \dfrac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial u} = -k_{g_1} \mathbf{e}_1 \sqrt{E}, \ \dfrac{\partial \mathbf{l}_o}{\partial u} = -k_1 \mathbf{e}_1 \sqrt{E}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \upsilon} = k_{g_2} \mathbf{e}_2 \sqrt{G}, \dfrac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \upsilon} = \left\{ -k_{g_2} \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{l}_o \right\} \sqrt{G}, \ \dfrac{\partial \mathbf{l}_o}{\partial \upsilon} = -k_2 \mathbf{e}_2 \sqrt{G}, \end{cases}$$

où:

$$k_{g_1} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \upsilon}, \quad k_{g_2} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

sont les "courbures géodésiques" au point courant P (u, υ) de S de ses lignes de courbure $\upsilon = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ issues de ce point, tandis que:

$$(2,6)\qquad k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}$$

sont les "courbures principales" de S en ce même point; en outre, grâce aux (2,2) (2,5) et (2,6), les deux équations des CODAZZI-MAINARDI, auxquelles doivent satisfaire les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S, acquièrent la forme:

$$(2,7)\qquad \frac{\partial k_1}{\partial \upsilon} = \left\{ k_1 - k_2 \right\} k_{g_1} \sqrt{G}, \ \frac{\partial k_2}{\partial u} = \left\{ k_1 - k_2 \right\} k_{g_2} \sqrt{E}.$$

Par ailleurs, si l'on désigne par ξ, η, ζ les cosinus des angles que les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$, au point courant P(u, υ) de la surface S, forment avec le vecteur unitaire $\mathbf{z}_o$ normal au plan xOy du système de référence Oxyz et que l'on tienne compte que, dans le cas envisagé, le système (2, 3) des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ est en chaque point de S trirectangle, on aura:

$$(2,8)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

En outre on a:

(2,9) $$\mathbf{z}_o = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{l}_o$$

et, si l'on tient compte que les cosinus ξ, η, ζ sont respectivement égaux aux produits scalaires:

(2,10) $$\xi = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_1, \quad \eta = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{e}_2, \quad \zeta = \mathbf{z}_0 \times \mathbf{l}_0,$$

en différentiant ces trois relations par rapport à u et à υ, on obtient, en faisant usage des formules (2,4) et de ces relations (2,10), pour les dérivées du premier ordre des ξ, η, ζ par rapport à u et à υ les expressions:

(2,11) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = \left\{ k_{g_1} \eta + k_1 \zeta \right\} \sqrt{E}, \quad \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = - k_{g_1} \xi \sqrt{E}, \quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = - k_1 \xi \sqrt{E}, \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial \upsilon} = k_{g_2} \eta \sqrt{G}, \quad \dfrac{\partial \eta}{\partial \upsilon} = \left\{ - k_{g_2} \xi + k_2 \zeta \right\} \sqrt{G}, \quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial \upsilon} = - k_2 \eta \sqrt{G}. \end{cases}$$

Cela posé, soit:

(2,12) $$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\,(u, \upsilon) + \mathbf{z}_0\, m \left\{ \mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}\,(u, \upsilon) \right\} \equiv \mathbf{r}_1\,(u, \upsilon),$$

où $\mathbf{r}(u, \upsilon)$ est le second membre de l'équation (2, 1) de la surface S et m est un nombre réel. l'équation vectorielle, par rapport au système de référence Oxyz, d'une surface S_1 qui ne se confond avec la surface S que, si m est $= 0$.

Or, si m est un nombre réel $\neq 0$, les points de la surface S_1 correspondent aux couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S et, dans la représentation des surfaces S, S_1, l'une sur l'autre — dans laquelle chaque couple de leurs points homologues est un couple des points des deux surfaces, qui correspondent au même couple de valeurs des u, υ — les couples de leurs points homologues déterminent des droites normales au plan xOy du système de référence. Le point P_1 de la surface S_1 homologue, dans cette représentation, du point courant P (u, υ) de la surface S, est la projection orthogonale sur le plan xOy du point P, si m est $= -1$; par conséquent, la surface S_1, est, dans ce cas, le domaine du plan xOy, les points duquel, sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S, tandis que, si m est $\neq -1$, le point P_1 de S_1, homologue du point courant P(u, υ) de S, est un point situé sur la normale au plan xOy menée par le point P_1, qui détermine avec le point P et sa projection orthogonale P′ sur le plan xOy les vecteurs $\overline{PP_1} = (PP_1)\mathbf{z}_0$, $\overline{P_1P'} = (P_1P')\mathbf{z}_0$, le rapport des grandeurs algébriques (PP_1), (P_1P') desquels est:

$$(2,13) \qquad \frac{(PP_1)}{(P_1P')} = -\frac{m}{m+1} = \mathrm{Cte}$$

pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points des surfaces S, S_1.

Or, si l'on admet que les courbes υ = Cte, u = Cte tracées sur la surface S sont ses lignes de courbure et que l'on tienne compte que, dans ce cas, la différentiation de l'équation (2, 12) par rapport à u et à υ conduit, à l'aide des (2,3) et (2,10), aux expressions:

$$(2,14) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} = \left\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0\, m\xi \right\} \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} = \left\{ \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0\, m\eta \right\} \sqrt{G}$$

des dérivées du premier ordre par rapport à u et à υ du second membre $\mathbf{r}_1$ (u, υ) de l'équation (2, 12) de la surface S_1, on obtient pour les coefficients E_1, F_1, G_1 de la première forme quadratique fondamentale de cette surface les valeurs:

$$(2,15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = \{ 1 + (2\,m + m^2)\, \xi^2 \}\, E, \; F_1 = (2\,m + m^2)\, \xi\eta\, \sqrt{EG}. \\ \qquad G_1 = \{ 1 + (2\,m + m^2)\, \eta^2 \}\, EG \end{array} \right.$$

et de là, eu égard de plus à la relation (2,8), on aura:

$$(2,16) \qquad E_1\, G_1 - F_1^2 \equiv W_1^2 = \{ (1 + m)^2 - (2\,m + m^2)\, \zeta^2 \}\, EG,$$

En outre, si m est $\neq -1$, la normale à la surface S_1 en son point courant P_1 (u, υ) est parallèle, d'après les formules (2, 14), au vecteur:

$$(2,17) \qquad \mathbf{l}_1 = \{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0\, m\, \xi \} \wedge \{ \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0\, m\, \eta \}$$

qui, grâce aux (2,3), (2,9), (2,10) et au fait que, dans le cas envisagé, le système (2,3) des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_0$ est en chaque point de la surface S trirectangle et dans cet ordre direct, acquiert la forme:

$$(2,18) \qquad \mathbf{l}_1 = (1 + m)\, \mathbf{l}_0 - m\, \zeta\, \mathbf{z}_0.$$

Il en résulte que le vecteur unitaire:

$$\mathbf{l}_{10} = \frac{1}{W_1} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon}$$

qui, si m est $\neq -1$, détermine le sens positif sur la direction de la normale à la surface S_1, en son point courant $P_1(u, \upsilon)$, grâce aux (2,14), (2,16) et (2,18), acquiert la forme:

$$(2{,}19) \qquad \mathbf{l}_{10} = -\frac{\{1 + m\}\,\mathbf{l}_0 - m\,\zeta\,\mathbf{z}_0}{\{(1+m)^2 - (2m + m^2)\,\zeta^2\}^{1/2}} .$$

Par ailleurs en différentiant les équations (2,14) par rapport à u et à υ et en faisant usage des formules (2,4) et (2,11), on parvient aux expressions:

$$(2{,}20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial u^2} \Big\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0\, m\, \xi \Big\} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} + \Big\{ k_{g1}\, \mathbf{e}_2 + k_1\, \mathbf{l}_0 + \mathbf{z}_0\, m\, (k_{g1}\, \eta + k_1 \zeta) \Big\} E, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial u \partial \upsilon} = \Big\{ -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0\, m\, \zeta)\, k_{g1} + (\mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0\, m\, \eta)\, k_{g2} \Big\} \sqrt{EG}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon^2} = \Big\{ \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0\, m \eta \Big\} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial \upsilon} + \Big\{ -k_{g2}\, \mathbf{e}_1 + k_2\, \mathbf{l}_0 + \mathbf{z}_0 m\, (-k_{g2}\, \xi + k_2\, \zeta) \Big\} G. \end{cases}$$

des dérivées du second ordre par rapport à u et à v du second membre $\mathbf{r}_1$ (u,u) de l'équation (2,12) de la surface S_1 et, à l'aide des (2,19) et (2,20), on obtient pour les coefficients L_1, M_1, N_1 de la seconde forme quadratique fondamentale de cette surface les valeurs:

$$(2{,}21) \quad \begin{cases} L_1 \equiv \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial u^2} \times \mathbf{l}_{10} = \dfrac{\{1 + m\}\, E\, k_1}{\{(1+m)^2 - (2m + m^2)\,\zeta^2\}^{1/2}}, \\[3ex] N_1 \equiv \dfrac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon^2} \times \mathbf{l}_{10} = \dfrac{\{(1 + m\}\, G\, k_2}{\{(1+m)^2 - (2m + m^2)\,\zeta^2\}^{1/2}} \end{cases}$$

et

$$(2{,}22) \qquad M_1 \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{r}_1}{\partial u \partial \upsilon} \times \mathbf{l}_{10} \equiv 0.$$

Les considérations précédentes, compte tenu que le plan xOy du système de référence est un plan arbitrairement choisi, montrent que, en joignant à une surface non plane S de E^3 un plan (π), on peut associer à chaque nombre réel m — qui n'est ni $= 0$ ni $= -1$ — une surface S_1 qui, ne coïncidant ni avec la surface S ni avec le domaine du plan (π) les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de S, est représentée sur la surface S de la manière qui vient d'être indiquée, les droites déterminées par les couples de leurs points homologues étant normales au plan (π). Dans cette représentation, d'après (2,2), (2,6) et (2,21), (2,22). *au réseau des lignes asymptotiques de la surface S correspond sur ls surface S_1 le réseau de ses lignes asymptotiques.*

En outre, si la surface considérée S est "La surface directrice" de la congruence rectiligne (δ) dont la génératrice issue du point courant $P(u, \upsilon)$ de cette surface est parallèle au vecteur unitaire $\mathbf{d}_0(u, \upsilon)$, l'équation vectorielle de cette congruence, par rapport au système de référence Oxyz, aura la forme:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}\,(u, \upsilon) + \theta\, \mathbf{d}_0\,(u, \upsilon) \tag{2,23}$$

où $\mathbf{r}(u, \upsilon)$ est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S et θ est la variable, aux valeurs de laquelle correspondent les points de la génératrice de la congruence issue du point courant $P\,(u, \upsilon)$ de S. Le point P de S est le point de cette génératrice, qui, d'après (2,23), correspond à la valeur 0 de la variable θ et, si de plus on a:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \neq 0, \tag{2,24}$$

les "points focaux" de la même génératrice de la congruence (δ) correspondent aux valeurs θ_1, θ_2, de θ, qui — comme on sait [2, p. 398] — sont les racines du polynôme en θ:

$$\theta^2 \{ eg - f^2 \} + \theta \{ ag - (b + b')\, f + ce \} + ac - bb', \tag{2,25}$$

où

$$e = \left(\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \right)^2, \quad f = \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon}, \quad g = \left(\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \right)^2 \tag{2,26}$$

et

$$a = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u}, \quad b = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u}, \quad b' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon}, \quad c = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \tag{2,27}$$

pour les valeurs des u, υ, auxquelles correspondent le point P de la surface S et la génératrice de la congruence (δ) issue de ce point de S.

Cela étant, pour que la surface directrice S de la congruence (δ) soit la "surface moyenne" de cette congruence, il faut et il suffit, eu égard que, d'après (2,23), sur la surface S θ est $= 0$, que les valeurs θ_1, θ_2 de θ, auxquelles correspondent les points focaux de chaque génératrice de la congruence (δ), soient opposées; il faut et il suffit donc que les fonctions scalaires e, f, g et a, b, b′, c des u, υ, qui figurent dans les coefficients du polynôme en θ (2,25), soient liées par la rélation:

$$ag - (b + b')\, f + ce = 0 \tag{2,28}$$

pour tous les couples des valeurs des u, v, auxquels correspondent les points de la surface S et les génératrices de la congruence (δ).

La relation (2,28), si l'on y substitue e, f, g et a, b, b′, c par leurs valeurs (2, 26) et (2, 27), se remène — comme on le reconnaît aisément — à l'équation:

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \right\} \times \left\{ \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \right\} = 0 \tag{3,29}$$

qui est équivalente à l'équation que l'on obtient en y substituant le produit vectoriel $\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon}$, par le vecteur $\mathbf{d}_0$ (u, υ), c. à-d. à l'équation:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \Lambda \frac{\mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda\, \mathbf{d}_0 \right) = 0, \tag{2,30}$$

On le reconnaît en tenant compte du fait que — le vecteur $\mathbf{d}_0$ (u, υ) étant, par hypothèse, un vecteur unitaire — on a:

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} \right\} \Lambda\ \mathbf{d}_0 \equiv 0$$

et que, par conséquent, on a nécessairement:

$$\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon} = \mu\,(u, \upsilon) \cdot \mathbf{d}_0\,(u, \upsilon)$$

où m (u, υ) est une fonction scalaire des u, v, qui — d'après (2,24) est $\neq 0$.

L'équation (2,30) dans le cas plus général où la génératrice de la congruence (δ) issue du point courant P (u, υ) de la surface S est parallèle au vecteur:

$$\mathbf{d}\,(u, \upsilon) = d\,(u, \upsilon)\,\mathbf{d}_0\,(u, \upsilon) \tag{2,31}$$

dont la grandeur algébrique d (u, υ) n'est pas nécessairement constante, si de plus le produit vectoriel $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \upsilon}$, est $\neq 0$, eu égard que, cela étant, il en est de même-comme on le constate aisément — du produit vectoriel $\frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \mathbf{d}_0}{\partial \upsilon}$, acquiert, grâce à (2,31), la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \upsilon} \Lambda\, d \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial u} \Lambda\, \mathbf{d} \right) = 0. \tag{2,32}$$

Or, d'après les considérations précédentes, "afin que la surface S qui — étant définie par rapport au système de référence Oxyz, par l'équation vectorielle, (2,1) — a été choisie comme surface directrice de la congruence rectiligne (δ) dont la génératrice issue du point courant P (u, υ) de la surface S, est parallèle au vecteur **d**(u, υ), soit la surface moyenne de cette congruence, il faut et il suffit que le vecteur **d**(u, υ) et le second membre **r**(u, υ) de l'équation (2,1) de la surface S soient des fonctions vectorielles des u, υ satisfaisant à l'équation (2,32) pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S et les génératrices de la congruence (δ)".

I.

3.— Considérons, en preimer lieu, le domaine σ sur le plan xOy du système de référence Oxyz, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S qui, par rapport au système Oxyz, est définie par l'équation vectorielle (2,1).

Si S est une "surface S_{Rj} ayant le plan xOy comme plan de base, d'après ce qui est esposé dans le paragraphe 1, la troisième des coordonnées x, y, z des points de S, par rapport à ce système, est une fonction des deux premières satisfaisant à l'équation (1,1) pour la valeur du paramètre unique j, que cette équation renferme, à laquelle correspond cette surface S_{Rj}.

Mais, si l'on désigne par H la courbure moyenne $\frac{k_1 + k_2}{2}$ de la surface

S en son poiçt courant P (u, υ) et par Δ'_2 z le paramètre différentiel du second ordre de BELTRAMI sur le domaine σ du plan xOy de la coordonnée $z \equiv \mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}$ des points de S, en posant:

$$(3, 1) \qquad j = m + 1,$$

on peut écrire l'équation (1,1), à laquelle z(x, y) doit satisfaire, sous la forme:

$$(3,2) \qquad m\, \Delta'_2 z - 2\,(m+1)\,\frac{H}{\zeta^3} = 0,$$

où ζ est le cosinus de l'angle formé par les vecteurs unitaires $\mathbf{l}_0$, $\mathbf{z}_0$ auxquels sont respectivement parallèles les normales à la surface S en son point courant P (u, υ) et au plan xOy du système de référence.

On le reconnaît en tenant compte que, si l'on désigne, pour abréger, les dérivées du premier et du second ordre de z par rapport à x et à y par les notations habituelles:

$$(3,3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

pour les valeurs des x, y, auxquelles correspondent le point courant P de S et sa projedtion orthogonale sur le plan xOy, on aura:

$$(3,4) \qquad \zeta = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^{1/2}},$$

$$(3,5) \qquad H = \frac{r\,(q^2+1) - 2\,spq + t\,(p^2+1)}{2\,(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

et

$$(3, 6) \qquad \Delta'_2\, z = r + t.$$

L'équation (3,2), à laquelle l'équation (1,1) est ramenée, est indépendante du choix des coordonnées curvilignes u, υ sur la surface S. Cela étant, en supposant que les courbes υ = Cte, u = Cte tracées sur la surface S soient ses lignes de courbure et en tenant compte du fait que, par rapport au système Oxyz, le domaine σ du plan xOy de ce système est défini par l'équation vectorielle:

$$(3, 7) \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r}\,(u, \upsilon) - \mathbf{z}_0 \{ \mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}\,(u, \upsilon) \} \equiv \mathbf{r}'\,(u, \upsilon)$$

où $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S, en faisant usage des (2,3) et (2,10), on obtient pour les coefficients E', F', G' de la première forme quadratique fondamentale du domaine σ les valeurs:

$$(3,8) \qquad E' = \{1 - \xi^2\} E, \quad F' = -\xi\eta \sqrt{EG}, \quad G' = \{1 - \eta^2\} G$$

et pour le paramètre différentiel du second ordre de BELTRAMI $\Delta'_z z$ sur le domaine σ du plan xOy de la coordonée $z \equiv \mathbf{z}_o \times \mathbf{r}$ (u, υ) des points de S — comme on le reconnaît en ayant égard aux valeurs (3,8) des E', F', G' et en faisant usage des formules (2,10) et (2,11) [4, p. 395] — l'expression:

$$(3,9) \qquad \Delta'_2 z = \frac{k_1(1-\eta^2) + k_2(1-\xi^2)}{\zeta^3}.$$

Or, dans le cas envisagé, l'équation (3,2), à laquelle doit satisfaire la troisième des coordonnées x, y, z des points de S, par rapport au système de référence Oxyz, considérée comme une fonction des deux premières, si l'on y substitue le paramètre différentiel $\Delta'_2 z$ par sa valeurs (3,9), se ramène à la relation:

$$(3,10) \qquad k_1\{1 + m\eta^2\} + k_2\{1 + m\xi^2\} = 0$$

qui doit lier les courbures principales k_1, k_2 de S en chacun de ses points aux cosinus ξ, η des angles que la normale au plan de base xOy de cette surface S_{Rj} forme avec les tangentes à ses lignes de courbure issues de ce point.

D'autre part, si en chaque point d'une surface réelle non plane S de E^3, ses courbures principales k_1, k_2. sont liées aux cosinus ξ, η des angles que la normale à un plan déterminé (π) forme avec les tangentes aux lignes de courbure de S issues de ce point par une relation de la forme (3,10) pour une certaine valeur réelle du coefficient m que renferme cette équation, S est une surface S_{Rj} ayant le plan (π) comme plan de base et correspondant à la valeur $m+1$ de l'indice j; car, si l'on rapporte S à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz ayant le plan (π) comme plan xOy, on peut, en faisant usage des (2,4), (2,5), (3,6) et (3,9), ramener cette relation à une équation de la forme (1,1), à laquelle doit satisfaire, dans ce cas, la troisième des coordonnées x, y, z des points de S par rapport à ce système, considérée comme fonction des deux premières pour la valeur $m+1$ du paramètre j que renferme cette équation.

On peut donc, grâce aux constatations précédentes, formuler le *Théorèm* I.— *Afin qu'une surface réelle non plane S de E^3 soit une surface S_{Rj} ayant un plan déterminé (π) comme plan de base et correspondant à une valeur donnée de l'indice j, il faut et il suffit que en chaque point de la surface S ses courbures principales* k_1, k_2, *soient liées aux cosinus* ξ, η *des angles, que la normale au plan (π) forme avec les tangentes aux lignes de courbure de S issues de ce point, par la relation*:

$$k_1\{1+(j-1)\eta^2\}+k_2\{1+(j-1)\xi^2\}=0. \tag{3, 11}$$

Envisageons maintenant la congruence rectiligne (δ) engendrée par les droites parallèles aux normales à la surface considerée S en ses points menées par les points de la surface S_1, qui, par rapport au système de référence Oxyz, est définie par l'équation vectorielle de la forme (2,12):

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\ (u, \upsilon)+\mathbf{z}_o\, m\{\mathbf{z}_o\times\mathbf{r}\ (u, \upsilon)\}\equiv\mathbf{r}_1,\ (u, \upsilon), \tag{3, 12}$$

où $\mathbf{r}(u, \upsilon)$ est le seconde membre de l'équation (2,1) de la surface S et le coefficient m est une constante réelle, la génératrice de cette congruence issue de chaque point de la surface S_1, étant la parallèle menée par ce point à la normale à la surface S en son point qui — étant situé sur la normale au plan xOy menée par ce point de la surface S_1 — correspond, comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 2, au même couple de valeurs des u, v avec ce point de la surface S_1.

Si P, P_1 sont deux points des surfaces S, S_1 correspondant au même couple de valeurs des u, υ et que $\mathbf{l}_o$ (u, υ) soit le vecteur unitaire, auquel la normale à la surface S en son point P et la génératrice de la congruence (δ) issue du point P_1 de la surface S_1 sont parallèles, pour que la surface S_1 soit la surface moyenne de la congruence (δ), il faut et il suffit, d'après le résultat final du paragraphe 2, que le vecteur unitaire $\mathbf{l}_o$ (u, υ) et le second membre $\mathbf{r}_1$ (u, υ) de l'équation (3,12) de la surface S_1 soient des fonctions vectorielles des u, υ sarisfaisant pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points des surfaces S, S_1, à l'équation:

$$\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial u}\times\left(\frac{\partial\mathbf{l}_0}{\partial\upsilon}\ \Lambda\,\mathbf{l}_0\right)-\frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial\upsilon}\times\left(\frac{\partial\mathbf{l}_0}{\partial u}\ \Lambda\,\mathbf{l}_0\right)=0, \tag{3,13}$$

quelles que soient les coordonnées curvilignes u, υ qui ont été choisies sur la surface S.

Or, si l'on admet que, grâce au choix convenable des coordonnées curvilignes u, υ sur la surface S, les courbes $\upsilon = \mathrm{Cte}$, $u = \mathrm{Cte}$ tracées sur S sont ses lignes de courbure et que l'on tienne compte que, dans ce cas, le système (2,3) des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ est en chaque point de S trirectangle et dans cet ordre direct, grâce aux (2, 3) et (2,4), on aura, pour les valeurs des u, υ, auxquelles correspond le point courant P (u, υ) de S:

$$(3{,}14) \qquad \frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial u} \Lambda\, \mathbf{l}_0 = \mathbf{e}_2\, k_1 \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial \upsilon} \Lambda\, \mathbf{l}_0 = -\, \mathbf{e}_1\, k_2 \sqrt{G},$$

tandis que, pour les mêmes valeurs des u, υ, eu égard aux valeurs (2,10) des cosinus ξ, η des angles que le vecteur unitaire $\mathbf{z}_o$ normal au plan xOy du système de référence Oxyz forme avec les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ auxquels sont parallèles les tangentes aux lignes de courbure $\upsilon = \mathrm{Ct}$, $u = \mathrm{Cte}$ de S issues de son point P, on aura pour les dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon}$ du second membre $\mathbf{r}_1$ (u, υ) de l'équation (3,12) de la surface S_1, les expressions:

$$(3{,}15) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} = \left\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_3\ m\xi \right\} \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} = \left\{ \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0\ m\eta \right\} \sqrt{G}.$$

L'équation (3,13) se ramène, à l'aide des (3,14) et (3,15), à une relation de la forme (3,10) entre les courbures principales k_1, k_2 de la surface S et les cosinus ξ, η, le coefficient m — qui y figure — étant la constante réelle que renferme l'équation (3,12) de la surface S_1; ce qui montre que, pour que l'équation (3,13) soit vérifiée par tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points des surfaces S, S_1 et, par conséquent, pour que la surface S_1 soit la surface moyenne de la congruence (δ), il faut et il suffit que la surface S soit une surface S_{Rj} qui — ayant le plan xOy du système de référence comme plan de base-correspond à la valeur m+1 de l'indice j, car, d'après le théorème I, il faut et il suffit que la surface S jouisse de cette propriété, afin que ses courbures principales k_1, k_2 en chacun de ses points soient liées aux cosinus ξ, η par la relation précitée, à laquelle se ramène l'équation (3,13).

Donc, si la surface considérée S est une surface S_{Rj} qui — ayant le plan xOy du système de référence comme plan de base — correspond à une certaine valeur de l'indice j, la surface S_1, qui, par rapport à ce système, est définie par l'équation (3,12), dans laquelle la fonction **r** (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de S et le coefficient m est lié à la valeur de j, à laquelle correspond la surface S, par la relation $m - j + 1 = 0$, est la surface moyenne de la congruence que l'on obtient en menant par chaque point de la surface S_1 la parallèle à la normale à la surface S en son point situé sur la normale au plan xOy menée par ce point de la surface S_1 et la congruence rectiligne que l'on obtient de la manière ci-dessus en joignant à une surface S_{Rj}. son plan de base, est la congruence qui — dans ce qui va suivre-est appelée "congruence (δ) attachée à cette surface".

Il est à remarquer que les surfaces S_{Rj} qui correspondent à la valeur 0 de j, son les surfaces qui — comme on le reconnaît en ayant égard à l'équation (1,1) du paragraphe 1, sont représentatives par rapport au système de référence Oxyz des fonctions harmoniques réelles de deux variables et qui, pour abréger, sont appelées "surfaces harmoniques". La surface moyenne S_1 de la congruence (δ) attachée à une surface S_{Rj} qui correspond à $j = 0$, est-comme on le reconnaît aisément — le domaine σ_{Rj} de son plan de base; par conséquent la congruence (δ) attachée à cette surface — étant une congruence à surface moyenne plane — est, comme on sait [2, p, 422], une congruence de RIBAUCOUR. En outre le fait que le domaine σ_{Rj}, du plan de base d'une surface S_{Rj} qui correspond à $j = 0$, est la surface moyenne de la congruence (δ) attachée à cette surface, est une propriété qui — comme on sait [5, p. 65] — caractérise les surfaces harmoniques.

Par ailleurs les surfaces S_{Rj}, qui correspondent à la valeur $+1$ de j, sont les "surfaces minima non planes". On reconnaît en effet, en ayant égard à l'équation (1,1) du paragraphe 1, qu'une surface minima non plane est une surface S_{Rj} qui correspond à $j = +1$ et admet comme plan de base un plan arbitrairement choisi. La congruence (δ) attachée à une surface minima non plane, considerée commé surface S_{Rj} correspondant à la valeur $+1$ de j, est engendrée par les normales à cette surface qui-comme on le reconnaît aisément — est à la fois sa surface moyenne. Cela étant, cette congruence est, même dans ce cas, une congruence de RIBAUCOUR, car les deux systèmes de ∞^1 surfaces développables engendrées par ses génératrices déterminent sur sa surface moyenne un réseau de courbes conjugué: le réseau des lignes de courbure de cette surface et — comme on sait [1, p. 309] — cette propriété caractérise les congruences de RIBAUCOUR.

Il est en outre aisé de reconnaître, à l'aide du résultat final du paragraphe

2, en supposant que les courbes u = Cte, u = Cte tracées sur la surface considérée S soient ses lignes de courbure et en faisant usage des formules (2,3) et (2,4), que "afin qu'une surface non plane de E^3 soit une surface minima, il faut et il suffit que la congruence rectiligne engendrée par les normales à cette surface admette cette même surface comme surface moyenne".

4.— La congruence (δ) attachée à une surface S_{Rj}, qui, d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 3, est une congruence de RIBAUCOUR, lorsque la surface S_{Rj} correspond soit à la valeur $+1$ soit à la valeur 0 de l'indice j, jouit de cette propriété même dans le cas où la valeur de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj}, n'est ni $= 0$ ni $= +1$.

On le reconnaît en supposant que la surface considérée S, sur laquelle les courbes υ = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, soit une surface S_{Rj}, qui-ayant le plan xOy du système de référence Oxyz comme plan de base — correspond à une valeur de j, qui n'est ni $= 0$ ni $= +1$ et en tenant compte que, dans ce cas, la surface moyenne S_1 de la congruence (δ) attachée à S, étant définie, par rapport au système Oxyz, par l'équation (3,12), dans laquelle la fonction vectorielle $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S et le coefficient m est la constante liée à la valeur de j, à laquelle correspond la surface S, par la relation $m - j + 1 = 0$, ne coïncide ni avec la surface S ni avec le domaine σ_{Rj}, de son plan de base xOy.

La génératrice de la congruence (δ) issue du point P_1 de sa surface moyenne S_1, qui — étant situé sur la normale au plan xOy menée par le point courant P (u, υ) de la surface S — correspond aux valeurs des u, υ, auxquelles correspond le point P de S, est parallèle, d'après la définition de cette congruence donnée dans la paragraphe 3, au vecteur unitaire $\mathbf{l}_o$ (u, υ), auquel est parallèle la normale à la surface S en son point P.

Cela étant les deux systèmes de ∞^1 surfaces développables engendrées par les génératrices de la congruence (δ) ainsi que le réseau des courbes que ces deux systèmes de surfaces développables déterminent sur la surface moyenne S_1 de cette congruence, sont définis par l'équation différentielle:

$$(4,1) \qquad \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} d\upsilon \right\} \times \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial \upsilon} d\upsilon \right) \Lambda \mathbf{l}_0 \right\} = 0,$$

où $\mathbf{r}_1$ (u, υ) est le second membre de l'équation (3,12) de la surface S_1, à laquelle on parvient si l'on exprime que sur chaque génératrice de la surface reglée engendrée par les génératrices de la congruence (δ), qui correspondent aux couples des valeurs des u, υ satisfaisant à une relation de la forme $\upsilon - \upsilon(u) = 0$, le paramètre distributeur de cette surface est $= 0$.

Il en résulte que le produit des valeurs μ_1, μ_2 du rapport $\frac{d\upsilon}{du}$, auxquelles correspondent les tangentes aux courbes du réseau en question sur la surface S_1, issues de son point courant $P_1(u, \upsilon)$, qui, d'après (4,1), est:

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial u} \wedge \mathbf{l}_0 \right)}{\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial \upsilon} \wedge \mathbf{l}_0 \right)},$$

acquiert, grâce aux (3,14) et (3, 15), la forme:

$$\mu_1 \mu_2 = - \frac{E\, k_1}{G\, k_2}. \tag{4,2}$$

Or, en tenant compte que, dans le cas envisagé, la surface S_1 est définie par une équation vectorielle de la forme (2, 12), le coefficient m — qui y figure — étant la constante $\neq -1$, que renferme l'équation (3,12) de la surface S_1 et que, par conséquent, les coeffifficients L_1, N_1 de la seconde forme quadratique fondamentale de la surface S_1 auront des valeurs de la forme (2, 21), on aura:

$$L_1 + N_1 \mu_1 \mu_2 \equiv 0;$$

ce qui montre, eu égard que, d'après (2,22), M_1 est $\equiv 0$, que les deux systèmes de ∞^1 surfaces développables engendrées par les génératrices de la congruence (δ) attachée à la surface S_{Rj} considerée déterminent sur la surface moyenne S_1 de la congruence un réseau conjugné, dans le cas où la valeurs de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} considérée, n'est ni $= 0$ ni $= +1$ et que, par conséquent [1, p. 309], la congruence (δ) attachée à la surface S_{Rj}, même dans ce cas, est une congruence de RIBAUCOUR.

Donc *la congruence (δ) attachée à une surface S_{Rj} est une congruence de RIBAUCOUP, quelle que soit la valeur de l'indice j, à laquelle correspond la surface S_{Rj}.*

Cela étant, soit·

(4, 4) $$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2\,(u, \upsilon)$$

l'équation vectorielle par rapport au système de référence Oxyz, d'une surface S_2 dont les points correspondent aux couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface considérée S, sur laquelle les courbes $\upsilon = $ Cte, $u =$ Cte sont, par hypothèse, ses lignes de courbure.

Si la surface S est une surface S_{Rj} ayant le plan xOy du système de référence Oxyz comme plan de base et correspondant à une certaine valeur: m+1, de l'indice j, l'équation vectorielle par rapport au système Oxyz de la surface moyenne S_1 de la congruence (δ) attachée à la surface S aura la forme (3,12) et pour que la surface S_2 soit la "surface génératrice" de la congruence (δ) qui, d'après la constatation précédente, est une congruence de RIBAUCOUR, il suffit, d'après sa définition [1, p 308], que la représentation de la surface S_2 sur la surface moyenne S_1 de cette congruence, dans laquelle chaque couple de leurs points homologues est un couple des points de ces surfaces correspondant au même couple de valeurs des u, υ, soit une représentation avec orthogonalité de leurs éléments linéaires homologues et en outre que la génératrice de la congruence issue de chaque point de sa surface moyenne S_1 soit parallèle à la normale à la surface S_2 en son point homologue, dans cette représentation, de ce point de la surface S_1.

Mais la génératrice de la congruence (δ) attachée à la surface S_{Rj} considerée, S, issue de chaque point de sa surface moyenne S_1, est parallèle, d'après la définition de cette congruence donnée dans le paragraphe 3, à la normale à la surface S en son point qui — étant situé sur la normale au plan de base xOy de S menée par ce point de S_1 — correspond aux valeurs des u, υ, auxquelles correspond ce point de la surface S_1.

Or, pour que la normale à la surface S_2, en chacun de ses points soit parallèle à la génératrice de la congruence (δ) issue du point de sa surface moyenne S_1, qui, correspond au couple des valeurs des u, υ, auquel correspond ce point de la surface S_2, il faut et il suffit que les dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon}$ du second membre $\mathbf{r}_2\,(u, \upsilon)$ de son équation (4,4) puissent s'écrire sous la forme:

(4,5) $$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} = \alpha\, \mathbf{e}_1 + \beta\, \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon} = \alpha'\, \mathbf{e}_1 + \beta'\, \mathbf{e}_2.$$

En outre, pour que la représentation de la surface S_2 sur la surface moyenne S_1 de la congruence (δ), dans laquelle deux points homologues des deux surfaces correspondent au même couple de valeurs des u, υ, soit une représentation avec orthogonalité de leurs éléments linéaires homologues, il faut et il suffit que pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S et des surfaces S_1, S_2, on ait:

$$\left\{\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} d\upsilon\right\} \times \left\{\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon} d\upsilon\right\} = 0,$$

quelle que soit la valeur du rapport $\frac{d\upsilon}{du}$; il faut et il suffit donc que pour tous ces couples de valeurs des u, υ, on ait:

$$(4,6) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} = 0.$$

Ces relations, si l'on y substitue les dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon}$ par leurs expressions (3, 15) et (4,5), se remènent aux relations:

$$(4,7) \qquad \beta = -\alpha \frac{1 + m\,\xi^2}{m\xi\,\eta}, \quad \beta' = -\alpha' \frac{m\,\xi\,\eta}{1 + m\,\eta^2}, \quad \alpha' = \alpha \frac{m\,\xi\,\eta}{1 + m\,\eta^2} \sqrt{\frac{G}{E}}$$

et, grâce aux (4,7), si l'on pose:

$$(4,8) \qquad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\alpha}{m\,\xi\,\eta} = \lambda,$$

les équations (4,5) peuvent s'écrire sous la forme:

$$(4,9) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} = \lambda \left\{ \mathbf{e}_1\, m\xi\eta - \mathbf{e}_2\,(1 + m\,\xi^2) \right\} \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \upsilon} = \lambda \left\{ \mathbf{e}_1\,(1 + m\eta^2) - \mathbf{e}_2\, m\xi\eta \right\} \sqrt{G}.$$

Or, si la condition d'intégrabilité des équations (4,9) est remplie, ces deux équations déterminent le second membre $\mathbf{r}_2$ (u, υ) de l'équation (4,4) de manière que, la surface S_2 définie par cette équation à un deplacement parallère près, soit ls surface génératrice de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à la surface S_{Rj} considérée S.

Mais la condition d'intégrabilité des deux équations (4,9), dans le cas envisagé, si l'on y substitue les dérivées du premier ordre par rapport à u et à υ des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ et des ξ, η par leurs valeurs (2,4) et (2,11), acquiert la forme:

$$A\,\mathbf{e}_1 + B\,\mathbf{e}_2 + C\,\mathbf{l}_o = 0, \tag{4,10}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial\lambda}{\partial\upsilon}\, m\,\xi\,\eta\,\sqrt{E} - \frac{\partial\lambda}{\partial u}\{1 + m\,\eta^2\}\sqrt{G} + \lambda\,\xi\,\zeta\,\sqrt{EG}\,k_2,\\ B &= -\frac{\partial\lambda}{\partial\upsilon}\{1 + m\,\xi^2\}\sqrt{E} + \frac{\partial\lambda}{\partial u} m\,\xi\,\eta\,\sqrt{G} + \lambda\,\eta\,\zeta\,\sqrt{EG}\,k_1,\\ C &= -\lambda\,\{k_1\,(1 + m\,\eta^2) + k_2\,(1 + m\,\xi^2)\}\sqrt{EG} \end{aligned}\right. \tag{4,11}$$

et cette condition, eu égard que les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ sont en chaque point de la surface S linéairement indépendants, n'est remplie que si — et seulement si — on a:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0 \tag{4, 12}$$

pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S.

La troisième condition (4,12), d'après le théorème I, est remplie, puisque S est, par hypothèse, une surface S_{Rj} ayant le plan xOy du système de référence comme plan de base et correspondant à la valeur m+1 de l'indice j.

Donc, dans le cas envisagé, la condition d'intégrabilité des deux équations (4,9) est remplie, si le facteur λ—qui figure dans ces équations—est la fonction scalaire $\lambda\,(u, \upsilon)$ satisfaisant aux deux premières équations (4,12) qui, eu égard aux valeurs (4,11) de leurs premiers membres A, B, sont deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires.

Le système de ces deux équations se ramène, à l'aide de (2,8) et de la troisième équation (4,12), au système des équations:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -m\,\xi\,\frac{k_1\sqrt{E}}{(1+m)-m\,\zeta^2}, \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\upsilon} = -m\eta\,\frac{k_2\sqrt{G}}{(1+m)-m\zeta^2} \tag{4,13}$$

qui, dans le cas envisagé, sont compatibles, car la condition d'intégrabilité de ces deux équations — comme on le reconnaît en faisant usage des (2,5), (2,7) et (2,11) — est remplie.

Or, les deux équations (4,9), lorsque le coefficient λ — qui y figure — est la fonction scalaire λ (u, υ) qui-étant définie à un facteur constant près — satisfait aux deux équations compatibles (4, 13), sont compatibles et déterminent le second membre $\mathbf{r}_2$ (u, υ) de l'équation (4,4) de manière que la surface S_2, définie par cette équation à une homothétie dont le centre est l'origine O du système de référence et un deplacement parallèle près, jouisse des deux propriétés précitées qui caractérisent la surface génératrice de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à la surface S_{Rj} considerée S.

Cela étant soit:

$$(4,\ 14) \qquad \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2\,(u,\upsilon) + \mathbf{z}_o\, m\,\{\mathbf{z}_o \times \mathbf{r}_2\,(u,\upsilon)\} \equiv \mathbf{r}_2'\,(u,\upsilon)$$

l'équation vectorielle, par rapport au système de référence Oxyx, d'une surface S_2' dont les points correspondent aux couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S_{Rj} considérée, S, la fonction $\mathbf{r}_2$ (u, υ) — qui y figure — étant le second membre de l'équation (4,4) de la surface génératrice de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à la surface S_{Rj} considérée, S, sur laquelle les courbes υ = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, tandis que le coefficient m est la constante liée à la valeur de j, à laquelle correspond la surface S, par la relation $m - j + 1 = 0$.

Si la surface S_2' est la surface directrice de la congruence rectiligne (δ') que l'on obtient en menant par chacun de ses points la parallèle à la normale à la surface S_2, en son point qui — étant situé sur la normale au plan xOy issue de ce point de S_2' — correspond au couple des valeurs des u, υ, auquel correspond ce point de S_2', la génératrice de cette congruence issue de chaque point de S_2' est parallèle, d'après les formules (4,9) au vecteur unitaire $\mathbf{l}_o$ (u, υ), auquel est parallèle la normale à la surface S_{Rj} considérée, S, en son poidt correspondant aux valeurs des u, υ, auquelles correspond le point P_2' de S_2'.

Mais le point P_2' de la surfaire S_2', qui correspond aux valeurs des u, υ, auxquelles correspond le point courant P_2 (u, υ) de la surface S_2, d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 2, est un point de la normale au plan xOy du système de référence menée par le point P_2, qui détermine avec le point P_2' et sa projection orthogonale P_2'' sur le plan xOy les vecteurs $\overline{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2'} = (P_2\,P_2')\,\mathbf{z}_o$, $\overline{P_2'P_2''} = (P_2'P_2'')\,\mathbf{z}_o$, le rapport des grandeurs algébriques (P_2P_2'), $(P_2'P_2'')$ desquelles est:

$$\frac{(P_2 P_2')}{(P_2' P_2'')} = - \frac{m}{1+m} = \mathrm{Cte} \tag{4,15}$$

pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface S et des surfaces S_2, S_2',

Par ailleurs, en faisant usage des (4,9) et (2,10), on obtient pour les dérivées du premier ordre par rapport à u et à υ du second membre $\mathbf{r}_2'$ (u, υ) de l'équation (4,14) de la surface S_2', les expressions:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial u} &= \lambda \{ \mathbf{e}_1\, m\, \xi \eta - \mathbf{e}_2\, (1 + m \xi^2) - \mathbf{z}_0\, m\, \eta \} \sqrt{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u} &= \lambda \{ \mathbf{e}_1\, (1 + m \eta^2) - \mathbf{e}_2\, m\, \xi \eta + \mathbf{z}_0\, m\, \xi \} \sqrt{G}. \end{aligned} \right. \tag{4,16}$$

Or, si l'on tient compte du fait que, d'après les formules (4,9), la normale à la surface S_2, en son point P_2 correspondant aux valeurs des u, υ, auquelles correspond le point courant P (u, υ) de la surface considérée S, est parallèl au vecteur unitaire $\mathbf{l}_0$ (u, υ) et que, par conséquent, il en est de même de la génératrice de la congruence (δ') issue du point P_2' de S_2' correspondant aux valeurs des u, υ, auxquelles correspondent les points P_1, P_2 des surfaces S, S_2, on constate, en ayant égard aux (4,16) et (3,14). que l'on a:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial \upsilon} \wedge \mathbf{l}_0 \right) - \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_0}{\partial u} \wedge \mathbf{l}_0 \right) \equiv 0;$$

ce qui montre, d'après le résultat final du paragraphe 2, que la surface S_2' est la surface moyenne de la congruence (δ') et que, par conséquent, la surface S_2, d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 3, est également une surface S_{Rj} qui — ayant le plan xOy comme plan de base — correspond à la valeur m+1 de l'indice j.

On peut donc, grâce aux considérations précédeates, formuler le *Théorème II. La congruence rectiligne (δ) attachée à une surface S_{Rj} est une congruence de RIBAUCOUR dont la surface génératrice est également une surface S_{Rj} qui — étant définie à une homothétie et un deplacement parallèle près — admet le même plan de base avec la surface S_{Rj}, à laquelle la congruence est attachée et correspond à la même avec cette surface S_{Rj} valeur de l'indice j.*

Par ailleurs, en ayant égard aux valeurs (4,16) des dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon}$ du second membre $\mathbf{r}_2'$ (u, υ) de l'équation (4,14) de la surface moyenne S_2' de la congruence (δ′) de RIBAUCOUR attachée à la surface génératrice S_2' de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à la surface S_{Rj} considérée, S, sur laquelle les courbes υ = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, en vertu des (2, 3), (2,10) et (4,16), on aura:

$$(4,17) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u} \equiv 0, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon} \equiv 0, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u} \equiv 0;$$

ce qui montre que la représentation des surfaces S, S_2', l'une sur l'autre, dans laquelle deux points homologues des deux surfaces correspondent au même couple de valeurs des u, υ, est une représentation avec orthogonalité de leurs éléments linéaires homologues, car en leurs points correspondants au même couple de valeurs des u, υ, d'après (4,17), on a:

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} d\upsilon \right\} \times \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}_2'}{\partial \upsilon} d\upsilon \right\} = 0,$$

quelle que soit la valeur du rapport $\frac{d\upsilon}{du}$.

En outre, la normale à la surface S en son point courant P (u, υ) est parallèle à la génératrice de la congruence (δ′) issue du point P_2' de la surface moyenne S_2' de cette congruence, qui correspond aux valeurs des u, υ, auxquelles correspond le point P de S, car ces deux droites sont parallèles — comme nous l'avons déjà signalé — au vecteur unitaire $\mathbf{l}_o$ (u, υ).

Il en résulte que la surface S_{Rj} considerée, S, est une surface génératrice de la congruence (δ′), de RIBAUCOUR attachée à la surface génératrice S_2 de congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à la durface S_{Rj} considerée et ce résultat joint aux considérations précédentes permet de formuler le

Théorème III.— A chaque surface S_{Rj} une autre peut être associée; celle-ci ainsi que la surface à laquelle est elle-même associée, sont deux surfaces S_{Rj} chacune desquelles est une surface génératrice de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à l'autre. Ces deux surface S_{Rj} admettent le même plan de base et correspondent à la même valeur de l'indice j.

D'autre part, l'équation, par rapport au système de référence Oxyz, de la surface moyenne S_1 de la congruence (δ) attachée à la surface S_{Rj} considerée, S, sur laquelle les courbes υ = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 3, est une équation de la forme (2, 12), dans laquelle la fonction $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de S et le coefficient m est la constante m_o liée à la valeur j_o de j, à laquelle correspond la surface S, par la relation $m_o - j_o + 1 = 0$.

Cela posé, si la valeur j_o de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} considerée S, est = 0, la surface S_1 — comme nous l'avons déjà signalé dans ls paragraphe 3 — coïncide avec le domaine σ_{Rj} de son plan de base, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de S, tandis que, si j_o est $\neq 0$, est une surface non plane dont la normale en son point P_1 appartenant à la normale au plan de base xOy de S issue de son point courant P (u, υ) et correspondant aux valeurs des u, υ, auxquelles correspond ce point de S, est parallèle, d'après (2,18), au vecteur:

$$\mathbf{l}_1 = \{1 + m_o\}\,\mathbf{l}_o - m_o\,\zeta\mathbf{z}_o. \tag{4, 18}$$

Mais, si l'on tient compte que, dans le cas envisagé, grâce aux (2,3), (2,4) et (2,10), on a:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} &= -\,k_1\,\{(1+m_o)\;\mathbf{e}_1 - m_o\;\xi\;\mathbf{z}_o\}\,\sqrt{E},\\ \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} &= -\,k_2\,\{(1+m_o)\;\mathbf{e}_2 - m_o\;\eta\;\mathbf{z}_o\}\,\sqrt{G}, \end{aligned}\right. \tag{4,19}$$

en vertu des (4,18), (4,19) et du fait que le système (2,3) des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ est en chaque point de S trirectangle et dans cet ordre direct, on aura:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u}\,\Lambda\;\mathbf{l}_1 &= k_1\,\{\mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_o\;m\;\eta\}\;\{1+m_o\}\;\sqrt{E},\\ \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon}\,\Lambda\;\mathbf{l}_o &= -\,k_2\,\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_o\,m\,\xi\}\;\{1+m_o\}\;\sqrt{G}. \end{aligned}\right. \tag{4,20}$$

et, d'après (2,3), si $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de S, on aura:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) = -\{1+m_o\}\{k_1(1+m_o \eta^2)+k^2(1+m_o \xi^2)\},$$

On aura donc, d'après la supposition faite concernant la surface S,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) = 0$$

pour tous les couples des valeurs des u, v, auxquels correspondent les points des surfaces S, S_1.

Or la surface S, d'après le résultat final du paragraphe 2, est la surface moyenne de la congruence rectiligne que l'on obtient en menant par chacun de ses poiçts la parallèle à la normale à la surface S_1 en son point situé sur la normale au plan xOy du système de référence Oxyz issue de ce point de la surface S.

Mais, si la valeur j_o de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} considerée S, n'est ni $\equiv + 1$ ni $= 0$, la surface S_1 ne coïncide ni avec la surface S ni avec le domaine σ_{Rj} du plan xOy du système de référence, qui, par hypothèse, est le plan de base de la surface S.

Cela étant, dans la représentation des surfaces S, S_1, l'une sur l'autre, dans laquelle chaque couple de leurs points homologues est un couple de points de ces surfaces, qui — étant situés sur la même normale au plan xOy — correspondent au même couple de valeurs des u, υ, si P_1 est le point de la surface S_1 homologue du point courant P (u, υ) de la surface S et que $\overline{P_1P} = (P_1P)\ \mathbf{z}_o$, $\overline{PP'} = (PP')\ \mathbf{z}_o$ soient les vecteurs que les points P_1, P et leur projection orthogonale P′ sur le plan xOy déterminent dans cet ordre, on aura:

$$(4{,}21) \qquad \frac{(P_1\, P)}{(P\, P')} = m_o = j_o - 1$$

pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les couples de points homologues des surfaces S, S_1. On le reconnaît en tenant compte du fait que la surface S_1 est définie, par rapport au système de référence Oxyz, par l'équation vectorielle:

$$(4{,}22) \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\,(u, \upsilon) + \mathbf{z}_o\, m_o \{\mathbf{z}_o \times \mathbf{r}\,(u, \upsilon)\} \equiv \mathbf{r}_1\, u, \upsilon),$$

où $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S et m_o est $= j_o - 1$.

Cela étant la surface S_1, d'après la proposition finale du paragraphe 3, est une surface S_{Rj} ayant le même plan de base avec la surface S_{Rj} considerée S. En outre si $j_o' = m_o' + 1$ est la valeur de j, à laquelle correspond cette surface S_{Rj}, on a:

$$(4,23) \qquad j'_o = \frac{1}{j_o};$$

car le rapport $\frac{(P_1 P)}{(P P')}$ qui, pour chaque couple de points homologues des surfaces S, S_1, dans la représentation précitée de l'une sur l'autre, d'après (4,21), est $m_o = j_o - 1$, d'après (2,13), est:

$$\frac{(P_1 P)}{(P P')} = - \frac{m'_o}{1 + m'_o} = \frac{1 - j'_o}{j'_o}.$$

On peut donc, grâce aux considérations précédentes, formuler le *ThéorèmeIV.— La surface moyenne de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à une surface S_{Rj} correspondant à la valeur j_o de j, si j_o est $= 0$, coïncide avec le domaine σ_{Rj} de son plan de base, tandis que, si j_o est $\neq 0$, est une surface S_{Rj} qui-ayant le même plan de base avec la surfave S_{Rj} à laquelle est attachée la congruence — correspond à la valeur $\frac{1}{j_o}$ de j. Dans ce dernier cas chacune de ces deux surfaces S_{Rj} est la surface moyenne de la congruence (δ) de RIBAUCOUR attachée à l'autre.*

II

5. Envisageons en second lieu la surface S_1 qui, par rapport au système de référence Oxyz est définie par l'équation vectorielle:

$$(5,1) \qquad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\ (u, \upsilon) + \mathbf{z}_o\ m\ \{\mathbf{z}_o \times \mathbf{r}\ (u, \upsilon)\} \equiv \mathbf{r}_1\ (u, \upsilon),$$

où m est un nombre réel $\neq 0$ et $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface considerée S, sur laquelle les courbes $\upsilon =$ Cte, $u =$ Cte sont, par hypothèse, ses lignes de courbure.

La surface S_1 — qui, si m est $= -1$, coïncide avec le domaine du plan xOy du système de référence, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S et qui, par conséquent, est une surface minima plane, — si m est un nombre réel $\neq -1$, n'est une surface minima, d'après la seconde des remarques finales du paragraphe 3, que si — et seulement si — la congruence engendrée par les normales à cette surface admet cette même surface comme surface moyenne. Donc, d'après le résultat final du paragraphe 2, la surface S_1, n'est une surface minima si m est un nombre réel $\neq -1$, que si — et seulement si — le second membre $\mathbf{r}_1$ (u, υ) de l'équation (5,1) de la surface S_1 et le vecteur:

$$(5,2) \qquad \mathbf{l}_1 = \{1 + m\} \mathbf{l}_o (u, \upsilon) - m \zeta (u, \upsilon) \mathbf{z}_o$$

auquel est parallèle, d'après (2,18), la normale à la surface S_1 en son point P_1 correspondant au couple des valeurs des u, υ, auquel correspond le point courant P (u, υ) de la surface S, sont des fonctions vectorielles des u, υ satisfaisant pour tous les couples des valeurs des u,v, auxquels correspondent les points des surfaces S, S_1, à l'équation:

$$(5,3) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) - \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) = 0.$$

Le premier membre de (5,3) acquiert, dans le cas envisagé, la forme:

$$(5,4) \qquad -\{1 + m\} [k_1 \{1 + (2m + m^2) \eta^2\} + k_2 \{1 + (2m + m^2) \xi^2\}] \sqrt{EG},$$

où k_1, k_2 sont les courbures principales de la surface S en son point courant P(u,v) et ξ, η sont les cosinus des angles que le vecteur unitaire $\mathbf{z}_o$ normal au plan xOy du système de référence, forme avec les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ respectivement parallèles aux tangentes aux lignes de courbure υ = Cte, u = Cte de S issues de ce point.

On parvient à l'expression (5,4) du premier membre de l'équation (5,3) en tenant compte que, dans le cas envisagé, le système (2,3) des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_o$ est en chaque point de S trirectangle et dans cet ordre direct et que, cela étant, on a, d'après (2, 14), pour les dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial \upsilon}$ du second membre $\mathbf{r}_1$, (u, υ) de l'équation (5,1) de la surface S_1 les exprssions:

$$(5,5) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} = \{\mathbf{e}_1 + z_o\ m\ \xi\}\ \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \upsilon} = \{\mathbf{e}_2 + z_o\ m\ \eta\}\ \sqrt{G}$$

et pour les produits vectoriels $\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \wedge \mathbf{l}_1$, $\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \wedge \mathbf{l}_1$ les valeurs:

$$(5,6) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \wedge \mathbf{l}_1 = \{1+m\}\ \{\mathbf{e}_2 + z_o\ m\ \eta\}\ k_1\ \sqrt{E}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \wedge \mathbf{l}_1 = -\{1+m\}\ \{\mathbf{e}_1 + z_o\ m\ \xi\}\ k_2\ \sqrt{G}. \end{cases}$$

Or, d'après le théorème I, *la surface S_1 qui, par rapport au système de référence Oxyz est définie par l'équation (5,1) dans laquelle* $\mathbf{r}\ (u,\upsilon)$ *est le second membre de l'équation (2,1) de la surface non plane S et m est un nombre réel* $\neq -1$, *est une surface minima si — et seulement si — S est une surface* S_{Rj} *qui — ayant le plan xOy du système de référence comme plan de base — correspond, à la valeur* $(1+m)^2$ *de l'indice j.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est le fait que à chaque surface S_{Rj} sont attachées deux surfaces minima qui — étant en général distinctes — se confondent et coïncident avec le domaine σ_{Rj} de son plan de base dans le seul cas où la valeur de j,à laquelle correspond la surface S_{Rj} est $= 0$.

En effet, si la surface considérée S, sur laquelle les courbes $\upsilon = $ Cte, $u = $ Cte sont ses lignes de courbure, est une surface S_{Rj} qui — ayant le plan xOy du système de référence Oxyz comme plan de base — correspond à la valeur j_o de l'indice j, les deux surfaces qui, par rapport au systéme Oxyx, sont définies par les deux équations que l'on obtient de l'équation (5,1), dans laquelle la fonction $\mathbf{r}$ (u, v) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S, en y remplaçant m par ses deux valeurs:

$$(5,7) \qquad m_{1,2} = -1 \pm \sqrt{j_o},$$

sont, d'après la proposition précédente, deux surfaces minima qui ne sont réelles que si j_o est un nombre réel $\geqslant 0$ et — étant en général distinctes — se confondent et coïncident avec le domaine σ_{Rj} du plan de base de la surface S_{Rj}, si j_o est $= 0$.

En outre, en tenant compte du fait, que les deux surfaces minima attachées à la surface S_{Rj} considerée, S, qui sont distinctes, si j_o est $\neq 0$, sont définies, par rapport au système de référence Oxyz, par les deux équations de la forme (2,12), que l'on obtient en remplacant m dans l'équation (5,1) par ses deux valeurs (5,7), on reconnaît, en ayant égard aux valeurs (2,15) des coefficients de la première forme quadratique fondamentale de la surface définie par l'équation (2,12), que, si E_1', F_1', G_1' et E_1'', F_1'', G_1'' sont les coefficients des premières formes quadratiques fondamentales de ces deux surfaces minima, on auras:

$$E_1'' = E_1', \quad F_1'' = F_1', \quad G_1'' = G_1'$$

pour tous les couples des valeurs des u, v, auxquels correspondent les points de la surface S_{Rj} considérée et des deux surfaces minima attachées à cette surface.

Il en résulte que ces deux surfaces minima, dans le cas où elles sont distinctes, sont applicables l'une sur l'autre, les droites que déterminent les couples de leurs points homologues dans cette représentation isométrique de l'une sur l'autre, étant normales au plan de base xOy de la surface S_{Rj} à laquelle elles sont attachées.

On peut donc, grâce aux constatations précédentes, formuler le

Théorème V.— A chaque surface S_{Rj} sont attachées deux surfaces minima qui — étant en général distinctes — se confondent et coïncident avec le domaine σ_{Rj} du plan de base de la surface S_{Rj}, si la valeur de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj}, est$=0$ et ne sont réelles que si j est un nombre réel$\geqslant 0$. Ces deux surfaces minima, dans le cas où elles sont distinctes, sont applicables l'une sur l'autre.

Si les deux surfaces minima attachées à la même surface S_{Rj} se confondent et coïncident avec le domaine σ_{Rj} de son plan de base, la valeur de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} étant $= 0$, la surface S_{Rj} est une surface harmonique.

Dans ce cas dans la représentation de la surface S_{Rj} sur le domaine σ_{Rj} de son plan de base, dans laquelle à chaque point de cette surface correspond sur le domaine σ_{Rj} la projection orthogonale de ce point sur le plan de base de la surface, au réseau de ses lignes asymptotiques correspond. comme on sait [3, p. 101] — sur le domaine σ_{Rj} un réseau de courbes orthogonal.

De même, dans le cas où les deux surfaces minima attachées à une surface S_{Rj}, sont distinctes, la valeur de j, à laquelle correspond la surface S_{Rj} étant $\neq 0$, dans la représentation de la surface S_{Rj}, sur chacune d'elles, dans laquelle les couples de leurs points homologues déterminent des droites normales au plan de base de la surface S_{Rj}, au réseau de ses lignes asymptotiques correspond sur la surface minima un réseau de courbes orthogonal. On le reconnaît en supposant que la surface considérée S soit une surface S_{Rj} qui-ayant le plan xOy du système de référence Oxyz comme plan de base-correspond à une valeur $\neq 0$ de j. Cela étant, d'après les considérations précédentes, les deux surfaces minima attachées à la surface S, qui — dans ce cas — sont distinctes, sont définies, par rapport au système Oxyz, par deux équations de la forme (2,12), dans lesquelles la fonction $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S et, d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe 2, dans la représentation précitée de la surface S_{Rj} sur chacune d'elles, au réseau de ses lignes asymptotiques, correspond sur la surface minima le réseau de ses lignes asymptotiques, qui — comme on sait-est un réseau de courbes orthogonal.

On peut donc formuler le

Théorème VI. Dans la représentation d'une surface S_{Rj} sur chacune des deux surfaces minima (distinctes ou coïncidantes) qui lui sont attachées, dans laquelle les couples de leurs points homologues déterminent des droites normales au plan de base de la surface S_{Rj}, au réseau des lignes asymptotiques de cette surface correspond sur la surface minima un réseau de courbes orthogonal qui, dans le cas où les deux surfaces minima attachées à la surface S_{Rj} sont distinctes, est également le réseau des lignes asymptotiques de la surface minima.

Par ailleurs, si la surface considerée S est une surface minima non plane et que, par conséquent, en chaque point de S ses courbures principales k_1, k_2 — étant toutes les deux $\neq 0$ — soient liées par la relation:

$$k_1 + k_2 = 0, \tag{5,8}$$

on peut admettre que, grâce au choix convenable des coordonnées curvilignes u, v sur la surface S, les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S sont ses lignes de courbure, tandis que, si E, F, G sont les coefficients de la première forme quadratique fondamentale de S, on a:

$$E = G = \lambda\ (u, \upsilon),\ F \equiv 0, \tag{5,9}$$

car, dans ce cas, le réseau des lignes de courbure de cette surface est-comme on sait [2, p. 253] — un réseau isotherme. Or, si la surface S qui, par rapport au système de référence Oxyz est définie par l'équation (2,1) — est une surface minima sur laquelle le réseau (u, υ) est isotherme, les courbes v = Cte u = Cte étant ses lignes de courbure, la surface S_1 qui, par rapport au système Oxyz est définie par l'équation (5,1), dans laquelle la fonction $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de S et le coefficient m est une constante $\neq -1$, est une surface S_{Rj}, le plan xOy du système de référence étant son plan de base, si la surface S_1' qui, par rapport au système Oxyz, est définie par l'équation vectorielle:

$$(5,10) \qquad \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 (u, \upsilon) + \mathbf{z}_0 m' \{ \mathbf{z}_0 \times \mathbf{r}_1 (u, \upsilon) \} \equiv \mathbf{r}_1' (u, \upsilon)$$

où $\mathbf{r}_1$ (u, υ) est le second membre de l'équation (5,1) et m' est une constante, est, d'après la proposition relative à cette question établie dans le paragraphe 3, la surface moyenne de la congruence rectiligne que l'on obtient en menant par chacun de ses points la parallèle à la normale à la surface S_1, en son point qui-étant situé sur la normale au plan xOy issue de ce point de S_1', correspond au même avec ce point de S_1' couple de valeurs des u, υ.

La valeur j' de l'indice j, à laquelle correspond la surface S_1, qui, dans le cas où cette condition est remplie, est une surface S_{Rj}, sera liée à la constante m', d'après (3,1), par la relation $m' - j' + 1 = 0$

Afin que la surface S', soit la surface moyenne de la congruence rectiligne considerée, il suffit, d'après le résultat final du paragraphe 2, que le second membre $\mathbf{r}_1'$ (u, υ) de l'équation (5,9) de la surface S_1' et le vecteur:

$$\mathbf{l}_1 (u, \upsilon) = \{ 1 + m \} \mathbf{l}_0 (u, \upsilon) - m \zeta (u, \upsilon) \mathbf{z}_0$$

auquel est parallèle, d'après (5,2), la normale à la surface S_1 en son point P_1 (u,v) correspondant aux valeurs des u,v, auxquelles correspond le point courant P (u, υ) de la surface minima S, soient des fonctions vectorielles des u, υ satisfaisant à l'équation :

$$(5,11) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) - \frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial \upsilon} \times \left(\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \mathbf{l}_1 \right) = 0$$

pour tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface minima S et des surfaces S_1, S_1'.

Mais le premier membre de l'équation (5,10), compte tenu que, dans le cas envisagé, le système (2,3) des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{l}_0$ est en chaque point de la surface minima S trirectangle et dans cet ordre direct et que, cela étant, grâce aux (2,3), (2,20), (2,11), (5,7) et (5,9), on aura pour les dérivées $\frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial \upsilon}$ du second membre $\mathbf{r}_1'$ (u, υ) de l'équation (5,9) de la surface S_1' les expressions:

$$(5,11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial u} &= \Big[\mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0 \; \{ m + m' \; (1 + m) \} \; \xi \Big] \sqrt{\lambda}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1'}{\partial \upsilon} &= \Big[\mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0 \; \{ m + m' \; (1 + m) \} \; \eta \Big] \sqrt{\lambda} \end{aligned} \right.$$

et pour les produits vectoriels $\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \, \mathbf{l}_1$, $\frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \, \mathbf{l}_1$ les valeurs:

$$(5,12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial u} \Lambda \, \mathbf{l}_1 &= \{ 1 + m \} \; \{ \mathbf{e}_2 + \mathbf{z}_0 \, m \, \eta \} \; k_1 \sqrt{\lambda}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \upsilon} \Lambda \, \mathbf{l}_1 &= \{ 1 + m \} \; \{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{z}_0 \, m \, \xi \} \; k_1 \sqrt{\lambda}, \end{aligned} \right.$$

acquiert, grâce aux (5,11) et (5,12), la forme:

$$\{ 1 + m \} \; \{ 2\,m + m^2 + m' \; (1 + m^2) \} \; \{ \xi^2 - \eta^2 \} \, k_1 \, \lambda;$$

ce qui montre que l'équation (5,10) est vérifiée par tous les couples des valeurs des u, υ, auxquels correspondent les points de la surface minima S et des surfaces S_1, S_1', si l'on a:

$$(5,13) \qquad m' = \frac{1 - (1 + m)^2}{(1 + m^2)}.$$

Or, la surface S_1 qui, par rapport au système de référence Oxyz, est définie par l'équation (5,1), dans laquelle la fonction $\mathbf{r}$ (u, υ) est le second membre de l'équation (2,1) de la surface S qui, par hypothèse, est une surface minima non plane, si m est un nombre réel $\neq -1$, est une surface S_{R_j} ayant le plan xOy du système de référence Oxyz comme plan de base et correspondant à la valeur:

$$(5,14) \qquad j' = m' + 1 = \frac{1}{(m + 1)^2}$$

de l'indice j. La surface minima S est l'une des deux surfaces minima qui, d'après le théorème V, sont attachées à cette surface S_{Rj}.

Les considérations précédentes, compte tenu que le plan xOy du système de référence Oxyz, qui a été joint à la surface minima S, est un plan arbitrairement choisi, permettent de formuler le:

Théorème VII. En joignant à une surface minima réelle non plane S un plan (π), on peut associer à chaque nombre réel $m \neq -1$ une surface S_{Rj} qui — ayant le plan (π) comme plan de base-correspond à la valeur $\frac{1}{(m+1)^2}$ de l'indice j. La surface minima S est l'une des deux surfaces minima attachées à cette surface S_{Rj}.

Il est à noter que la surface S_{Rj} définie par l'équation (5,1), si m est = 0, coïncide avec la surface S qui — étant, par hypothèse, une surface minima — peut être considérée comme une surface S_{Rj} correspondant à la valeur + 1 $\left(= \frac{1}{(m+1)^2}\right)$ de l'indice j et ayant comme plan de base un plan choisi arbitrairement, car, dans ce cas le fait que chacune des coordonnées x, y, z des points de S par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz est une fonction des deux autres satisfaisant nécessairement à une équation de la forme (1,1) pour la valeur + 1 du paramètre unique j, que cette équation renferme, exprime que en chaque point de cette surface sa courbure moyenne est = 0.

III

6. Supposons enfin que la troisième des coordonnées x, y, z des points de la surface considerée S, par rapport au système de référence Oxyz, soit une fonction des deux premières:

$$z = z\,(x, y) \tag{6,1}$$

de classe C^k $(k \geqslant 3)$ dans le domaine σ du plan xOy du système de référence, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S et que, dans ce domaine, les dérivées du premier ordre de z par rapport à x et à y soient $\neq 0$.

La supposition faite permet de considérer les coordonnées x et y des points de la surface S comme fonctions implicites définies par l'équation (6,1) des coordonnées y, z et z, x respectivement des points de S par rapport au système de référence Oxyz et, en désignant, pour abréger, les dérivées du premier et du second ordre par rapport à x et à y de z par leurs notations habituelles (3,3), d'obtenir pour les dérivées du premier et du second ordre par rapport à y et à z de x et par rapport à z et à x de y les expressions:

$$(6,2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{q}{p}, \quad \dfrac{\partial x}{\partial z} = \dfrac{1}{p}, \quad \dfrac{\partial x^2}{\partial y^2} = \dfrac{2spq - rq^2 - tp^2}{p^3}, \\ \qquad \dfrac{\partial z^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{rq - sp}{p^3}, \quad \dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\dfrac{r}{p^3} \end{array} \right.$$

et

$$(6,3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{1}{q}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{p}{q}, \quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\dfrac{t}{q^3}, \quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \dfrac{tp - sq}{p^3}, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{2spq - rq^2 - tp^2}{q^3}. \end{array} \right.$$

Cela étant supposons que les deux premières des coordonnées x, y, z des points de S, par rapport au système de référence, soient chacune une fonction des deux autres satisfaisant toutes les deux à une équation aux dérivées partielles de la forme de l'équation (1,1) du paragraphe 1 pour la même valeur j_o du coefficient unique j que cette équation renferme et, par conséquent, satisfaisant la coordonnée x à l'équation:

$$(6,4) \qquad \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 j_o\right\} - 2\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z} j_o + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left\{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 j_o\right\} = 0$$

et la coordonnée y à l'équation:

$$(6,5) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 j_o\right\} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial x} j_o + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 j_o\right\} = 0.$$

Dans ce cas, la coordonnée z des points de S doit être une fonction des coordonnées x, y des points de S satisfaisant simultanement aux équations:

$$(6,6) \quad 2\,spq - r\,(q^2 + 1) - t\,(p^2 + J_o) = 0, \quad 2\,spq - r\,(q^2 + J_o) - t\,(p^2 + 1) = 0,$$

auxquelles se ramènent, à l'aide des (6,2) et (6,3), les équations (6,4) et (6,5), pour tous les couples des valeurs des x, y, auxquels correspondent les points de la surface S et du domaine σ du plan xOy du système de référence.

Or, d'après les équations (6,6), la coordonnée z des points de S, si j_0 est $\neq +1$, doit être une fonction des coordonnées x, y de ces points satisfaisant aux équations:

$$(6,7)\quad 4\,spq - r\{2q^2 + (1 + J_0)\} - t\{2p^2 + (1 + J_0)\} = 0,\ r - t = 0$$

et, si de plus j_0 est $\neq -1$, d'après la première de ces équation, z doit être une fonction des x, y satisfaisant à une équation de la forme (1,1) pour la valeur $\dfrac{2}{1 + j_0}$ du coefficient unique j que cette équation renferme.

En outre, si j_0 est $= +1$, les équations (6,6) se réduisent toutes les deux à l'équation:

$$2\,spq - r\,(q^2 + 1) - t\,(p^2 + 1) = 0;$$

ce qui montre que, même dans le cas où j_0 est $= +1$, la coordonnée z des points de S-qui, dans ce cas, est une surface minima — est une fonction des coordonnées x, y de ces points satisfaisant à une équation de la forme (1,1) pour la valeur $\dfrac{2}{1 + j_0}$ $(= +1)$ du coefficient j et cette constatation jointe à la précédente permet de formuler le

Théorème VIII.— Si deux des coordonnées x, y, z des points d'une surface réelle non plane S de E^3, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz, sont chacune une fonction des deux autres satisfaisant toutes les deux à une équation aux dérivées partielles de la forme (1,1) pour la même valeur $j_0 \neq -1$du coefficient unique j que cette équation renferme, la troisième coordonnée des points de S est une fonction des deux autres satisfaisant également à une équation de la forme (1,1) *pour la valeur* $\dfrac{2}{1 + J_0}$ *du coefficient j.*

Par ailleurs, d'après la seconde des équations (6,7), auxquelles se ramènent les équations (6,6) *dans le cas où j_0 est $\neq -1$* et, par conséquent, *dans le cas où S n'est pas une surface minima*, la coordonnée z des points de la surface S, lorsque les coordonnées x, y de ces points, par rapport au système de référence Oxyz, jouissent de la propriété qui vient d'être signalée, doit être une fonction des coordonnées x, y des points de S de la forme:

$$z = f(\omega) + f'(\omega'), \tag{6,8}$$

où :

$$\omega = x + y, \qquad \omega' = x - y \tag{6,9}$$

satisfaisant à la première équation (6,7).

D'autre part, il est aisé de reconnaître que ces conditions sont en outre suffisantes afin que les deux premières des coordonnées x, y, z des points de S, par rapport au système de référence considéré, jouissent de la propriété signalée dans le cas où j_0 est un nombre réel $\neq \pm 1$.

Mais, si j_0 est $\neq \pm 1$, pour que la première équation (6,7) soit vérifiée par une fonction z (x, y) de la forme $f(\omega) + f'(\omega')$, où $\omega = x + y$, $\omega' = x - y$, il faut et il suffit, eu égard au fait que, dans ce cas, on a:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{df}{d\omega} + \dfrac{df'}{d\omega'}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{df}{d\omega} - \dfrac{df'}{d\omega'}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{d^2f}{d\omega^2} + \dfrac{d^2f'}{d\omega'^2}, \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{d^2f}{d\omega^2} - \dfrac{d^2f'}{d\omega'^2}, \end{array}\right.$$

que f et f′ soient des fonctions des ω et ω' respectivement satisfaisant aux équations différentielles ordinaires:

$$\left\{\frac{1}{4\left(\dfrac{df}{d\omega}\right)^2 + (1 + j_0)}\right\} \frac{d^2f}{d\omega^2} = C, \quad \left\{\frac{1}{4\left(\dfrac{df'}{d\omega'}\right)^2 + (1 + j_0)}\right\} \frac{d^2f'}{d\omega'^2} = -C \tag{6,10}$$

où C est une constante qui — la surface S étant, par hypothèse, non plane — est $\neq 0$.

Donc, *afin que les deux premières des coordonnées x, y, z des points d'une surface réelle non plane S de E^3, par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire $Oxyz$, soient chacune une fonction des deux autres satisfaisant toutes les deux à une équation aux dérivées partielles de la forme* (1,1) *du paragraphe* 1, *pour la même valeur j_0 du coefficient j, que renferme cette équation, il faut et il suffit, si j_0 est $\neq \pm 1$, que la coordonnée z des points de S soit une fonction des coordonnées x, y de ces points de la forme $f(\omega) + f'(\omega')$, où $\omega = x + y$, $\omega' = x - y$, f et f' étant des fonctions des ω et ω' respectivement satisfaisant aux équations différentielles (6,10), la constante C — qui y figure — étant $\neq 0$.*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΙΣΤΩΣΩΝ ΤΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΜΙΑΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

Εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην ἀναφερομένην εἰς τὰς πραγματικὰς μὴ ἐπιπέδους ἐπιφανείας τοῦ τρισδιαστάτου εὐκλειδείου χώρου E^3, ἑκάστης τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα, ἔχουν, ὡς πρὸς τριορθογώνιον σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων Oxyz ἐκλεγὲν ὡς σύστημα ἀναφορᾶς εἰς τὸν χῶρον E^3, συντεταγμένας x, y, z, τῶν ὁποίων, τουλάχιστον μία — ἔστω ἡ z — εἶναι συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο x, y πληροῦσα τὴν εἰς τὴν παράγραφον 1 τοῦ κειμένου παρατιθεμένην ἐξίσωσιν εἰς μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως (1, 1) διά τινα πραγματικὴν τιμὴν τοῦ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην περιεχομένου μοναδικοῦ ἀριθμητικοῦ συντελεστοῦ j καὶ ἀντιστοιχούσας, ὡς ἐκ τούτου εἰς τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ j — ἀποδεικνύονται θεωρήματά τινα ἀφορῶντα εἰς ἰδιότητας τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, οἱασδήποτε οὔσης, ἐν γένει, τῆς τοιαύτης τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ j, εἰς τὴν ὁποίαν αὗται ἀντιστοιχοῦν.

Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ κείμενον — λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς ἑκάστην πραγματικὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ j θεωρουμένου ὡς παραμέτρου, ἀντιστοιχεῖ σύνολον τοιούτων ἐπιφανειῶν: τὸ σύνολον τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παριστωσῶν, ὡς πρὸς τὸ σύστημα ἀναφορᾶς Oxyz, τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν — τῶν μεταβλητῶν x, y ἐν προκειμένῳ — αἵτινες, πληροῦσαι τὴν ἐξίσωσιν (1, 1) διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ j, εἶναι συναρτήσεις ἀνήκουσαι εἰς τὴν θεωρουμένην εἰδικὴν κατηγορίαν — αἱ ἐπιφάνειαι αὗται, χάριν συντομίας, καλοῦνται *ἐπιφάνειαι* S_{Rj}, τοῦ δείκτου j δηλοῦντος τὴν τιμὴν τῆς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1, 1) περιεχομένης παραμέτρου, εἰς τὴν ὁποίαν μία τοιαύτη ἐπιφάνεια ἀντιστοιχεῖ. Ἐξ ἄλλου τὸ ἐπίπεδον τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς Oxyz τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δύο τῶν, ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο, συντεταγμένων x, y, z τῶν σημείων ἐπιφανείας S_{Rj}, συνάρτησις τῶν ὁποίων πληροῦσα τὴν ἐξίσωσιν τοῦ τύπου (1, 1) εἶναι ἡ τρίτη, καλεῖται *ἐπίπεδον βάσεως* τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ χωρίον τοῦ ἐπιπέδου βάσεως, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα εἶναι αἱ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας S_{Rj}, καλεῖται *χωρίον* σ_{Rj} τοῦ ἐπιπέδου βάσεως αὐτῆς.

Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις ταύτας, ἀφοῦ ἐκτεθοῦν ἐν ἀρχῇ στοιχεῖά τινα χρήσιμα διὰ τὴν ὅλην μελέτην, ἀποδεικνύεται ἐν πρώτοις θεώρημα ἐκφράζον συνθήκην γεωμετρικὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν ἵνα πραγματικὴ ἐπιφάνεια τοῦ χώρου E^3 εἶναι ἐπιφάνεια S_{Rj} ἥτις — ἔχουσα ὡρισμένον ἐπίπεδον ὡς ἐπίπεδον βάσεως — ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ δείκτου j καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύεται ὅτι:

α) Εἰς ἑκάστην ἐπιφάνειαν S_{Rj} εἶναι προσηρτημένον εὐθειογενὲς σμῆνος τοῦ Ribaucour. Αἱ γενέτειραι τοῦ σμήνους τούτου εἶναι αἱ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς «μέσης ἐπιφανείας» αὐτοῦ ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς καθέτους τῆς ἐπιφανείας S_{Rj} εἰς τὰ σημεῖα αὐτῆς, τῆς δι' ἑκάστου σημείου τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ σμήνους τούτου διερχομένης γενετείρας αὐτοῦ οὔσης παραλλήλου πρὸς τὴν κάθετον τῆς ἐπιφανείας S_{Rj} εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς τὸ κείμενον ἐπὶ τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου τῆς μέσης ἐπιφανείας ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον βάσεως τῆς ἐπιφανείας S_{Rj}. Ἡ μέση ἐπιφάνεια τοῦ εἰς ἐπιφάνειαν S_{Rj}, ἀντιστοιχοῦσαν εἴς τινα τιμὴν j_o τοῦ δείκτου J, προσηρτημένου τοιούτου σμήνους, εἶναι τὸ χωρίον σ_{Rj}, τοῦ ἐπιπέδου βάσεως τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $J_o = 0$, ἐνῶ, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $J_o \neq 0$, εἶναι ἐπίσης ἐπιφάνεια S_{Rj}. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη — ἔχουσα τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον βάσεως μετὰ τῆς ἐπιφανείας S_{Rj}, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σμῆνος εἶναι προσηρτημένον — ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\frac{1}{J_o}$ τοῦ δείκτου J, *ἑκατέρα δὲ τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν S_{Rj} εἶναι ἡ μέση ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὴν ἄλλην προσηρτημένου τοιούτου σμήνους*. Ἐξ ἄλλου ἡ «γεννήτρια» ἐπιφάνεια τοῦ εἰς ἐπιφάνειαν S_{Rj} προσηρτημένου σμήνους τοῦ Ribaucour εἶναι ἐπιφάνεια S_{Rj}, ἥτις — ἔχουσα τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον βάσεως μετὰ τῆς ἐπιφανείας, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σμῆνος εἶναι προσηρτημένον — ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν αὐτὴν μετὰ τῆς ἐπιφανείας ταύτης τιμὴν τοῦ δείκτου J, *ἑκατέρα δὲ τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν S_{Rj} εἶναι γεννήτρια ἐπιφάνεια τοῦ εἰς τὴν ἄλλην προσηρτημένου τοιούτου σμήνους* — καί:

β) Εἰς ἑκάστην ἐπιφάνειαν S_{Rj}, εἶναι προσηρτημέναι δύο «ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως», αἵτινες — οὖσαι ἐν γένει διακεκριμέναι — συμπίπτουν καὶ δὴ μετὰ τοῦ χωρίου σ_{Rj} τοῦ ἐπιπέδου βάσεως τῆς ἐπιφανείας S_{Rj} μόνον ὅταν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν τιμὴν μηδὲν (0) τοῦ δείκτου J, εἶναι δὲ αὗται πραγματικαί, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια S_{Rj} ἀντιστοιχῇ εἰς τιμὴν τοῦ $J \geqslant 0$. Αἱ εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν S_{Rj} ἀντιστοιχοῦσαι δύο τοιαῦται ἐπιφάνειαι εἶναι ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὅταν αὗται εἶναι διακεκριμέναι, κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν δὲ τῆς ἐπιφανείας S_{Rj} ἐφ' ἑκάστης τούτων (συμπιπτουσῶν ἢ διακεκριμένων), καθ' ἣν τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων σημείων τῶν δύο ἐπιφανειῶν ὁρίζουν εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον βάσεως τῆς ἐπιφανείας S_{Rj}, εἰς τὸ δίκτυον τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐλαχίστης ἐκτάσεως δίκτυον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δίκτυον τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν αὐτῆς, ὅταν αἱ δύο τοιαῦται ἐπιφάνειαι εἶναι διακεκριμέναι. Πρὸς τούτοις ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν θεωρηθοῦν πραγματικὴ μὴ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐλαχίστης ἐκτάσεως S καὶ τυχὸν πραγματικὸν ἐπίπεδον (π), εἶναι δυνατὸν εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν $m \neq -1$ νὰ ἀντιστοιχηθῇ ἐπιφάνεια S_{Rj}, ἥτις — ἔχουσα τὸ ἐπίπεδον (π) ὡς ἐπίπεδον βάσεως ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\frac{1}{(m+1)^2}$ τοῦ δείκτου j.

Ἐν τέλει ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν ἑκατέρα τῶν δύο ἐκ τῶν τριῶν συντεταγμένων z, y, z τῶν σημείων πραγματικῆς μὴ ἐπιπέδου ἐπιφανείας S τοῦ χώρου E^3, ὡς πρὸς σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων τρισορθογώνιον Oxyz, εἶναι συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο πληροῦσα ἐξίσωσιν τοῦ τύπου (1, 1) διὰ τὴν αὐτὴν ἀμφότεραι τιμὴν J_0 τοῦ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὑπάρχοντος μοναδικοῦ συντελεστοῦ j, εἶναι δὲ $J_0 \neq -1$, ἡ τρίτη συντεταγμένη τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας S εἶναι συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο πληροῦσα ἐπίσης ἐξίσωσιν τοῦ τύπου (1, 1) διὰ τὴν τιμὴν $\frac{2}{j_0+1}$ τοῦ συντελεστοῦ J. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς τρίτης συντεταγμένης τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας S εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $J_0 = +1$, εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ γεγονότος καθ' ὃ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι ἐπιφάνειαι ἐλαχίστης ἐκτάσεως. Τούτου τεθέντος καθορίζεται, πρὸς τούτοις, ἡ μορφή, τὴν ὁποίαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ συνάρτησις πραγματικὴ z (x, y), ἵνα αἱ δύο πρῶται τῶν συντεταγμένων x, y, z τῶν σημείων ἐπιφανείας παριστώσης συνάρτησιν τῆς μορφῆς ταύτης, ὡς πρὸς τὸ θεωρηθὲν σύστημα συντεταγμένων Oxyz, ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἀναφερομένην ἰδιότητα διά τινα τιμὴν $\neq \pm 1$ τοῦ συντελεστοῦ J.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, (Teubner), 1910.
2. L. Ph. Einsenhart, A treatise of the Differential Geometry of curves and surfaces. Dover publications.
3. I. Haag, Lignes asymptotiques d'une surface représentée par une fonction harmonique, Bull. Sc. Math. S. 2, t. LXII (1941), pp. 100 - 103.
4. O. Pylarinos, Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques, Bull. de la soc. Roy. des Sciences de Liège, 49' ann. No 11 - 12, (1980), pp. 393 - 399.
5. P. Vincensini, Surfaces harmoniques; congruences et représéntations conformes; associées Bull. Sc. Math. S. 2. t. LXVIII, (1944), p.p. 60 - 70.